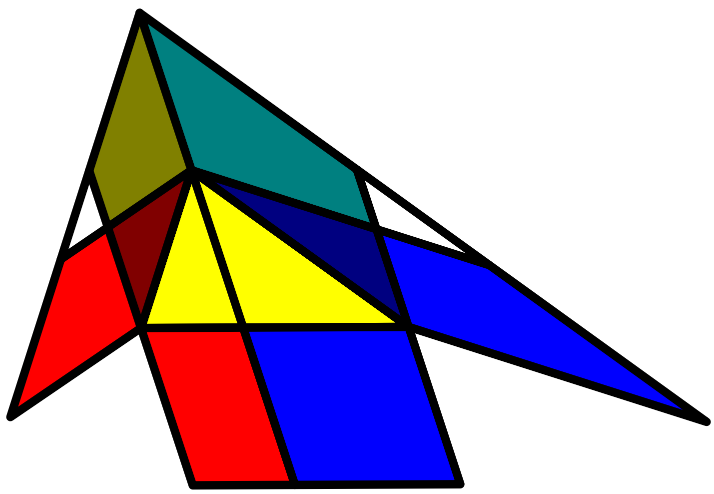
Παμφίλου



Τοπολόγιον

Πρόλογος

Το *τοπολόγιον* είναι η βάση ενός μαθήματος ταχύρρυθμης εισαγωγής στην γενική τοπολογία. Το ονόμασα *τοπολόγιον* με κάπως αλληγορική διάθεση, γιατί η λέξη παραπέμπει σε μια ανάλυση της σημασίας του τόπου. Ο τόπος μπορεί να είναι μια μαθηματική αφαίρεση αλλά δεν παύει να είναι και πραγματικός. Ο τόπος που στεκόμαστε ή νομίζουμε ότι στεκόμαστε και που θέλουμε να αναλύσουμε. Να φτάσουμε σε μια πιο καθαρή αντίληψη του πού βρισκόμαστε και τί κάνουμε. Η γενική τοπολογία, όπως δηλώνει και η λέξη, ασχολείται με τον τόπο, τα είδη του, τι είναι κοντά, τι είναι μακριά, τι θα πεί συνέχεια, αν η έκταση είναι πεπερασμένη ή άπειρη, αν ο χώρος μας είναι σπασμένος σε κομμάτια ή είναι ένα πράγμα, αν υπάρχουν δρόμοι από ένα σημείο σ' ένα άλλο ή είναι γεμάτος αδιέξοδα κτλ.

Στον κλάδο αυτό μυήθηκα πριν σαράντα χρόνια (τι διάστημα μικρό! που έλεγε και ο Καβάφης), στα σεμινάρια του Χρόνη Στράντζαλου, παρέα με το βιβλίο του Dugundji [Dug66], το οποίο είναι και η βασική αναφορά για αυτό το μάθημα. Υπήρχε τότε μια ομάδα από ενθουσιώδεις εθελοντές (οι περισσότεροι των οποίων είναι σήμερα καθηγητές στα πανεπιστήμια της αλλοδαπής αλλά και της ημεδαπής), οι οποίοι παρακολουθούσαν αυτά τα σεμινάρια (χωρίς βαθμολογική κατοχύρωση) στα υπόγεια της οδού Σόλωνος, που διέθετε τότε το πανεπιστήμιο στο Μαθηματικό της Αθήνας. Το μεσημέρι, επιστρέφοντας στο σπίτι, στιβαγμένοι στα λεωφορεία, ζούσαμε την εμπειρία της μαθηματικής επαγωγής, όπως μου την εξήγησε αρκετά χρόνια αργότερα ο αείμνηστος Κώστας Σκανδάλης: εάν σε ένα λεωφορείο χωράνε n άτομα, όπου n ακέραιος θετικός, τότε χωράνε και $n+1$, άρα χωράνε άπειρα. Το λεωφορείο ήταν παράδειγμα ενός εξαιρετικά συμπαγούς χώρου με μη κενό εσωτερικό, σε αντίθεση με το σύνολο του Cantor (θεώρημα 1.1.10). Είχε επίσης προσανατολισμό, και πήγαινε κατά μήκος μιας συνεχούς καμπύλης, από ένα σημείο σε ένα άλλο, υλοποιώντας την κατά τόξα συνεκτικότητα της Αθήνας. Έντονη ήταν επίσης η αίσθηση των επιβατών ότι, κρατώντας τα χερούλια για να μην πέσουν, ταυτόχρονα λειτουργούσαν σαν σύνδεσμοι, συγκρατώντας σε ένα συνεκτικό σύνολο και τα μέρη των παλαιών, κατά κανόνα, λεωφορείων, που, θα έλεγε κανείς, παρουσίαζαν μια έλλειψη σταθεράς Lipschitz, μια διασταλτική συμπεριφορά, μια τάση προς την απώλεια των συνιστωσών τους.

Η γενική τοπολογία έχει το χαρακτηριστικό να είναι πανταχού παρούσα, σε όλους, σχεδόν, τους κλάδους των μαθηματικών και όχι μόνο. Θα έλεγε κανείς, ίσως λίγο υπερβάλοντας, ότι είναι σαν τον χώρο που περιέχει τα πάντα και περιέχεται παντού. Το πρόβλημα με την διδασκαλία της, όπως το νιώθω, είναι ότι στηρίζεται σε ένα πλήθος αφηρημένων εννοιών (που τελικά συγκροτούν μια γλώσσα), οι οποίες προέρχονται από πολύ συγκεκριμένα προβλήματα και ιδιότητες, που ο φοιτητής, κατά κανόνα, δεν έχει προλάβει να κατανοήσει εμπειρικά. Μοιάζουν με τις υπόγειες υποδομές, ύδρευσης, αποχέτευσης, δικτύωσης της πολιτείας, οι οποίες υποστηρίζουν την κάπως πιο ενδιαφέρουσα ζωή στην επιφάνεια.

Έτσι, πολύ εύκολα, μπορεί να γλιστρίσει ο φοιτητής στην νοοτροπία, του να σκάβει λάκους και να βάζει σωλήνες, στους οποίους δεν ξέρει τι ρέει μέσα τους, από που έρχονται και που ακριβώς πάνε. Σε αυτήν την νοοτροπία δε, θα παγιωθεί με στερεότητα, αν αφήσει να αντιχήσει, στο εσωτερικό του, ο υπονομευτικός ψίθυρος: *άντε να ξεμπερδεύω μ' αυτό*. Η σωστή νοοτροπία εδώ, όπως και σε κάθε άλλο κλάδο των μαθηματικών (και γενικότερα σε κάθε κλάδο όπου κάθεται ο εκπαιδευόμενος χωρίς ο ίδιος να τον πριονίζει με κοφτερό πριόνι), είναι η ακριβώς αντίθετη: δηλαδή το να μπερδεύεται σ' αυτόν, να βυθίζεται σ' αυτόν, να αγωνίζεται για την κατανόηση, να φτάνει στην απόλαυση της εντρύφησης.

Σ' αυτό το σημείο είναι σημαντική, νομίζω, η συμβολή του δασκάλου, που θα μπορέσει να φανερώσει με παραδείγματα και εφαρμογές, κάτι από το μεγάλο ενδιαφέρον του θέματος. Το πράγμα δεν είναι εύκολο και θέλει ζήλο και από τα δύο μέρη, το δάσκαλο και το μαθητή. Όπως ακριβώς ο άνθρωπος, στα πρώτα του χρόνια, κινείται ανέμελα στον τόπο του, πάει εδώ, πάει εκεί, αλλά στην ουσία δεν ξέρει ακριβώς ούτε που πάει ούτε γιατί πάει εκεί που πάει (ούτε αν θα του αρέσει εκεί που θα φθάσει), έτσι και στην τοπολογία φανερώνεται αργότερα η σημασία των γενικών απλών αρχών που διαποτίζουν και εν πολλοίς καθορίζουν σύνθετα φαινόμενα. Ελάχιστο παράδειγμα είναι εκείνα τα ε και δ που εμφανίζονται στον ορισμό της συνέχειας του απειροστικού λογισμού και της σύγκλισης ακολουθιών. Τι ακριβώς σημαίνουν αυτά τα πράγματα; Αν θέλει κάποιος να κατανοήσει πραγματικά την σημασία τους, πρέπει να καταφύγει στην μελέτη της τοπολογίας.

Στο μάθημα λοιπόν αυτό προσπάθησα να συζητήσω τα πιό απαραίτητα και στοιχειώδη κεφάλαια της γενικής τοπολογίας, που, κατά τη γνώμη μου, συγκεντρώνονται γύρω από την συνέχεια, τους μετρικούς χώρους, την συνεκτικότητα και την συμπάγεια. Κατόπιν δε, να δείξω την αξία τους, αναλύοντας με αυτά τις αποδείξεις σε μερικά από τα πιό γνωστά θεωρήματα των μαθηματικών, όπως είναι το *θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας*, το *θεώρημα των Stone, Weierstrass*, το *θεώρημα του Brouwer* και το *θεώρημα του Jordan*. Έτσι το τοπολόγιον, που συνηχεί με το *δρομολόγιον*, είναι μια πορεία με αφετηρία, διαδρομή με αξιοθέατα και προορισμό συγκεκριμένο. Στην τάξη, βέβαια, υπάρχει πάντα μια διάσταση του αποτελέσματος από την πρόθεση. Ο χρόνος της κατασκευής των εργαλείων μπορεί να εξαντληθεί εύκολα και οι μαθητές να μείνουν με τα εργαλεία στο χέρι, χωρίς να τα έχουν δοκιμάσει σε μια κατασκευή. Η λύση είναι οι εργασίες σε ειδικά θέματα, που μπορεί να αναθέσει ο δάσκαλος σε κάθε μαθητή και η λεπτομερής μελέτη των παραδόσεων και ει δυνατόν του βιβλίου του δασκάλου.

Αυτό λοιπόν είναι το βιβλίο του δασκάλου, και από τη φύση του εγχειρήματος, σε μερικά σημεία ο λόγος είναι ελλειπτικός και η συμπλήρωσή του με τις υπονοούμενες λεπτομέρειες είναι μια απαραίτητη άσκηση για τον αναγνώστη. Τις υποχρεωτικές, θα έλεγα, αυτές ασκήσεις συμπληρώνουν και άλλες, ορισμένες από τις οποίες δανείστηκα από τα βιβλία που αναφέρω στην βιβλιογραφία, όπου και παραπέμπω για επιπλέον ασκήσεις, επεκτάσεις και εναλλακτικές θεωρήσεις.

Ελπίζω με το πόνημα αυτό να συνεισφέρω και στην κατανόηση ενός άλλου αόρατου, αλλά πανταχού παρόντα, παράγοντα στη ζωή του μαθητή, που συχνά τον λησμονεί. Αυτός συνίσταται στο ότι, όσες γνώσεις και αν αποκτήσει, ότι και να μάθει, όπως και αν χρησιμοποιήσει τις γνώσεις του, η βασική του περιουσία και πηγή χαράς θα είναι πάντοτε το ζωντανό ενδιαφέρον του για το αντικείμενο, η γνήσια προθυμία του να παίρνει τη θέση του μαθητή.

Ηράκλειο, 17 Ιανουαρίου 2014
Πάρις Πάμφιλος

Κατάλογος Συμβόλων

$(\mathcal{M}, \mathcal{T})$	$\mathcal{M}$ Τοπολογικός χώρος, $\mathcal{T}$ το σύνολο όλων των ανοικτών του
$(\mathcal{M}, d)$	$\mathcal{M}$ Μετρικός χώρος, d η μετρική του
$\overline{A}$	Κλειστή θήκη ή κλειστότητα τοπολογικού χώρου
$d(x, y)$	Απόσταση δύο σημείων μετρικού χώρου
$\|\|x\|\|$	norm διανύσματος
$B_r(x)$	Ανοικτή μπάλα μετρικού χώρου, ακτίνας r, κέντρου x
$S_r(x)$	Σφαίρα μετρικού χώρου, κέντρου x και ακτίνας r
AB	Ευθύγραμμο τμήμα από σημεία A, B διανυσματικού χώρου
A^c	Συμπλήρωμα $(\mathcal{M} - A)$ του A στον χώρο $\mathcal{M}$
∂A	Το σύνορο του συνόλου A
$\{x_n\}$	Ακολουθία σημείων ενός τοπολογικού χώρου
$d(x, A)$	Απόσταση σημείου x από σύνολο A
$\delta(A)$	Διάμετρος συνόλου
A'	Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A
A^o	Το εσωτερικό συνόλου A
$\{A_i, i \in I\}$	Οικογένεια συνόλων με δείκτες από το σύνολο I
$\mathbb{N}$	Το σύνολο των φυσικών αριθμών
$\mathbb{Z}$	Το σύνολο των ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Q}$	Το σύνολο των ρητών αριθμών
$\mathbb{R}$	Το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{C}$	Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών
$\mathcal{C}$	Το σύνολο του Cantor
$\mathcal{H}$	Ο κύβος του Hilbert
U_x	Ανοικτή περιοχή του σημείου x
$\mathcal{M}_1 \times ... \times \mathcal{M}_n$	Καρτεσιανό γινόμενο n το πλήθος χώρων
$\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$	Απειρογινόμενο χώρων
$\langle A_{i_1} \dots A_{i_n} \rangle$	Βασικό ανοικτό απειρογινομένου
$f \big\|_A$	Περιορισμός συνάρτησης στο υποσύνολο A
f^{-1}	Αντίστροφη συνάρτηση της f
$f^{-1}(A)$	Αντίστροφη εικόνα του A μέσω της f
$g \circ f$	Σύνθεση δύο απεικονίσεων
$g = f_1 * \cdots * f_n$	Σύνθεση καμπυλών
$B(\mathcal{M}, \mathbb{R})$	Χώρος των φραγμένων συναρτήσεων του $\mathcal{M}$
$B(\mathcal{M}, V)$	Ξώρος φραγμένων συναρτήσεων σε χώρο $\mathcal{M}$ με norm
$C(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ ή $C(\mathcal{M})$	Χώρος φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων στο $\mathcal{M}$
$B[0, 1]$	Χώρος φραγμένων συναρτήσεων στο $[0, 1]$
$C[0, 1]$	Χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $[0, 1]$
$\mathbb{R}^\infty$	Χώρος των πραγματικών ακολουθιών
$2^\mathbb{N}$	Χώρος ακολουθιών του $\{0, 1\}$
ℓ^p	Χώροι ακολουθιών με norm $\|\|x\|\|_p$
ℓ^∞	Χώρος φραγμένων ακολουθιών με norm $\|\|x\|\|_\infty$

A^t	Ο ανάστροφος του πίνακα A
$A = (a_1, \ldots, a_n)$	Οι στήλες του πίνακα A
$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$	Χώρος $m \times n$ πραγματικών πινάκων
$GL(n, \mathbb{R})$	Ομάδα $n \times n$ αντιστρεψίμων πραγματικών πινάκων
$SL(n, \mathbb{R})$	Ειδική γραμμική ομάδα
$O(n)$	Ομάδα ορθογωνίων $n \times n$ πινάκων
$SO(n)$	Ομάδα ορθογωνίων πινάκων με ορίζουσα $= 1$
$\mathcal{A}(f)$	Υποάλγεβρα της $C(\mathcal{M})$ παραγόμενη από το f

Περιεχόμενα

1 Τοπολογικοί χώροι, συνέχεια **1**
- 1.1 Τοπολογικοί χώροι . . . 1
- 1.2 Συνεχείς απεικονίσεις . . . 12

2 Μετρικοί χώροι, πληρότητα **25**
- 2.1 Μετρικοί χώροι . . . 25
- 2.2 Πληρότητα μετρικής . . . 37

3 Θεωρήματα των Baire, Urisohn, Tietze **47**
- 3.1 Θεώρημα του Baire . . . 47
- 3.2 Τα θεωρήματα των Uryshohn και Tietze . . . 49

4 Συνεκτικότητα **53**
- 4.1 Συνεκτικοί χώροι . . . 53
- 4.2 Συνεκτικότητα κατά τόξα . . . 59

5 Συμπάγεια **61**
- 5.1 Συμπαγείς χώροι . . . 61
- 5.2 Συμπάγεια και μετρικοί χώροι . . . 65
- 5.3 Τοπική συμπάγεια, συμπαγοποίηση . . . 75

6 Συμπληρωματικά θέματα **79**
- 6.1 Η τοπολογία ταύτισης . . . 79
- 6.2 Η τοπολογία πηλίκον . . . 81
- 6.3 Ισοσυνεχείς οικογένειες συναρτήσεων . . . 85
- 6.4 Απειρογινόμενα . . . 86

7 Μερικά αξιοσημείωτα θεωρήματα **93**
- 7.1 Το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας . . . 93
- 7.2 Το θεώρημα των Stone, Weierstrass . . . 95
- 7.3 Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer . . . 98
- 7.4 Το θεώρημα του Jordan . . . 101

Βιβλιογραφία **107**

Ευρετήριο **108**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Τοπολογικοί χώροι, συνέχεια

1.1 Τοπολογικοί χώροι

Ορισμός 1.1.1 Τοπολογικός χώρος *ονομάζεται ένα ζεύγος* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ *αποτελούμενο από ένα μη κενό σύνολο* $\mathcal{M}$ *και ένα σύνολο* $\mathcal{T}$ *υποσυνόλων του* $\mathcal{M}$ *(συχνά λέμε και οικογένεια υποσυνόλων του). Τα υποσύνολα του* $\mathcal{M}$ *που ανήκουν στο* $\mathcal{T}$ *ονομάζουμε* **ανοικτά** *του τοπολογικού χώρου και ικανοποιούν τα αξιώματα:*

1. *Τα δύο ειδικά υποσύνολα* $\emptyset$ *και το ίδιο το* $\mathcal{M}$ *είναι ανοικτά.*
2. *Αν τα* $A_1, ..., A_n$ *είναι ανοικτά τότε και η τομή τους* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ *είναι ανοικτό.*
3. *Αν* $\{A_i, i \in I\}$ *είναι οικογένεια ανοικτών, τότε και η ένωσή τους* $\bigcup_{i \in I} A_i$ *είναι ανοικτό.*

Σχόλιο-1 Έχοντας καθορίσει, με κάποιο τρόπο, τα $\mathcal{M}$ και $\mathcal{T}$, χρησιμοποιούμε τον όρο *τοπολογικός χώρος* και για το ίδιο το $\mathcal{M}$, ενώ το $\mathcal{T}$ το αναφέρουμε ως *η τοπολογία του M*. Επίσης, τα σύνολα $A \in \mathcal{T}$ αναφέρουμε ως *ανοικτά της τοπολογίας* του $\mathcal{M}$.

Σχόλιο-2 Το πρώτο αξίωμα δείχνει ότι η οικογένεια των ανοικτών $\mathcal{T}$ περιέχει πάντοτε το $\emptyset$ και το ίδιο το $\mathcal{M}$, επομένως δεν είναι ποτέ κενό σύνολο. Το δεύτερο αξίωμα απαιτεί η τομή ενός οποιουδήποτε *πεπερασμένου πλήθους* ανοικτών να είναι ανοικτό. Το τρίτο αξίωμα, αφορά στην ένωση *οσωνδήποτε* ανοικτών και απαιτεί η ένωσή τους να είναι πάντα ανοικτό. Από τον ορισμό προκύπτει ότι το ίδιο σύνολο $\mathcal{M}$ μπορεί να έχει διάφορες τοπολογίες $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$', ... Πόσες διαφορετικές τοπολογίες έχει ένα σύνολο με $2, 3$ και 4 στοιχεία αντίστοιχα;

Παραδείγματα

1. **Διακριτή τοπολογία.** Σε κάθε σύνολο $\mathcal{M}$ (θα υποθέτουμε στο εξής ότι το $\mathcal{M}$ είναι μη κενό) ορίζεται, θα μπορούσαμε να πούμε, η *μέγιστη* τοπολογία $\mathcal{T}$, που περιλαμβάνει **όλα** τα υποσύνολα του $\mathcal{M}$. Θεωρούμε λοιπόν ως ανοικτά όλα τα υποσύνολα του $\mathcal{M}$. Η διαπίστωση της ισχύος των τριών αξιωμάτων είναι τετριμμένη. Η τοπολογία $\mathcal{T}$που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ονομάζεται **διακριτή** τοπολογία του $\mathcal{M}$.

2. **Τετριμμένη τοπολογία.** Σε κάθε σύνολο $\mathcal{M}$ ορίζεται, η *ελάχιστη* τοπολογία $\mathcal{T}$, που περιλαμβάνει δύο μόνο υποσύνολα του $\mathcal{M}$, το $\emptyset$ και το ίδιο το $\mathcal{M}$. Και πάλι, η διαπίστωση της ισχύος των τριών αξιωμάτων είναι τετριμμένη. Η τοπολογία $\mathcal{T}$που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ονομάζεται **τετριμμένη** τοπολογία του $\mathcal{M}$.

3. **Τομή τοπολογιών.** Όπως τονίζεται και από τα προηγούμενα παραδείγματα, σε ένα σύνολο $\mathcal{M}$ μπορούμε να ορίσουμε περισσότερες από μία τοπολογίες $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$, κτλ. Εάν, λοιπόν, $\{\mathcal{T}_i, i \in I\}$

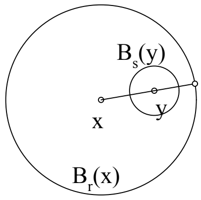
είναι μία οικογένεια από τοπολογίες, τότε η τομή όλων αυτών $\mathcal{T}_0 = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ ικανοποιεί πάλι τα τρία αξιώματα και ορίζει μία τοπολογία, που ονομάζεται **τοπολογία τομή** των τοπολογιών $\{\mathcal{T}_i, i \in I\}$.

4. **Η σχετική τοπολογία ενός υποσυνόλου** $B \subset \mathcal{M}$. Σε ένα υποσύνολο $B \subset \mathcal{M}$ του τοπολογικού χώρου ορίζεται μία τοπολογία μέσω των τομών με τα ανοικτά του $\mathcal{M}$.
$$\mathcal{T}_B = \{B \cap A, \text{ όπου } A \in \mathcal{T}\}.$$
Η τοπολογία αυτή ονομάζεται **σχετική** ή **εισαγόμενη** από αυτήν του $\mathcal{M}$.

5. **Η συνήθης τοπολογία του** $\mathbb{R}$. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ έχει μία, κατά κάποιο τρόπο, φυσιολογική, τοπολογία, της οποίας **τα ανοικτά είναι ενώσεις ανοικτών διαστημάτων**. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ αυτής της μορφής ικανοποιούν πράγματι τα τρία αξιώματα. Ετσι, λ.χ. ως προς αυτή την τοπολογία, το σύνολο
$$\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (i, i+1)$$
είναι ανοικτό, ως ένωση (απείρου πλήθους) ανοικτών διαστημάτων. Στον ίδιο χώρο η οικογένεια των διαστημάτων $\{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$ δίνει ένα παράδειγμα άπειρης οικογένειας ανοικτών των οποίων η τομή
$$\bigcap_1^\infty \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$
δεν είναι ανοικτό.

6. **Τοπολογία** $\mathcal{T}_+$ **του** $\mathbb{R}$. Σε αυτήν θεωρούμε ως ανοικτά μόνο τα άπειρα διαστήματα $\{(\alpha, \infty), \alpha \in \mathbb{R}\}$, καθώς και τα $\mathbb{R}, \emptyset$. Ανάλογα ορίζεται και η **Τοπολογία** $\mathcal{T}_-$ **του** $\mathbb{R}$, στην οποία ως ανοικτά, εκτός των $\mathbb{R}, \emptyset$, θεωρούμε τα άπειρα διαστήματα $\{(-\infty, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Προφανώς η συνήθης τοπολογία $\mathcal{T}$ του $\mathbb{R}$ περιέχει τις $\mathcal{T}_+$ και $\mathcal{T}_-$ και οι τρείς, όμως, είναι ανά δύο διαφορετικές.

7. **Η συνήθης τοπολογία του** $\mathbb{R}^n$. Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει επίσης μία τοπολογία, που κατ' αναλογίαν προς το προηγούμενο παράδειγμα, έχει ως ανοικτά **τις ενώσεις από ανοικτές μπάλες**. Μιά **ανοικτή μπάλα** του $\mathbb{R}^n$ είναι το εσωτερικό μιας σφαίρας κέντρου $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνας r:
$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < r\}.$$
Εδώ τα στοιχεία (διανύσματα) του $\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $x = (x_1, ..., x_n)$ και την **απόσταση** δύο σημείων με
$$||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$
Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1.1, για κάθε σημείο $y \in B_r(x)$ υπάρχει μπάλα $B_s(y)$ με κέντρο το y,



Σχήμα 1.1.1: Μια ανοικτή μπάλα είναι ένωση ανοικτών μπαλών

περιεχόμενη στην $B_r(x)$. Αρκεί να πάρουμε $s < r - ||y - x||$ για να ισχύει $B_s(y) \subset B_r(x)$. Αυτό δείχνει ότι η $B_r(x)$ είναι ένωση (απείρου πλήθους) τέτοιων μπαλών
$$B_r(x) = \bigcup_{y\in B_r(x)} B_s(y),$$
που σημαίνει ότι και οι οι ίδιες οι ανοικτές μπάλες είναι ανοικτά σύνολα.

8. **Η συνήθης τοπολογία του** $\mathbb{C}$. Η τοπολογία αυτή των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ προκύπτει από την ταύτισή τους με το $\mathbb{R}^2$:
$$\mathbb{C} \ni z = x + i\,y \quad \leftrightarrow \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Η απόσταση δύο μιγαδικών αριθμών
$$|z - z'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{(z - z')\,(\overline{z - z'})},$$
όπου $\overline{z} = x - iy$ ο **συζυγής** του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$. Για μιγαδικούς αριθμούς ορίζεται και το γινόμενο
$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y), \quad \text{αν} \quad z = x + iy,\ z' = x + iy,$$
που ακολουθεί τους ίδιους κανόνες (επιμεριστικότητα, προσεταιριστικότητα) με τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών. Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού
$$z = x + iy \neq 0 \;\; \text{είναι ο} \;\; \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

9. **Τοπολογία παραγόμενη από ορισμένα υποσύνολα του** $\mathcal{M}$. Έστω $\{B_i, i \in I\}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του συνόλου $\mathcal{M}$. Θεωρούμε όλες τις δυνατές τοπολογίες $\mathcal{T}_k$ που περιέχουν αυτή την οικογένεια:
$$\{B_i, i \in I\} \subset \mathcal{T}_k.$$
Η τομή όλων αυτών των τοπολογιών
$$\mathcal{T} = \bigcap_k \mathcal{T}_k,$$
είναι η **ελάχιστη** τοπολογία που περιέχει τα $\{B_i, i \in I\}$ μεταξύ των ανοικτών της και λέγεται η **τοπολογία η παραγόμενη από τα υποσύνολα** $\{B_i, i \in I\}$.

Ορισμός 1.1.2 *Τα δύο τελευταία παραδείγματα έχουν μια ιδιαίτερη σημασία, και οδηγούν στους επόμενους ορισμούς.*

1. *Ένα υποσύνολο ανοικτών $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ ονομάζεται **βάση** της τοπολογίας, όταν κάθε ανοικτό $A \in \mathcal{T}$ γράφεται ως ένωση*
$$A = \bigcup_{i \in I} B_i, \quad \textit{στοιχείων της βάσης:} \;\; B_i \in \mathcal{B}.$$

2. *Αν η τοπολογία $\mathcal{T}$ **παράγεται** (όπως στο παράδειγμα-9) από μία οικογένεια συνόλων $\mathcal{B} = \{B_i, i \in I\}$, τότε λέμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι μία **υποβάση** της τοπολογίας $\mathcal{T}$.*

Σχόλιο-3 Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό, η οικογένεια όλων των μπαλών $\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ αποτελεί μία βάση της συνήθους τοπολογίας $\mathcal{T}$του $\mathbb{R}^n$. Παρόμοια, το σύνολο $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ όλων των ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ αποτελεί μία βάση της συνήθους τοπολογίας του.

Θεώρημα 1.1.1 *Αν η οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{B} = \{B_i, i \in I\}$ του $\mathcal{M}$ είναι υποβάση της τοπολογίας του $\mathcal{T}$, τότε το σύνολο των πεπερασμένων τομών*
$$\mathcal{B}' = \{B_{i_1} \cap ... \cap B_{i_k} : B_i \in \mathcal{B}\},$$
είναι μια βάση της $\mathcal{T}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{T}_0$ των υποσυνόλων του $\mathcal{M}$ που γράφονται ως ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{B}'$.
$$\mathcal{T}_0 = \{\cup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B}'\}.$$
Βλέπουμε εύκολα ότι το $\mathcal{T}_0$ ικανοποιεί τα αξιώματα τοπολογίας και συνεπώς ορίζει μία τοπολογία στο $\mathcal{M}$. Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι η τοπολογία αυτή είναι υποσύνολο
$$\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}, \;\; \text{για κάθε τοπολογία } \mathcal{T} \text{ που ικανοποιεί } \mathcal{T} \supset \mathcal{B}.$$

Συνάγεται ότι η τοπολογία η παραγόμενη από το $\mathcal{B}$, που είναι η τομή όλων των τοπολογιών που περιέχουν το $\mathcal{B}$, θα ταυτίζεται με την $\mathcal{T}_0$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-4 Προφανώς κάθε βάση $\mathcal{B}$ ενός τοπολογικού χώρου ($\mathcal{M}$,$\mathcal{T}$) είναι και υποβάση του. Το αντίστροφο, όμως, δεν ισχύει. Για παράδειγμα, το σύνολο των απείρων ανοικτών διαστημάτων

$$\mathcal{B} = \{(-\infty, \alpha), (\beta, \infty) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

είναι υποβάση της συνήθους τοπολογίας του $\mathbb{R}$. Δεν είναι όμως βάση, αφού λ.χ. το πεπερασμένο ανοικτό διάστημα (α, β) δεν γράφεται σαν ένωση τέτοιων απείρων διαστημάτων.

Σχόλιο-5 Κατά κανόνα μια βάση $\mathcal{B}$ μιας τοπολογίας $\mathcal{T}$ περιέχει πολύ λιγότερα ανοικτά απ' ότι η $\mathcal{T}$, τα οποία όμως, μέσω των ενώσεών τους παράγουν όλα τα ανοικτά. Έτσι λ.χ το σύνολο των διαστημάτων

$$\mathcal{B} = \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

αποτελεί βάσει της συνήθους τοπολογίας του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.1.3 *Το υποσύνολο $B \subset \mathcal{M}$ ενός τοπολογικού χώρου $\mathcal{M}$ λέγεται* **κλειστό** *όταν το συμπλήρωμά του $B^c = \mathcal{M} - B$ είναι ανοικτό.*

Θεώρημα 1.1.2 *Γιά τα κλειστά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ ισχύουν οι ιδιότητες:*

1. *Τα δύο ειδικά υποσύνολα $\emptyset$ και το ίδιο το $\mathcal{M}$ είναι κλειστά.*
2. *Αν τα $B_1, ..., B_n$ είναι κλειστά τότε και η ένωσή τους $\bigcup_{i=1}^n B_i$ είναι κλειστό.*
3. *Αν $\{B_i, i \in I\}$ είναι οικογένεια κλειστών, τότε και η τομή τους $\bigcap_{i\in I} B_i$ είναι κλειστό.*

Απόδειξη: Το (1) είναι προφανές. Για το (2), γράφουμε το

$$B_i = A_i^c, \quad A_i \in \mathcal{T}$$

ως συμπλήρωμα ενός ανοικτού. Τότε

$$B_1 \cup ... \cup B_n = A_1^c \cup ... \cup A_n^c = (A_1 \cap ... \cap A_n)^c,$$

που αποδεικνύει το (2). Ανάλογα, η τομή οσωνδήποτε κλειστών $\{B_i, i \in I\}$ γράφεται

$$\bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} A_i^c = (\bigcup_{i\in I} A_i)^c,$$

που αποδεικνύει το (3), ο.ε.δ.

Σχόλιο-6 Στο $\mathbb{R}$, με την συνήθη τοπολογία, η οικογένεια των διαστημάτων $\{[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}\}$ δίνει ένα τετριμμένο παράδειγμα άπειρης οικογένειας κλειστών, της οποίας η ένωση δεν είναι κλειστό (αλλά ανοικτό)

$$\bigcup_1^\infty \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1).$$

Ορισμός 1.1.4 *Δοθέντος υποσυνόλου E του τοπολογικού χώρου ($\mathcal{M}$,$\mathcal{T}$), ορίζονται ανοικτά και κλειστά σύνολα που σχετίζονται με το E.*

1. *Το* **εσωτερικό** *E^o του E είναι η ένωση όλων των ανοικτών που περιέχονται στο E:*

$$E^o = \bigcup_{i\in I} A_i, \text{ όπου } A_i \in \mathcal{T} \text{ και } A_i \subset E.$$

2. *Η* **(κλειστή) θήκη** $\overline{E}$ *του* E *είναι η τομή όλων των κλειστών που περιέχουν το* E*:*

$$\overline{E} = \bigcap_{i \in I} B_i, \text{ όπου } B_i \text{ κλειστό και } B_i \supset E.$$

3. *Το* **σύνορο** ∂E *του* E *είναι η τομή*
$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}.$$

4. *Το σύνολο* E *λέγεται* **πυκνό**, *όταν η θήκη του είναι όλος ο χώρος*

$$E \text{ πυκνό} \quad \Rightarrow \quad \overline{E} = \mathcal{M}.$$

5. **Διαχωρίσιμος** *λέγεται ένας τοπολογικός χώρος* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ *που περιέχει ένα* **αριθμήσιμο** *πυκνό υποσύνολο.*

Σχόλιο-7 Υπάρχουν σύνολα E με κενό εσωτερικό $E^o = \emptyset$. Π.χ. κάθε πεπερασμένο σύνολο $E = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}$ του $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία έχει κενό εσωτερικό. Άλλα παραδείγματα τέτοιων συνόλων είναι το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, αλλά και το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, καθώς και το συμπλήρωμα αυτού, που είναι το σύνολο των αρρήτων $\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$. Προφανώς για ανοικτά σύνολα E ισχύει $E^o = E$, αλλά και αντίστροφα, αν $E^o = E$, τότε το E είναι ανοικτό. Προφανώς επίσης ισχύει $E^{oo} = E^o$.

Σχόλιο-8 Η θήκη ενός μη κενού συνόλου E είναι πάντοτε μη κενό σύνολο, αφού πάντοτε $E \subset \overline{E}$. Από τον ορισμό έπεται επίσης ότι για ένα κλειστό E ισχύει $\overline{E} = E$. Και αντίστροφα, η $\overline{E} = E$ συνεπάγεται ότι το E είναι κλειστό. Προφανώς ισχύει και η $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$. Κάθε πεπερασμένο σύνολο $E = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}$ του $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία είναι κλειστό. Στον ίδιο χώρο το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, καθώς και ένα οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ είναι επίσης κλειστό. Ας σημειώσουμε ότι ένα υποσύνολο $E \subset \mathcal{M}$ ενός τοπολογικού χώρου μπορεί να μην είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό, όπως λ.χ. το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ως προς την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$ ή και ένα ημι-ανοικτό διάστημα $[\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.

Σχόλιο-9 Οι τοπολογικοί χώροι $\mathbb{R}^n$ με την συνήθη τοπολογία είναι παραδείγματα *διαχωρίσιμων* χώρων. Ένα πυκνό αριθμήσιμο υποσύνολο που περιέχουν είναι το $\mathbb{Q}^n$.

Θεώρημα 1.1.3 *Δοθέντος συνόλου* $E \subset \mathcal{M}$ *τοπολογικού χώρου* $\mathcal{M}$*, το σημείο* $x \in \mathcal{M}$ *περιέχεται στην θήκη* $\overline{E}$*, τότε και μόνον, όταν κάθε ανοικτό* A *που περιέχει το* x *τέμνει το* E*.*

Απόδειξη: Έστω ότι $x \in \overline{E}$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ανοικτό $A \ni x$ με $A \cap E = \emptyset$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο. Πράγματι, τότε το A^c είναι κλειστό και $A^c \supset E$. Όμως το $\overline{E}$ είναι η τομή όλων των κλειστών που περιέχουν το E, άρα $A^c \supset \overline{E}$, που συνεπάγεται ότι $x \in A^c$ και αντιφάσκει στην υπόθεση $x \in A$.

Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι για κάθε ανοικτό $A \ni x$ ισχύει $A \cap E \neq \emptyset$, όμως $x \notin \overline{E}$. Θα δείξουμε πάλι ότι προκύπτει άτοπο. Πράγματι τότε το $A = (\overline{E})^c$ είναι ανοικτό που περιέχει το x και δεν τέμνει το $\overline{E}$, άρα και το μικρότερό του $E \subset \overline{E}$, αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.

Θεώρημα 1.1.4 *Έστω* $\{A_i, i \in I\}$ *οικογένεια υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$*. Τότε ισχύουν οι ιδιότητες:*

1. $\overline{\cap_{i \in I}} \subset \cap_{i \in I} \overline{A_i}$.
2. $\overline{\cup_{i \in I}} \subset \cup_{i \in I} \overline{A_i}$, *και ισχύει η ισότητα για* I *πεπερασμένο.*
3. $\cup_{i \in I} A_i^o \subset (\cup_{i \in I} A_i)^o$.
4. $(\cap_{i \in I} A_i)^o \subset \cap_{i \in I} A_i^o$, *και ισχύει η ισότητα για* I *πεπερασμένο.*

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς, ο.ε.δ.

Ορισμός 1.1.5 *Ονομάζουμε* **περιοχή ενός σημείου** $x \in \mathcal{M}$ *ενός τοπολογικού χώρου* $\mathcal{M}$ *ένα οποιοδήποτε ανοικτό* A *που περιέχει το* x*.*

Χρησιμοποιώντας την καθιερωμένη αυτή ορολογία το προηγούμενο θεώρημα περιγράφεται σύντομα:

$$x \in \overline{E} \quad \Leftrightarrow \quad \text{γιά κάθε περιοχή } A_x \text{ του } x : A_x \cap E \neq \emptyset.$$

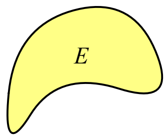
Θεώρημα 1.1.5 *Γιά κάθε σύνολο του τοπολογικού χώρου* $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ *ισχύει* $E^o = (\overline{E^c})^c \;\Leftrightarrow\; (E^o)^c = \overline{E^c}$.

Απόδειξη: Πράγματι, η $\overline{E^c} \supset E^c \quad \Rightarrow \quad (\overline{E^c})^c \subset (E^c)^c = E$. Όμως το E^o είναι το μέγιστο ανοικτό περιεχόμενο στο E, άρα $(\overline{E^c})^c \subset E^o$.

Παρόμοια, η $E^c \subset (E^o)^c \quad \Rightarrow \quad \overline{(E^c)} \subset (E^o)^c$, διότι το $\overline{(E^c)}$ είναι το ελάχιστο κλειστό που περιέχει το E^c ενώ το $(E^o)^c$ είναι απλώς ένα κλειστό που περιέχει το E^c. Παίρνοντας το συμπλήρωμα έπεται ότι και $E^o \subset (\overline{E^c})^c$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.1.1 *Ένα σύνολο* $E \subset \mathcal{M}$ *είναι πυκνό του τοπολογικού χώρου* $(\mathcal{M},\mathcal{T})$*, τότε και μόνον όταν το συμπλήρωμά του έχει κενό εσωτερικό* $(E^c)^o = \emptyset$.

Σχόλιο-10 Το σύνορο $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$ ενός συνόλου είναι κλειστό σύνολο και από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι αν $x \in \partial E$ τότε κάθε ανοικτό $A \ni x$ που περιέχει το x τέμνει και το E και το συμπλήρωμά του E^c. Από τον ορισμό προκύπτει επίσης ότι το σύνορο ενός συνόλου E ταυτίζεται με το σύνορο του συμπληρώματός του $\partial E = \partial(E^c)$. Σε αρκετές περιπτώσεις, όπως λ.χ. αυτή του σχήματος 1.1.2



Σχήμα 1.1.2: $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$

μπορούμε να σκεφτόμαστε το ∂E σαν μια διαχωριστική γραμμή (ή επιφάνεια κτλ.) μεταξύ του E και του συμπληρώματός του E^c. Υπάρχουν ωστόσο σύνολα, όπως λ.χ. το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$, το σύνορο του οποίου $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}$ ως προς την συνήθη τοπολογία.

Θεώρημα 1.1.6 *Σχετικά με το σύνορο συνόλου* E *τοπολογικού χώρου* $\mathcal{M}$ *ισχύουν οι ιδιότητες:*

1. $\partial E = \overline{E} - E^o$,
2. $\partial E \cap E^o = \emptyset$,
3. $\overline{E} = E^o \cup \partial E$,
4. $\mathcal{M} = E^o \cup (E^c)^o \cup \partial E$ *είναι ένωση ξένων συνόλων*

Απόδειξη: Η πρώτη προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα αφού $\overline{E} - E^o = \overline{E} - (\overline{E^c})^c = \overline{E} \cap (\overline{E^c})^{cc} = \overline{E} \cap \overline{E^c} = \partial E$. Τα υπόλοιπα είναι άμεσες συνέπειες της πρώτης ιδιότητας, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.1.2 *Οι επόμενες ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα.*

1. *Εάν το σύνολο* E *είναι ανοικτό* ($E^o = E$) *τότε* $E \cap \partial E = \emptyset$.
2. *Εάν το σύνολο* E *έχει κενό εσωτερικό* ($E^o = \emptyset$) *τότε* $\partial E = \overline{E}$.
3. *Το σύνολο* E *έχει κενό σύνορο* ($\partial E = \emptyset$) *τότε και μόνον τότε, όταν είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό* ($E^o = E = \overline{E}$).
4. *Εάν το σύνολο* E *έχει κενό σύνορο* ($\partial E = \emptyset$) *τότε ο χώρος γράφεται σαν ένωση δύο ξένων ανοικτών συνόλων* $\mathcal{M} = E^o \cup (E^c)^o$.

Ορισμός 1.1.6 *Οι επόμενοι ορισμοί κάτηγοριοποιούν τα σημεία της θήκης ενός συνόλου* E.

1. *Ένα σημείο* $x \in \mathcal{M}$ *του τοπολογικού χώρου* $\mathcal{M}$ *λέγεται* **σημείο συσσώρευσης του E**, *όταν κάθε ανοικτό* A *που περιέχει το* x *τέμνει το* E *σε σημεία διαφορετικά του* x. *Ισοδύναμα,* $x \in \overline{E - \{x\}}$.

2. *Ένα σημείο $x \in E$ λέγεται* **μεμενωμένο σημείο του** *E όταν υπάρχει ανοικτό $A \ni x$ έτσι ώστε το x να είναι το μοναδικό σημείο τομής $A \cap E = \{x\}$.*

3. *Ένα σύνολο $E \subset \mathcal{M}$ λέγεται* **διακριτό** *όταν κάθε σημείο του είναι μεμονωμένο.*

Σχόλιο-11 Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του E συμβολίζουμε με E'. Προφανώς $\overline{E} = E \cup E'$, όπου τα δύο σύνολα E και E' μπορεί να μην είναι ξένα. Λ.χ. στο ανοικτό διάστημα $E = (\alpha, \beta)$ του $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία, το E' είναι το αντίστοιχο κλειστό διάστημα: $E' = \overline{E} = [\alpha, \beta] \supset (\alpha, \beta) = E$. Προφανώς ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι διακριτό. Βλέπουμε επίσης εύκολα ότι αν ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι διακριτό τότε είναι αριθμήσιμο.

Εύκολα βλέπουμε ότι το E είναι κλειστό $E = \overline{E} \quad \Leftrightarrow \quad E' \subset E$.

Θεώρημα 1.1.7 *Έστω $\mathcal{N}$ υποσύνολο του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία ($\mathcal{T}_N = \{A \cap \mathcal{N}, A \in \mathcal{T}\}$). Ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες, όπου ο δείκτης $\mathcal{N}$ σημαίνει ότι η πράξη θεωρείται ως προς την $\mathcal{T}_N$:*

1. *Εάν $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ είναι βάση/υποβάση της $\mathcal{T}$, τότε η $\mathcal{B}_N = \{\mathcal{N} \cap B, B \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση/υποβάση της $\mathcal{T}_N$.*

2. *Το $B \subset \mathcal{N}$ είναι κλειστό ως προς $\mathcal{T}_N \quad \Leftrightarrow \quad B = \mathcal{N} \cap B_1$, όπου B_1 κλειστό του $\mathcal{M}$.*

3. *Για κάθε υποσύνολο $A \subset \mathcal{N}$ ισχύει $\overline{A}_N = \mathcal{N} \cap \overline{A}$ και $A'_N = \mathcal{N} \cap A'$.*

4. *Για κάθε υποσύνολο $A \subset \mathcal{N}$ ισχύει $A^o \cap \mathcal{N} \subset A^o_N$ και $\partial A_N \subset \partial A \cap \mathcal{N}$.*

Απόδειξη: Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες των ορισμών. Η πρώτη της (3) προκύπτει από το ότι το $\overline{A}_N$, βάσει της (2), είναι η τομή όλων των $\mathcal{N} \cap B_1$, όπου $B_1 \supset A$ κλειστό του $\mathcal{M}$. Η δεύτερη της (3) προκύπτει από το ότι $x \in A'_N$ σημαίνει ότι για κάθε περιοχή του $x : U_x = V_x \cap \mathcal{N}$ υπάρχει $A \cap U_x \ni x' \neq x$, που είναι ισοδύναμο με $A \cap V_x \ni x' \neq x$. Η πρώτη της (4) προκύπτει από το ότι το A^o_N είναι το μέγιστο ανοικτό που περιέχεται στο A. Η δεύτερη της (4) προκύπτει εύκολα από το ότι $\mathcal{N} - A \subset A^c$, ο.ε.δ.

Ορισμός 1.1.7 *Το υποσύνολο E του τοπολογικού χώρου $\mathcal{M}$ λέγεται:*

1. **Τέλειο** *όταν συμπίπτει με τα σημεία συσσώρευσής του $E' = E$.*

2. **Αραιό** *όταν το συμπλήρωμα της θήκης του $(\overline{E})^c$ είναι πυκνό, ισοδύναμα $(\overline{E})^o = \emptyset$.*

3. **1ης κατηγορίας** *όταν είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους αραιών υποσυνόλων.*

4. **2ης κατηγορίας** *ή* **μη-αραιό** *όταν δεν είναι 1-κατηγορίας.*

Σχόλιο-12 Ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ είναι τέλειο ως προς την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$. Ένα, κάπως περίεργο και διάσημο, *τέλειο* και ταυτόχρονα *αραιό*, άρα και 1ης κατηγορίας, υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο του Cantor, που θα ορίσουμε παρακάτω. Το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία είναι διακριτό, αραιό και 1ης κατηγορίας. Στον ίδιο χώρο το σύνολο των ρητών $E = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ έχει ως σημεία συσσώρευσης όλα τα σημεία του χώρου $E' = \mathbb{R}$ (είναι πυκνό), ωστόσο είναι 1ης κατηγορίας. Βλέπουμε εύκολα ότι κάθε υποσύνολο ενός συνόλου πρώτης κατηγορίας είναι επίσης σύνολο πρώτης κατηγορίας. Επίσης η ένωση αριθμησίμου πλήθους συνόλων πρώτης κατηγορίας είναι πάλι πρώτης κατηγορίας.

Σχόλιο-13 Ας θεωρήσουμε το σύνολο $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, στο $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία. Όλα τα σημεία του E εκτός του 0 είναι μεμονωμένα. Το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του E. Παρόμοια παραδείγματα μπορεί κανείς να κατασκευάσει με ακολουθίες $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ που συγκλίνουν σε σημείο x_0. Ακολουθίες που δεν συγκλίνουν μπορούν να μην έχουν κανένα σημείο συσσώρευσης ή να έχουν περισσότερα από ένα σημεία συσσώρευσης, όπως λ.χ. το σύνολο $\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, που έχει δύο σημεία συσσώρευσης. Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει γενικά γιά ένα σύνολο $E \subset \mathcal{M}$ του τοπολογικού χώρου $\mathcal{M}$:

$$E \text{ διακριτό} \quad \Leftrightarrow \quad E' \cap E = \emptyset.$$

Θεώρημα 1.1.8 *Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες με το ότι το υποσύνολο E του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι αραιό.*

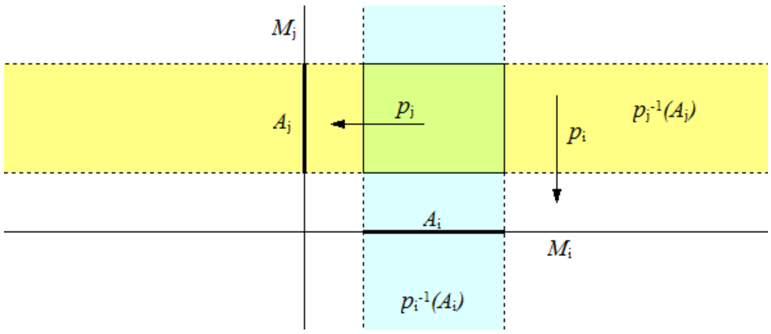
1. *Για κάθε ανοικτό A ισχύει $A \cap (\overline{E})^c \neq \emptyset$.*
2. $(\overline{E})^o = \emptyset$.
3. *Για κάθε ανοικτό A υπάρχει ανοικτό $A \supset B$ με $B \cap \overline{E} = \emptyset$.*
4. *Για κάθε ανοικτό A υπάρχει ανοικτό $A \supset B$ με $B \cap E = \emptyset$.*

Απόδειξη: Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι άμεση συνέπεια του ορισμού, κατά τον οποίο το $(\overline{E})^c$ είναι πυκνό. $(1) \Rightarrow (3)$ προκύπτει παίρνοντας σαν $B = A \cap (\overline{E})^c$. Οι $(3) \Rightarrow (1)$ και $(3) \Rightarrow (4)$ είναι προφανείς. Η $(4) \Rightarrow (3)$ προκύπτει εύκολα με εις άτοπο απαγωγή, ο.ε.δ.

Ορισμός 1.1.8 . *Η* **Τοπολογία γινόμενο** $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times ... \times \mathcal{T}_n$ *ορίζεται στο καρτεσιανό γινόμενο*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times ... \times \mathcal{M}_n$$

τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}_1, \mathcal{T}_1), ..., (\mathcal{M}_n, \mathcal{T}_n)$, χρησιμοποιώντας την έννοια της υποβάσης. Εάν



Σχήμα 1.1.3: Λωρίδες $\langle A_i \rangle = p_i^{-1}(A_i) = \mathcal{M}_1 \times ... \times A_i \times ... \times \mathcal{M}_n$

$$p_i : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times ... \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_i, \quad p_i(x_1, ..., x_n) = x_i$$

παριστάνει την προβολή του γινομένου στην i-συνιστώσα και $A_i \subset \mathcal{M}_i$ είναι ανοικτό του $\mathcal{M}_i$, ορίζουμε την **τοπολογία γινόμενο** *$\mathcal{T}$, ως την παραγόμενη από τα υποσύνολα του $\mathcal{M}$ της μορφής*

$$\langle A_i \rangle = p_i^{-1}(A_i) = \mathcal{M}_1 \times ... \times A_i \times ... \times \mathcal{M}_n, i = 1, 2, ..., n, \ A_i \in \mathcal{T}_i.$$

Σχόλιο-14 Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$, η συνήθης τοπολογία του συμπίπτει με την τοπολογία γινόμενο, που ορίζεται από την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$, με τον παραπάνω τρόπο. Πράγματι, τα στοιχεία της υποβάσης $p_i^{-1}(A_i)$ είναι $''$λωρίδες$''$ και η βαση της παραγόμενης τοπολογίας αποτελείται από πεπερασμένες τομές τέτοιων λωρίδων (σχήμα 1.1.3) που, μεταξύ άλλων, συμπεριλαμβάνουν τα $''$παραλληλόγραμμα$''$.

Σχήμα 1.1.4: Βάση από παραλληλόγραμμα Βάση από μπάλες

Για κάθε σημείο x μιας μπάλας του $\mathbb{R}^2$ μπορούμε να βρούμε ένα ανοικτό τέτοιο παραλληλόγραμμο που περιέχει το x και περιέχεται ολόκληρο στη μπάλα (σχήμα 1.1.4-I)και αντίστροφα. Για κάθε σημείο ε-νός τέτοιου παραλληλόγραμμου, μπορούμε να βρούμε μια μπάλα με κέντρο το x που περιέχεται ολόκληρη στο παραλληλόγραμμο (σχήμα 1.1.4-II). Αυτό δείχνει το ότι η τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ταυτίζεται με την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^2$. Το επιχείρημα μεταφέρεται αυτολεξί και στην περίπτωση του γινο-μένου $\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ και δείχνει ότι η τοπολογία γινόμενο ταυτίζεται, και σε αυτή την περίπτωση, με την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^n$. Σε αυτή την περίπτωση τα ″παραλληλόγραμμα″ πρέπει να αντικατασταθούν με ″παραλληλεπίπεδα″ της μορφής

$$p_1^{-1}(A_1) \cap p_2^{-1}(A_2) \cap ... \cap p_n^{-1}(A_n), \text{ όπου } A_i \text{ ανοικτά του } \mathcal{M}_i.$$

Τα παραλληλόγραμμα αυτά και γενικότερα τις τομές συνόλων της μορφής $\langle A_{i_k}\rangle = p_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) \in \mathcal{M}_{i_k}$ συμβολίζουμε με

$$\langle A_{i_1} \dots A_{i_k}\rangle = \langle A_{i_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle A_{i_k}\rangle.$$

Ας σημειώσουμε εδώ ότι ο ορισμός μας, προς το παρόν, περιλαμβάνει καρτεσιανά γινόμενα με πεπερασμένο πλήθος παραγόντων. Αργότερα (§6.4) θα γενικεύσουμε αυτό τον ορισμό και για γινόμενα ενός άπειρου πλήθους τοπολογικών χώρων.

Σχόλιο-15 Το καρτεσιανό γινόμενο είναι μια από τις διαδικασίες παραγωγής νέων τοπολογικών χώρων από άλλους δεδομένους. Σε κάθε τέτοια διαδικασία είναι σημαντικό να ξέρουμε πως συνδέονται οι διάφορες έννοιες των παραγομένων χώρων με τις αντίστοιχες των δεδομένων χώρων. Είδαμε λ.χ. στο προηγούμενο παράδειγμα ότι το γινόμενο ανοικτών είναι ανοικτό. Ισχύει επίσης ότι το γινόμενο κλειστών είναι κλειστό. Υπάρχουν ωστόσο ανοικτά και κλειστά, όπως οι μπάλες του $\mathbb{R}^n$ που δεν είναι γινόμενα ανοικτών ή κλειστών του $\mathbb{R}$. Το επόμενο θεώρημα εξετάζει κάποιες σχέσεις αυτού του είδους.

Θεώρημα 1.1.9 *Στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times ... \times \mathcal{M}_n$ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}_i, \mathcal{T}_i)$, εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο και για υποσύνολα $\{A_i \subset \mathcal{M}_i, i = 1, \dots, n\}$ ισχύουν οι ιδιότητες:*

1. $\overline{(\prod_i A_i)} = \prod_i \overline{A_i}$.
2. $(\prod_i A_i)^o = \prod_i (A_i^o)$.
3. $(\prod_i A_i)' = \cup_i (\overline{A_1} \times ... \times \overline{A_{i-1}} \times A_i' \times \overline{A_{i+1}} \times \cdots \times \overline{A_n})$.
4. $\partial(\prod_i A_i) = \cup_i (\overline{A_1} \times ... \times \overline{A_{i-1}} \times \partial A_i \times \overline{A_{i+1}} \times \cdots \times \overline{A_n})$.

Απόδειξη: Στο (1). Έστω $x = \{x_i\} \in \overline{\prod_i A_i} = \overline{A}$. Τότε κάθε περιοχή $\langle U_i\rangle = p_i^{-1}(U_i)$ του x με $p_i(x) = x_i \in U_i$ θα τέμνει το A, άρα και το U_i θα τέμνει το A_i. Αυτό δείχνει ότι το $x_i \in \overline{A_i}$.

Αντίστροφα, αν για κάθε i το $x_i \in \overline{A_i}$, τότε το $x = \{x_i\} \in \overline{\prod_i A_i} = \overline{A}$, διότι κάθε περιοχή $\langle U_1 \dots U_n\rangle$ που περιέχει το x θα τέμνει το A.

Στο (2). Η $(\prod_i A_i)^o \supset \prod_i (A_i^o)$ είναι προφανής αφού στην δεξιά πλευρά έχουμε ανοικτό και στην αριστερή είναι το μέγιστο ανοικτό περιεχόμενο στο $A = \prod_i A_i$.

Αντίστροφα, $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\prod_i A_i)^o$ σημαίνει ότι υπάρχει περιοχή του x της μορφής $\langle U_1 \dots U_n\rangle \subset A$, που συνεπάγεται ότι $x_i \in U_i \subset A_i$, δηλαδή $x_i \in A_i^o$.

Στο (3). Η $\supset$ είναι προφανής. Όμως και η $\subset$ δεν είναι δυσκολότερη, αφού $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\prod_i A_i)' = A'$ σημαίνει ότι κάθε περιοχή του x της μορφής $\langle U_1 \dots U_n\rangle$ θα τέμνει το A σε σημείο διαφορετικό του x. Αυτό συνεπάγεται ότι $x_i \in A_i'$ για ένα τουλάχιστον i και αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Το (4). Παρόμοια με το (3), ο.ε.δ.

Παράδειγμα-10. Το **Σύνολο του Cantor** ορίζεται χρησιμοποιώντας την τριαδική γραφή ενός αριθμού $x \in [0,1]$. Πράγματι κάθε αριθμός $x \in [0,1]$ γράφεται σαν σειρά δυνάμεων του 3

$$x = x_1\frac{1}{3} + x_2\frac{1}{3^2} + x_3\frac{1}{3^3} + ... \text{ όπου } x_1, x_2, x_3, ... \in \{0,1,2\}.$$

Το σύνολο του Cantor ορίζεται ώς εκείνο το υποσύνολο $\mathcal{C}$ των $x \in [0,1]$, των οποίων η παράσταση με τον παραπάνω τρόπο έχει $x_i \neq 1$ για κάθε $i = 1, 2, ...$. Αποδεικνύεται ([Sag91, σ. 71]) ότι, γεωμετρικά το σύνολο αυτό περιγράφεται με την εξής διαδικασία:
Από το διάστημα

$$B_0 = [0,1]$$

αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό τρίτο διάστημα

$$A_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Από τα διαστήματα που απομένουν
$$B_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$
αφαιρούμε πάλι το μεσαίο τρίτο, δηλαδή τα
$$A_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right).$$
Συνεχίζουμε κατ' αυτόν τον τρόπο με το σύνολο που απομένει
$$B_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$
αφαιρώντας το μεσαίο τρίτο του κάθε διαστήματος. Συνεχίζουμε επ' άπειρον σχηματίζοντας δύο ακολουθίες συνόλων

A_i ακολουθία ανοικτών που αφαιρούμε $i = 1, 2, ...$

Το συνολικό μήκος των διαστημάτων που αφαιρούμε είναι (συμβολίζοντας με $|A_i|$ το αντίστοιχο άθροισμα μηκών διαστημάτων)
$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + ... = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + ... = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{2^k}{3^k} = 1.$$
Η ακολουθία των κλειστών B_i που απομένουν σε κάθε βήμα έχει συνολικό μήκος
$$|B_0| = 1, |B_1| = \frac{2}{3}, |B_2| = \frac{2^2}{3^2}, ..., |B_n| = \frac{2^n}{3^n} \longrightarrow 0.$$
Το σύνολο του Cantor ταυτίζεται με το κλειστό (ως τομή κλειστών συνόλων)
$$\mathcal{C} = \bigcap_0^\infty B_i.$$

Θεώρημα 1.1.10 *Το σύνολο του Cantor $\mathcal{C}$ έχει, μεταξύ άλλων, τις ιδιότητες:*

1. *Είναι ένα μη κενό και μάλιστα υπεραριθμήσιμο σύνολο.*
2. *Έχει κενό εσωτερικό $\mathcal{C}^o = \emptyset$.*
3. *Είναι τέλειο $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$.*
4. *Το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό και πυκνό στο $[0, 1]$.*

Απόδειξη: Το ότι είναι μη κενό είναι προφανές, αφού λ.χ. το $\frac{1}{3} \in \mathcal{C}$ που γράφεται ως
$$\frac{1}{3} = 0\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^2} + 2\frac{1}{3^3} + 2\frac{1}{3^4} + ... + 2\frac{1}{3^n} + ...$$

Το ότι είναι υπεραριθμήσιμο στηρίζεται στην αντίστοιχη ιδιότητα του διαστήματος $I = [0, 1]$, που αποδεικνύεται στον απειροστικό λογισμό ([Σπί04, σελ. 372]). Κατασκευάζεται πράγματι μια επίρριψη του $\mathcal{C}$ στο I
$$\phi(x_1\frac{1}{3} + x_2\frac{1}{3^2} + x_3\frac{1}{3^3} + ...) = (x_1/2)\frac{1}{2} + (x_2/2)\frac{1}{2^2} + (x_3/2)\frac{1}{2^3} + ...$$
που παριστάνει ένα αριθμό του $[0, 1]$ στο δυαδικό σύστημα. Το ότι αυτή είναι επίρριψη και όχι ισομορφισμός προκύπτει από το ότι κάθε αριθμός $x \in [0, 1]$ έχει μία ή δύο παραστάσεις σε αυτό το σύστημα. Π.χ. το $\frac{2}{3} = 0.101010101...$ δεν έχει δεύτερη παράσταση στο σύστημα, ενώ το $\frac{1}{2} = 0.1 = 0.011111111....$ Αντίθετα, η παράσταση ενός αριθμού x από το σύνολο του Cantor στο τριαδικό σύστημα με ψηφία από το $\{0, 2\}$ είναι μοναδική.

Το ότι έχει κενό εσωτερικό ($\mathcal{C}^o = \emptyset$) έπεται από το ότι το $\mathcal{C}$ δεν μπορεί να περιέχει καποιο διάστημα (α, β) μήκους $\lambda = \beta - \alpha > 0$. Πράγματι, αν ένα τέτοιο διάστημα περιεχόταν στο $\mathcal{C}$, τότε θα περιεχόταν σε κάθε B_i το μήκος των οποίων τείνει στο μηδέν, άρα κάποτε θα γίνει μικρότερο του λ, πράγμα άτοπον.

Το ότι είναι τέλειο προκύπτει από το ότι κάθε ανοικτό διάστημα $I = (x - \frac{\lambda}{2}, x + \frac{\lambda}{2})$ μήκους $|I| = \lambda$ που περιέχει ένα $x \in \mathcal{C}$ θα περιέχει καί ένα άλλο $x' \neq x$. Πράγματι αρκεί να πάρουμε ένα από τα B_n με μήκος $|B_n| < \lambda/2$. Το x θα ανήκει σε κάποιο $I_{n,k}$ από τα διαστήματα του B_n και συνεπώς όλο αυτό το διάστημα θα περιέχεται στο I.

Το ότι το $[0, 1] - \mathcal{C}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$, δηλαδή ότι κάθε περιοχή ενός σημείου $x \in [0, 1]$ τέμνει το $[0, 1] - \mathcal{C}$ έπεται από το επιχείρημα της απόδειξης του (2), κατά το οποίο το $\mathcal{C}$ δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα. Συνάγεται ότι κάθε ανοικτό διάστημα που τέμνει το $[0, 1]$ θα περιέχει σημεία του $[0, 1]-\mathcal{C}$, ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1.1.1 *Έστω $\mathcal{M}$ σύνολο απείρου πλήθους στοιχείων. Δείξε ότι το*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathcal{M} : A^c \text{ πεπερασμένο } \}$$

ικανοποιεί τα αξιώματα της τοπολογίας.

Άσκηση 1.1.2 *Δείξε ότι μια τοπολογία είναι διακριτή, αν και μόνον αν, κάθε μονοσύνολο είναι ανοικτό.*

Άσκηση 1.1.3 *Δείξε ότι το υποσύνολο A του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι ανοικτό, αν και μόνον αν, $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}$ για κάθε υποσύνολο B του $\mathcal{M}$.*

Άσκηση 1.1.4 *Δείξε τους επόμενους τύπους: (1) $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A)$, (2) $\partial(A^o) \subset \partial A$, (3) $(A - B)^o \subset A^o - B^o$.*

Άσκηση 1.1.5 *Δείξε ότι αν A, B είναι πυκνά υποσύνολα του χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, τότε και το $A \cap B$ είναι πυκνό του $\mathcal{M}$.*

Άσκηση 1.1.6 *Δείξε ότι ο αριθμός $x = \frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κάποιου από τα διαστήματα, που η τομή τους ορίζει το σύνολο $\mathcal{C}$ του Cantor (παράδειγμα 10), όμως ανήκει στο $\mathcal{C}$.*

Άσκηση 1.1.7 *Δείξε ότι η τομή δύο ανοικτών πυκνών υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι πυκνό σύνολο. Δείξε ότι αυτό δεν ισχύει για δύο μή-ανοικτά πυκνά υποσύνολα.*

Άσκηση 1.1.8 *Δείξε ότι το σύνορο ∂B ενός κλειστού ή ενός ανοικτού συνόλου B είναι αραιό σύνολο.*

Άσκηση 1.1.9 *Δείξε ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα πυκνό και αραιό.*

Άσκηση 1.1.10 *Δείξε ότι το συμπλήρωμα του γραφήματος $G_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ μιας συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αραιό σύνολο του $\mathbb{R}^2$.*

Άσκηση 1.1.11 *Δείξε ότι το συμπλήρωμα $[0, 1] - \mathcal{C}$ του συνόλου του Cantor είναι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών ξένων διαστημάτων.*

Άσκηση 1.1.12 *Έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, το $B_n \subset [n, n + 1]$ είναι κλειστό. Δείξε ότι το $\cup_{i \in \mathbb{Z}} B_i$ είναι κλειστό.*

1.2 Συνεχείς απεικονίσεις

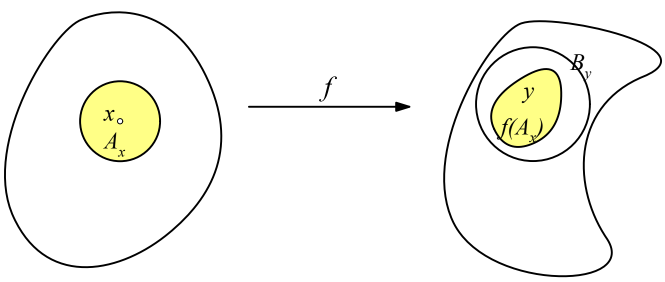
Ορισμός 1.2.1 *Έστω $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ μια απεικόνιση μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$*

1. *Η f λέγεται* **συνεχής** *όταν η προεικόνα $A = f^{-1}(A')$ ενός ανοικτού $A' \in \mathcal{T}'$ είναι ανοικτό $A \in \mathcal{T}$ του $\mathcal{M}$.*
2. *Μια συνεχής απεικόνιση που αντιστρέφεται και η αντίστροφός της $f^{-1} : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ είναι επίσης συνεχής λέγεται* **ομοιομορφισμός των τοπολογικών χώρων**.
3. *Δύο τοπολογικοί χώροι, για τους οποίους υπάρχει ομοιομορφισμός που απεικονίζει τον ένα στον άλλο, λέγονται* **ομοιόμορφοι**.
4. *Μια ιδιότητα $\mathcal{I}$ τοπολογικών χώρων λέγεται* **τοπολογική αναλλοίωτος** *όταν διατηρείται κάτω από ομοιομορφισμούς, με την έννοια ότι αν ισχύει για τον $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και η f είναι ομοιομορφισμός αυτού στον $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$, τότε θα ισχύει και για τον $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$.*
5. *Η f λέγεται* **τοπικός ομοιομορφισμός**, *όταν για κάθε σημείο $x \in \mathcal{M}$ υπάρχουν ανοικτές περιοχές U_x, V_y, όπου $y = f(x)$ έτσι ώστε ο περιορισμός της f*
$$f\,\Big|_{U_x} : U_x \longrightarrow V_y,$$
να είναι ομοιομορφισμός.

Θεώρημα 1.2.1 *Η $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ είναι συνεχής αν γιά κάθε ανοικτό B' μιάς βάσης/υποβάσης του $\mathcal{M}'$ το $A = f^{-1}(B')$ είναι ανοικτό του $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς. Κάθε ανοικτό A' του $\mathcal{M}$' γράφεται ως ένωση $A' = \cup_{i \in I} B'_i$ κάποιων στοιχείων μιάς βάσης και
$$f^{-1}(A') = f^{-1}(\cup_{i \in I} B'_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(B'_i),$$
που, σύμφωνα με την υπόθεση είναι ανοικτό, ως ένωση ανοικτών συνόλων. Ανάλογη είναι η απόδειξη και για μιά υποβάση, ο.ε.δ.

Θεώρημα 1.2.2 *Η $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ είναι συνεχής αν και μόνον αν,*
$$\forall\, x \in \mathcal{M} \text{ και } \forall\, B_y \text{ περιοχή του } y = f(x),\ \exists \text{ περιοχή } A_x \text{ του } x \text{ έτσι ώστε } f(A_x) \subset B_y$$
.



Σχήμα 1.2.5: Συνεχής απεικόνιση

Απόδειξη: Πράγματι, αν η f είναι συνεχής και B_y είναι περιοχή του y τότε το $A_x = f^{-1}(B_y)$ είναι ανοικτή περιοχή του x και ισχύει
$$f(A_x) = f(f^{-1}(B_y)) = B_y.$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η συνθήκη και $B \in \mathcal{T}'$ είναι ανοικτό του $\mathcal{M}'$ τότε το $A = f^{-1}(B)$ θα είναι ανοικτό του $\mathcal{M}$. Τούτο διότι, αν $x \in A$ με $y = f(x) \in B$, σύμφωνα με την υπόθεση, θα υπάρχει περιοχή A_x του x με $f(A_x) \subset B$, θεωρώντας το B ως περιοχή του y. Αυτό όμως σημαίνει ότι $A_x \subset f^{-1}(B) = A$, άρα το A γράφεται ως ένωση τέτοιων ανοικτών $A = \cup_{x\in A} A_x$ και επομένως είναι ανοικτό, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Το θεώρημα γενικεύει τον ορισμό της συνέχειας συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που συναντάμε στον απειροστικό λογισμό ([Σπί04, σελ.92]). Εκεί μία συνάρτηση από ένα διάστημα $I = (\alpha, \beta)$ σε ένα άλλο $I' = (\alpha', \beta')$ λέγεται συνεχής αν γιά κάθε $x \in I$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δ (γράφουμε $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ γιά να τονίσουμε την εξάρτηση αυτού του δ από την επιλογή των x και ε) έτσι ώστε

$$f((x-\delta, x+\delta)) \subset (y-\varepsilon, y+\varepsilon), \quad \text{όπου} \;\; y = f(x).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με το ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B_\varepsilon(y))$ του ανοικτού διαστήματος $B_\varepsilon(y) = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ (μπάλας) του $\mathbb{R}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του I. Έτσι, οι συνεχείς συναρτήσεις βάσει του ορισμού του απειροστικού λογισμού είναι και συνεχείς βάσει του γενικότερου ορισμού που δίνουμε εδώ και τούμπαλιν.

Γιά τις συναρτήσεις που ικανοποιούν την συνθήκη του θεωρήματος λέμε ότι είναι **συνεχείς στο σημείο x**. Το θεώρημα μπορεί τότε να διατυπωθεί και με τον επόμενο τρόπο, που φανερώνει ότι η συνέχεια είναι μιά **τοπική** ιδιότητα και η συνεχής συνάρτηση, όπως την ορίσαμε, έχει αυτή την ιδιότητα σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Θεώρημα 1.2.3 *Μιά συνάρτηση f μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ είναι συνεχής, τότε και μόνον τότε, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in \mathcal{M}$.*

Παραδείγματα

1. **Η ταυτοτική** Η ταυτοτική απεικόνιση $id(x) = x$ ορίζεται σε κάθε τοπολογικό χώρο και είναι συνεχής. Ωστόσο, αν θεωρήσουμε αυτή την απεικόνιση ως προς δύο διαφορετικές τοπολογίες του ίδιου συνόλου $\mathcal{M}$, τότε μπορεί να μην είναι συνεχής. Η συνέχεια της ταυτοτικής $id : (\mathcal{M}, \mathcal{T}) \to (\mathcal{M}, \mathcal{T}')$ συνεπάγεται ότι $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

2. **Οι προβολές**. Οι προβολές της τοπολογίας γινόμενο στους παράγοντες του γινομένου

$$p_i : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times ... \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_i, \quad p_i(x_1, ..., x_n) = x_i$$

είναι συνεχείς απεικονίσεις. Τούτο οφείλεται στο ότι, εξ ορισμού, το υποσύνολο $p_i^{-1}(A_i)$ είναι ανοικτό, γιά κάθε ανοικτό $A_i \subset \mathcal{M}_i$.

3. **Συναρτήσεις του Lipschitz** Τον γενικό ορισμό αυτών των συναρτήσεων θα γνωρίσουμε αργότερα, στους μετρικούς χώρους. Στην απλούστερη περίπτωση πρόκειται για συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ για τις οποίες υπάρχει σταθερά K έτσι ώστε να ικανοποιούν την **ανισότητα Lipschitz**:

$$||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y||, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Τέτοια, λ.χ. είναι η συνάρτηση του μήκους διανύσματος $f(x) = ||x||$, που ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz με $K = 1$

$$|\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x - y||.$$

Οι συναρτήσεις αυτού του τύπου είναι συνεχείς, αφού γιά κάθε περιοχή $B_\varepsilon(y)$ του $y = f(x)$ η περιοχή $B_{\frac{\varepsilon}{K}}(x)$ του x απεικονίζεται, λόγω της ανισότητας Lipschitz:

$$\begin{aligned} f(B_{\frac{\varepsilon}{K}}(x)) &\subset B_\varepsilon(y) \quad \text{καθώς } x' \in B_{\frac{\varepsilon}{K}}(x) \Rightarrow \\ ||f(x') - f(x)|| &\leq K||x' - x|| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Μεταξύ άλλων, τέτοιες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ορίζονται από τα πρωτοβάθμια πολυώνυμα $y = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m + b$, που ικανοποιούν την ανισότητα Lipschitz με $K = |a_1| + ... + |a_m|$:

$$\begin{aligned} |y' - y| &= |a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m + b \\ &\qquad -(a_1x'_1 + a_2x_2 + ... + a_mx'_m + b)| \\ &\leq |a_1| \cdot |x'_1 - x_1| + ... + |a_m| \cdot |x'_m - x_m| \\ &\leq (|a_1| + ... + |a_m|) \cdot ||x' - x||. \end{aligned}$$

4. **Η πρόσθεση/αφαίρεση** Η συνάρτηση της πρόσθεσης/αφαίρεσης $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x+y$ ή $=(x-y)$ είναι συνεχής, ως ειδική περίπτωση του προηγουμένου παραδείγματος.

5. **Οι συναρτήσεις** $y = \text{ημ}(x), y = \text{συν}(x)$. Η συνάρτηση $y = \text{ημ}(x)$ (και ανάλογα η $y = \text{συν}(x)$) είναι συνεχής διότι ικανοποιεί την ανισότητα Lipschitz με $K = 1$

$$\begin{aligned} |\,\text{ημ}(x) - \text{ημ}(y)| &= |2\,\text{συν}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{ημ}\left(\frac{x-y}{2}\right)| \\ &\le 2|\,\text{ημ}\left(\frac{x-y}{2}\right)| < |x-y|, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισχύει λόγω της

$$|\,\text{ημ}(x)| \le |x|, \quad \text{που ισχύει γιά κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θεώρημα 1.2.4 *Η σύνθεση $g \circ f$ δύο συνεχών απεικονίσεων $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ και $g : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}''$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $g \circ f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}''$.*

Απόδειξη: Απλούστατη εφαρμογή των ορισμών. Αν $\Gamma \subset \mathcal{M}''$ είναι ανοικτό, τότε, λόγω της συνέχειας της g, το $B = g^{-1}(\Gamma)$ θα είναι ανοικτό του $\mathcal{M}'$ και λόγω της συνέχειας της f το

$$A = f^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(\Gamma)) = (g \circ f)^{-1}(\Gamma)$$

θα είναι ανοικτό του $\mathcal{M}$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 1.2.5 *Μία απεικόνιση $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}' = \mathcal{M}_1 \times ... \times \mathcal{M}_n$ ενός τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στο καρτεσιανό γινόμενο τοπολογικών χώρων, εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο, είναι συνεχής, αν και μόνον αν, γιά κάθε $i = 1, ..., n$ η αντίστοιχη σύνθεση $f_i = p_i \circ f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_i$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Πράγματι, αν η f είναι συνεχής, τότε και η σύνθεση $f_i = p_i \circ f$, μέ την συνεχή p_i (παράδειγμα 2) θα είναι συνεχής. Αντίστροφα, αν κάθε $f_i = p_i \circ f$ είναι συνεχής, τότε, γιά κάθε i και κάθε ανοικτό $A_i \subset \mathcal{M}_i$, το $f_i^{-1}(A_i) = f^{-1}(p_i^{-1}(A_i))$ θα είναι ανοικτο του $\mathcal{M}$. Όμως τα υποσύνολα του $\mathcal{M}'$

$$p_i^{-1}(A_i),\ i = 1, ..., n,\ A_i \in \mathcal{T}_i,$$

αποτελούν, εξ ορισμού, υποβάση της τοπολογίας του $\mathcal{M}'$ (Θεώρημα 1.2.1), ο.ε.δ.

Θεώρημα 1.2.6 *Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες με την συνέχεια της απεικόνισης $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$.*

1. *Γιά κάθε κλειστό B' του $\mathcal{M}'$ το $B = f^{-1}(B')$ είναι κλειστό του $\mathcal{M}$.*
2. *Γιά κάθε υποσύνολο $A \subset \mathcal{M}$ ισχύει $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
3. *Γιά κάθε υποσύνολο $B \subset \mathcal{M}'$ ισχύει $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

Απόδειξη: Αν το $B' \subset \mathcal{M}'$ είναι κλειστό, τότε το $A' = B'^c$ είναι ανοικτό και συνεπώς και το

$$A = f^{-1}(A') = f^{-1}(B'^c) = (f^{-1}(B'))^c$$

είναι ανοικτό, που σημαίνει ότι το $B = f^{-1}(B')$ είναι κλειστό του $\mathcal{M}$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το αντίστροφο, δηλαδή, ότι αν γιά κάθε κλειστό $B' \subset \mathcal{M}'$ το $f^{-1}(B')$ είναι κλειστό, τότε η απεικόνιση είναι συνεχής.

Γιά τις υπόλοιπες ισοδυναμίες δείχνουμε ότι: (συνέχεια της f) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). (συνέχεια της f) $\Rightarrow$ (2).
Έστω $x \in \overline{A}$. Τότε γιά κάθε περιοχή U_x του x θα ισχύει

$$\begin{aligned}
U_x \cap A &\neq \emptyset. \\
\text{Αν λοιπόν } y &= f(x) \text{ και } V_y \text{ περιοχή του } y \Rightarrow \\
\text{υπάρχει περιοχή } U_x &: f(U_x) \subset V_y \Rightarrow \\
\text{επειδή } U_x \cap A &\neq \emptyset \Rightarrow f(U_x) \cap f(A) \neq \emptyset \Rightarrow \\
V_y \cap f(A) &\neq \emptyset \Rightarrow y \in \overline{f(A)}.
\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Έστω $A = f^{-1}(B)$. Συνάγεται

$$\begin{aligned}
A = f^{-1}(B) &\Rightarrow \text{(υπόθεση) } f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B} \\
&\Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}(\overline{B}).
\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Έστω $B \subset \mathcal{M}$ κλειστό. Συνάγεται

$$\begin{aligned}
&\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B) \text{ (υπόθεση) } \Rightarrow \\
&\text{κλειστό, καθώς ισχύει πάντοτε και } f^{-1}(B) \subset \overline{f{-1}(B)}, \qquad \text{ο.ε.δ.}
\end{aligned}$$

Θεώρημα 1.2.7 *Εάν $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ είναι υποσύνολο τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία, τότε η απεικόνιση $i_N : \mathcal{N} \to \mathcal{M},\ i_N(x) = x$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από τον ορισμό της σχετικής τοπολογίας του $\mathcal{N}$, κατά τον οποίον τα ανοικτά του είναι τομές του $\mathcal{N}$ με ανοικτά του $\mathcal{M}$. Έτσι, αν $A \subset \mathcal{M}$ είναι ανοικτό, τότε το $(i_N)^{-1}(A) = A \cap \mathcal{N}$ είναι ανοικτό του $\mathcal{N}$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 1.2.8 *Έστω f συνεχής απεικόνιση του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στον $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ και το $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ καθώς και τα $f(\mathcal{N}) \subset \mathcal{M}', f(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}'$, εφοδιασμένα, καθένα, με την αντίστοιχη σχετική τοπολογία. Τότε, μέσω της f ορίζονται οι απεικονίσεις*

1. *Η απεικόνιση $f_1 : \mathcal{N} \to \mathcal{M}'$ είναι συνεχής.*
2. *Η απεικόνιση $f_2 : \mathcal{M} \to f(\mathcal{M})$ είναι συνεχής.*
3. *Η απεικόνιση $f_3 : \mathcal{N} \to f(\mathcal{N})$ είναι συνεχής, αν τα $\mathcal{N}, f^{-1}(f(\mathcal{N}))$ είναι ανοικτά/κλειστά.*

Απόδειξη: Η πρώτη είναι σύνθεση $f_1 = f \circ i_N$ δύο συνεχών απεικονίσεων άρα συνεχής. Για την δεύτερη θεωρούμε ένα ανοικτό A του $f(\mathcal{M})$ που είναι τομή $A = f(\mathcal{M}) \cap A'$ με ανοικτό A' του $\mathcal{M}$'. Τότε

$$\begin{aligned}
f_2^{-1}(A) &= f^{-1}(f(\mathcal{M}) \cap A') = f^{-1}(f(\mathcal{M})) \cap f^{-1}(A') \\
&= \mathcal{M} \cap f^{-1}(A') = f^{-1}(A')
\end{aligned}$$

και το τελευταίο είναι ανοικτό του $\mathcal{M}$ λόγω της συνέχειας της f. Γιά την τρίτη περίπτωση ας υποθέσουμε ότι τα $\mathcal{N}$ και $f^{-1}(f(\mathcal{N}))$ είναι είναι ανοικτά. Τότε ισχύει, ότι ένα ανοικτό A του $f(\mathcal{N})$ είναι τομή $A = f(\mathcal{N}) \cap A'$ με ανοικτό A' του $\mathcal{M}$'. Τότε πάλι

$$f_3^{-1}(A) = \mathcal{N} \cap f^{-1}(f(\mathcal{N}) \cap A') = \mathcal{N} \cap (f^{-1}(f(\mathcal{N})) \cap f^{-1}(A')).$$

Λόγω της συνέχειας της f το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό. Εάν υποθέσουμε ότι τα $\mathcal{N}$ και $f^{-1}(f(\mathcal{N}))$ είναι κλειστά, τότε αποδεικνύουμε την συνέχεια της f_3 όπως και προηγουμένως, παίρνοντας το A ως κλειστό του $f(\mathcal{N})$ και αποδεικνύοντας με τον ίδιο τρόπο ότι το $f_3^{-1}(A)$ είναι κλειστό του $\mathcal{N}$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.2.1 *Μια συνάρτηση f μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ για την οποία ισχύουν και οι τρεις επόμενες ιδιότητες είναι συνεχής.*

1. *Υπάρχει οικογένεια ανοικτών συνόλων $\{A_i, i \in I\} \subset \mathcal{T}$, που καλύπτουν το $\mathcal{M}$, δηλαδή η ένωση $\cup_{i \in I} A_i = \mathcal{M}$.*

2. *Ο περιορισμός $f|A_i : A_i \to f(A_i)$ είναι συνεχής γιά κάθε $i \in I$.*
3. *Τα $f^{-1}(f(A_i))$ είναι ανοικτά γιά κάθε $i \in I$.*

Παραδείγματα

6. **Η συνάρτηση** $y = x^2$. Η συνάρτηση αυτή $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως προς την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$. Για την απόδειξη μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο πόρισμα χρησιμοποιώντας τα ανοικτά σύνολα $A_n = (-n, n)$ του $\mathbb{R}$. Σε κάθε τέτοιο διάστημα η συνάρτησή μας είναι Lipschitz άρα συνεχής, λόγω της
$$|(x')^2 - x^2| = |x' - x||x' + x| \leq 2n|x' - x|.$$
Το παράδειγμα γενικεύεται για τις συναρτήσεις $f(x) = x^k, k > 2$, βάσει της αντίστοιχης ανισότητας
$$\begin{aligned} |(x')^k - x^k| &= |x' - x||(x')^{k-1} + (x')^{k-2}x + ... + x^{k-1}| \\ &\leq k \cdot n^{k-1} \cdot |x' - x|. \end{aligned}$$

7. **Το γινόμενο** $z = xy$. Η συνάρτηση αυτή $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως προς τις συνήθεις τοπολογίες των δύο χώρων. Μιά απόδειξη μπορεί να γίνει άμεσα με την βοήθεια του θεωρήματος 1.2.2. Μιά άλλη μπορεί να γίνει βάσει της ισότητας
$$xy = \frac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right),$$
που παριστάνει την συνάρτηση σαν σύνθεση συναρτήσεων, που, βάσει των προηγουμένων παραδειγμάτων, είναι συνεχείς.

8. **Πολυωνυμικές συναρτήσεις**. Αυτές είναι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της μορφής
$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$
που γράφονται σαν συνθέσεις συναρτήσεων, που κατά τα προηγούμενα παραδείγματα είναι συνεχείς.

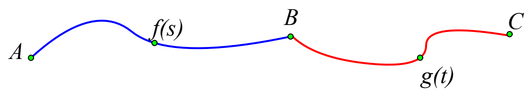
9. **Πολυωνυμικές συναρτήσεις** n **μεταβλητών**. Για συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, εφαρμόζοντας την συνέχεια των $x \pm y$ και την ταυτότητα του παραδείγματος (7) έχουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι συνεχής. Χρησιμοποιώντας την συνέχεια αυτών των συναρτήσεων κατ' επανάληψη δείχνουμε ότι οι **πολυωνυμικές συναρτήσεις** n **μεταβλητών**
$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$
είναι συνεχείς απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

10. **Η συνάρτηση** $y = \frac{1}{x}$. Η συνάρτηση αυτή $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ είναι συνεχής ως προς την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$. Για την απόδειξη μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο πόρισμα χρησιμοποιώντας τα ανοικτά σύνολα $(\frac{1}{n}, n)$ και $(-n, -\frac{1}{n})$, για $n \in \mathbb{N}$ του $\mathbb{R}$. Σε κάθε τέτοιο διάστημα, λ.χ. το $(\frac{1}{n}, n)$, η συνάρτησή μας είναι Lipschitz άρα συνεχής, λόγω της
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|xy|} \leq n^2|x - y|.$$

11. **Μιγαδικές πολυωνυμικές συναρτήσεις**. Αυτές είναι συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ της μορφής
$$\begin{gathered} w = f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \\ \text{όπου} \;\; a_n, \ldots, a_0, z, w \in \mathbb{C}, \end{gathered}$$
που, κατ' αναλογία προς τις πραγματικές αποδεικνύονται, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ότι είναι συνεχείς.

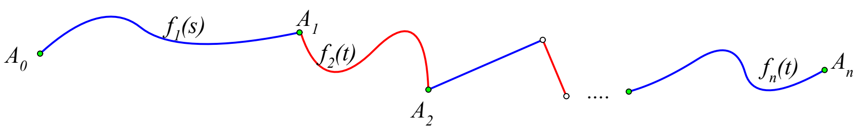
12. **Ρητές συναρτήσεις**. Αυτές είναι συναρτήσεις πραγματικές ή μιγαδικές, που γράφονται σαν πηλίκα δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, οι απλούστερες μιγαδικές ρητές συναρτήσεις είναι οι λεγόμενες απεικονίσεις του Moebius $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ της μορφής
$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{για} \quad a, b, c, d, z \in \mathbb{C} \text{ και } ad - bc \neq 0,$$
που ορίζονται για κάθε μιγαδικό αριθμό εκτός του $z = -d/c$. Γενικότερα μια μιγαδική ρητή συνάρτηση είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων **πρώτων μεταξύ τους**, δηλαδή της μορφής
$$f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_m(z)},$$
όπου $P_k(z), Q_m(z)$ είναι μιγαδικά πολυώνυμα αντιστοίχων βαθμών $k \leq m$, που δέν έχουν κοινή ρίζα, δηλαδή δεν υπάρχει μιγαδικός z_0 έτσι ώστε $P_k(z_0) = 0$ και ταυτόχρονα $Q_m(z_0) = 0$. Για τις συναρτήσεις αυτές θεωρούμε ότι ορίζονται για κάθε μιγαδικό αριθμό, διαφορετικό από μία ρίζα του παρονομαστή $Q_m(z)$.

13. **Καμπύλες**. Αυτές είναι συνεχείς απεικονίσεις του $\mathbb{R}$ ή ενός διαστήματος $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ σε ένα τοπολογικό χώρο $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$. Ειδικές περιπτώσεις είναι τα ευθύγραμμα τμήματα AB μεταξύ δύο σημείων A, B του επιπέδου (και γενικότερα μεταξύ δύο σημείων ενός διανυσματικού χώρου). Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να θεωρηθεί ως εικόνα $AB = f([0, 1])$ του διαστήματος $[0, 1]$ μέσω της απεικόνισης.
$$f(t) = (1 - t)\,A + t\,B.$$
Συχνά χρησιμοποιούμε τον όρο *καμπύλη* εννοώντας την εικόνα $f([0, 1]) \subset \mathcal{M}$ της f στον χώρο $\mathcal{M}$. Για την ίδια την f χρησιμοποιούμε τότε τον όρο **παραμέτριση** της καμπύλης. Με αυτή την έννοια είναι εύκολο να δούμε ότι η ίδια καμπύλη μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές παραμετρίσεις. Μία συνεχής καμπύλη $f : [0, 1] \to \mathcal{M}$ από το $A = f(0)$ στο $B = f(1)$ και μια άλλη συνεχής καμπύλη $g : [0, 1] \to \mathcal{M}$ από το $B = g(0)$ στο $C = g(1)$, ορίζουν μια τρίτη **σύνθετη** καμπύλη $h = g * f$



Σχήμα 1.2.6: Σύνθετη καμπύλη $h = f * g$

από το A στο C, που ορίζεται τμηματικά
$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
και είναι επίσης συνεχής $h : [0, 1] \to \mathcal{M}$.



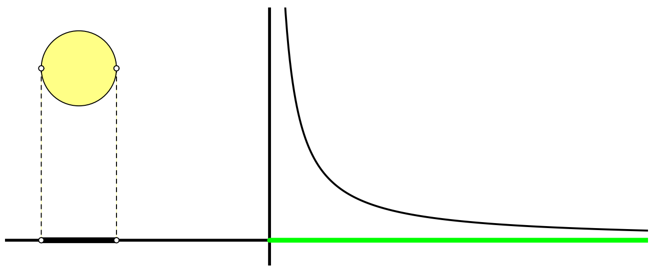
Σχήμα 1.2.7: Σύνθετη καμπύλη $h = f_1 * \cdots * f_n$

Εφαρμόζοντας αυτή την κατασκευή διαδοχικά n φορές, βλέπουμε ότι η σύνθεση $h = f_1 * \cdots * f_n$ n διαφορετικών καμπυλών είναι μια συνεχής καμπύλη του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ (σχήμα 1.2.7). Ειδικά, κάθε **πολυγωνική ή τεθλασμένη γραμμή** (όπου όλες οι f_i παριστάνουν ευθύγραμμα τμήματα), είναι μια συνεχής καμπύλη. Ένα ιδιαίτερο είδος καμπυλών είναι τέλος αυτό που ορίζεται μέσω του γραφήματος μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
$$g(t) = (t, f(t)), \; t \in [a, b].$$
Η συνέχεια της g προκύπτει από αυτήν της f εφαρμόζοντας το θεώρημα 1.2.5.

Ορισμός 1.2.2 *Μιά απεικόνιση f του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στον $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ λέγεται* **ανοικτή/κλειστή** *όταν γιά κάθε ανοικτό/κλειστό A του $\mathcal{M}$ το $f(A)$ είναι ανοικτό/κλειστό του $\mathcal{M}'$.*

Θεώρημα 1.2.9 *Μιά απεικόνιση f του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στον $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ που απεικονίζει τα ανοικτά B μιάς βάσης του $\mathcal{M}$ σε ανοικτά $f(B)$ του $\mathcal{M}'$ είναι ανοικτή.*

Απόδειξη: Κάθε ανοικτό A του $\mathcal{M}$ γράφεται ως ένωση $A = \cup_{i \in I} B_i$ στοιχείων μιάς βάσης, άρα $f(A) = \cup_{i \in I} f(B_i)$ είναι, σύμφωνα με την υπόθεση, ανοικτό, ως ένωση ανοικτών, ο.ε.δ.



Σχήμα 1.2.8: Προβολή ανοικτή αλλά όχι κλειστή

Σχόλιο-2 Το σχήμα 1.2.8 δίνει ένα παράδειγμα συνεχούς απεικόνισης

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x \text{ προβολή στον x-άξονα.}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η προβολή μιάς ανοικτής μπάλας, που είναι στοιχείο μιάς βάσης της συνήθους τοπολογίας του $\mathbb{R}^2$, είναι ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ που ταυτίζουμε με τον x-άξονα. Αντίθετα, η προβολή ενός κλάδου του γραφήματος της συνάρτησης $y = 1/x$, που είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, είναι ένα ανοικτό του $\mathbb{R}$ και όχι κλειστό. Η προβολή αυτή λοιπόν είναι μια συνεχής και ανοικτή αλλά όχι κλειστή απεικόνιση του $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$. Σημειωτέον ότι αυτή είναι μια ειδική περίπτωση του λεγομένου *θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης*, που λέει ότι μια γραμμική συνεχής επίρριψη μεταξύ διανυσματικών χώρων Banach είναι ανοικτή ([Sim63, σ. 235]).

Σχόλιο-3 Ανάλογο επιχείρημα με το προηγούμενο δείχνει ότι η κανονική προβολή

$$p_i : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times ... \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_i, \quad p_i(x_1, ..., x_n) = x_i$$

ενός τοπολογικού γινομένου στον i-παράγοντα $\mathcal{M}_i$ είναι ανοικτή.

Θεώρημα 1.2.10 *Οι επόμενες δύο συνθήκες ισοδυναμούν με το οτι η απεικόνιση f μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ είναι ανοικτή.*

1. *Γιά κάθε υποσύνολο $E \subset \mathcal{M}$ ισχύει $f(E^o) \subset (f(E))^o$.*
2. *Γιά κάθε $x \in \mathcal{M}$ και κάθε περιοχή $U_x \ni x$ υπάρχει περιοχή $V_y \ni y = f(x)$ με $V_y \subset f(U_x)$.*

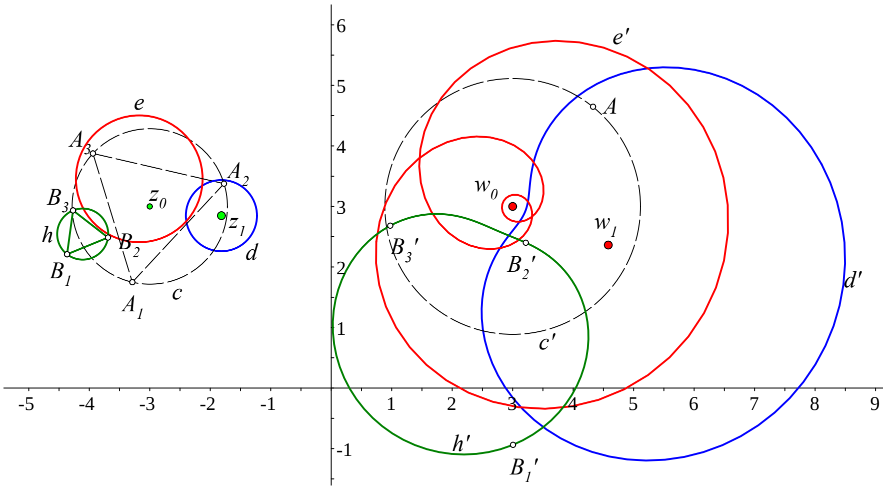
Απόδειξη: Δείχνουμε ότι (f ανοικτή) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (f ανοικτή).

(f ανοικτή) $\Rightarrow$ (1). Πράγματι, αν η f είναι ανοικτή, τότε το $f(E^o)$ είναι ανοικτό και περιέχεται στο $(f(E))$, άρα περιέχεται και στο $(f(E))^o$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Κατά το (1) η $f(U_x) \subset (f(U_x))^o \ni y$. Παίρνουμε λοιπόν ως V_y το $(f(U_x))^o$.

(2) $\Rightarrow$ (f ανοικτή). Έστω το A ανοικτό $x \in A$ και $y = f(x) \in f(A)$. Θεωρώντας ως U_x το A, κατά την υπόθεση θα υπάρχει περιοχή $V_y \ni y$ με $V_y \subset f(A)$. Άρα το $f(A)$ θα παριστάνεται ως ένωση ανοικτών $f(A) = \cup_{y \in f(A)} V_y$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-4 Από την μιγαδική ανάλυση γνωρίζουμε ότι κάθε *αναλυτική* μιγαδική συνάρτηση $w = f(z)$, ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathcal{C}$, είναι ανοικτή απεικόνιση ([Ahl79, σ. 132]). Το σχήμα 1.2.9 δίνει μια εντύπωση της απλούστατης αναλυτικής μιγαδικής συνάρτησης $w = w_0 + (z -$



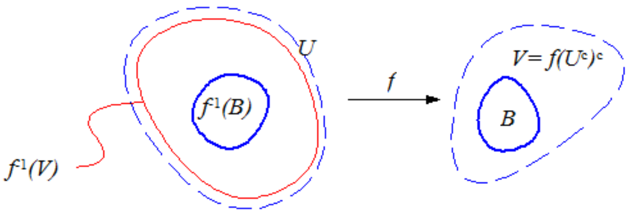
Σχήμα 1.2.9: Η αναλυτική συνάρτηση $w = w_0 + (z - z_0)^3$

$z_0)^3$. Στο σχήμα φαίνονται τέσσερις κύκλοι c, d, e, h και οι εικόνες τους $c' = f(c), d' = f(d), e' = f(e), h' = f(h)$ μέσω της απεικόνισης. Οι μόνοι κύκλοι που απεικονίζονται πάλι σε κύκλους είναι αυτοί που έχουν κέντρο το z_0, όπως ο c. Ένας τέτοιος κύκλος c πάει πάλι σε κύκλο c' έτσι ώστε τρία σημεία του c που ορίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο $A_1A_2A_3$ να απεικονίζονται σε ένα ακριβώς σημείο A του c'. Ανάλογα με την θέση του κύκλου, η εικόνα του είναι διαφορετική. Στον κύκλο h φαίνεται το εγγεγραμμένο ισόπλευρο $B_1B_2B_3$ και η εικόνα των σημείων αυτών B_1', B_2', B_3' πάνω στην εικόνα $h' = f(h)$ του h. Η διερεύνηση της συμπεριφοράς τέτοιων αναλυτικών συναρτήσεων οδηγεί στις λεγόμενες **επιφάνειες Riemann** ([Spr57]) και τις **απεικονίσεις κάλυψης** , που σηματοδοτούν την απαρχή της **αλγεβρικής τοπολογίας** ([Kin93], [Hat02]).

Θεώρημα 1.2.11 *Η απεικόνιση f μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ είναι κλειστή, τότε και μόνον, αν γιά κάθε υποσύνολο $E \subset \mathcal{M}$ ισχύει $\overline{f(E)} \subset f(\overline{E})$.*

Απόδειξη: Αν η f είναι κλειστή, τότε το $f(\overline{E})$ είναι κλειστό. Τότε η $E \subset \overline{E}$ συνεπάγεται την $f(E) \subset f(\overline{E})$ και συνεπώς την $\overline{f(E)} \subset f(\overline{E})$.

Αντίστροφα, αν ισχύει η συνθήκη αυτή και το E είναι κλειστό, τότε η $\overline{f(E)} \subset f(E)$ (αφού $\overline{E} = E$) συνεπάγεται την $\overline{f(E)} = f(E)$, αφού ισχύει πάντοτε $\overline{f(E)} \supset f(E)$, ο.ε.δ.



Σχήμα 1.2.10: Περιοχή V του $f^{-1}(B)$

Θεώρημα 1.2.12 *Έστω ότι η απεικόνιση f μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ είναι κλειστή και $B \subset \mathcal{M}'$. Τότε για κάθε ανοικτό $U \supset f^{-1}(B)$ υπάρχει ανοικτό $V \supset B$ έτσι ώστε*

$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(V) \subset U.$$

Απόδειξη: Δοθέντος του U, όρισε το $V = f(U^c)^c \supset B$ (σχήμα 1.2.10). Το U^c είναι κλειστό και επειδή η f είναι κλειστή και το $f(U^c)$ είναι κλειστό, συνεπώς το $V = f(U^c)^c$ είναι ανοικτό. Τότε

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(f(U^c)^c) = (f^{-1}(f(U^c))^c \subset (U^c)^c = U, \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Θεώρημα 1.2.13 *Η απεικόνιση f μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ είναι ομοιομορφισμός, τότε και μόνον, εάν είναι $1-1$, επί, συνεχής και ταυτόχρονα ανοικτή ή κλειστή.*

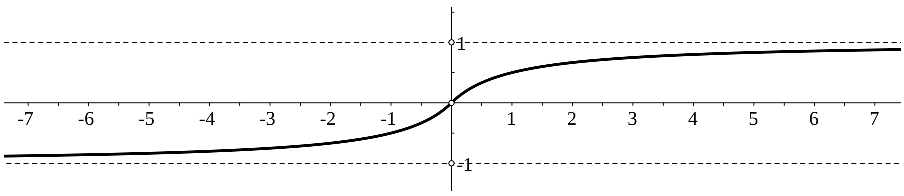
Απόδειξη: Το θεώρημα είναι τετριμμένη συνέπεια του ότι η f^{-1} είναι συνεχής τότε και μόνον όταν η f είναι ανοικτή ή κλειστή. Σημειωτέον ότι το ένα συνεπάγεται το άλλο. Ένας ομοιόμορφισμός είναι ταυτόχρονα ανοικτή και κλειστή απεικόνιση, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.2.2 *Εάν η απεικόνιση f μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ είναι ομοιομορφισμός, τότε και για κάθε υποσύνολο $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, η απεικόνιση $f_1 : \mathcal{N} \longrightarrow f(\mathcal{N})$, που ορίζεται μέσω του περιορισμού της f είναι ομοιομορφισμός ως προς την σχετική τοπολογία των $\mathcal{N}$ και $f(\mathcal{N})$.*

Παραδείγματα

14. **Οι συναρτήσεις** $y = x^n$ **(n περιττό)**. Οι συναρτήσεις αυτές $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και $1-1$ και επί του $\mathbb{R}$. Επίσης γιά κάθε διάστημα $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ το $f(I) = (\alpha^n, \beta^n)$ είναι ανοικτό, άρα η απεικόνιση είναι ομοιομορφισμός του $\mathbb{R}$.

15. **Μονότονες συνεχείς**. Το προηγούμενο παράδειγμα είναι ειδική περίπτωση της κατηγορίας των συνεχών συναρτήσεων που είναι **γνήσια μονότονες**, δηλαδή γνήσια αύξουσες/φθίνουσες. Τέτοιες συναρτήσεις, όπως λ.χ. η αύξουσα και συνεχής $y = e^x$ απεικονίζουν, όπως θα δούμε αργότερα, ένα διάστημα (α, β) σε ένα διάστημα $(f(\alpha), f(\beta))$ (ή $(f(\beta), f(\alpha))$ για φθίνουσες), και επομένως είναι ανοικτές και ορίζουν ομοιομορφισμό του πεδίου ορισμού τους $D \subset \mathbb{R}$ με την εικόνα του $f(D)$. Το



Σχήμα 1.2.11: Ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$

σχήμα 1.2.11 δείχνει το γράφημα ενός τέτοιου ομοιομορφισμού (αύξουσα συνεχής συνάρτηση)

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

που απεικονίζει το $\mathbb{R}$ στο διάστημα $(-1, 1)$.

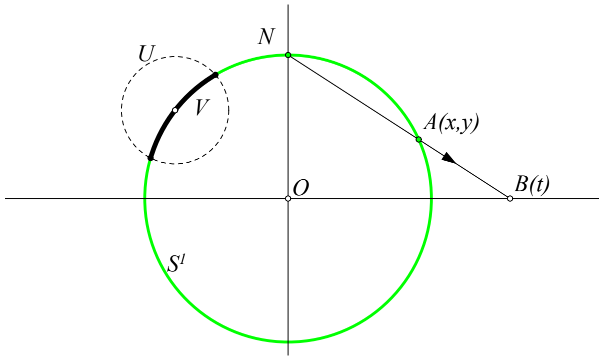
16. **Στερεογραφική προβολή-Ι**. Το επόμενο σχήμα δείχνει την απεικόνιση του μοναδιαίου κύκλου $S^1 - \{N\} \subset \mathbb{R}^2$, εκτός ενός σημείου του N στον x-άξονα, που ταυτίζουμε με το $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f : S^1 - \{N\} \to \mathbb{R}$ ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x, y) = t = \frac{x}{1 - y}, \quad \text{όπου } (x, y) \in S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η συνάρτηση αυτή είναι ομοιομορφισμός του $S^1 - \{N\}$ με το $\mathbb{R}$. Η αντίστροφη συνάρτηση δίδεται από τον τύπο:

$$f^{-1}(t) = (x, y) = \frac{1}{1 + t^2}(2t, t^2 - 1).$$

Η τοπολογία του $S^1 - \{N\}$ είναι η σχετική η εισαγόμενη από αυτήν του $\mathbb{R}^2$. Η εικόνα δείχνει και ένα ανοικτό V του $S^1 - \{N\}$ που ορίζεται μέσω της τομής $V = (S^1 - \{N\}) \cap U$ με μία ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^2$. Η f αντιστοιχίζει τέτοια ανοικτά του $S^1 - \{N\}$ σε διαστήματα του $\mathbb{R}$, πράγμα που συνεπάγεται την συνέχεια της f αλλά και το ότι είναι ανοικτή, άρα ομοιομορφισμός.



Σχήμα 1.2.12: Στερεογραφική προβολή I

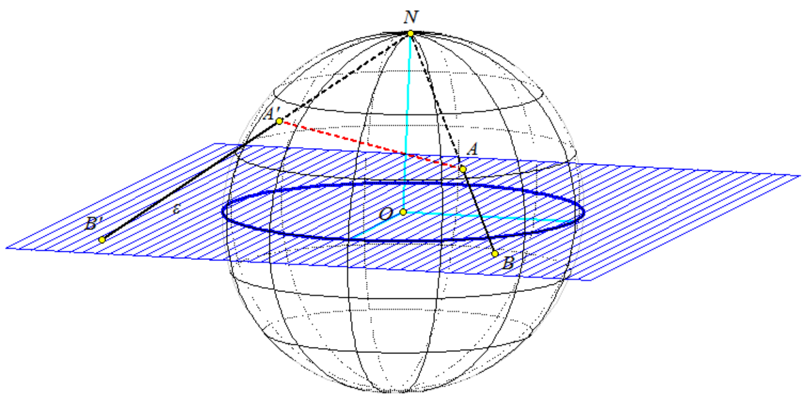
17. **Στερεογραφική προβολή II.** Αυτή είναι μία απεικόνιση της σφαίρας, εκτός ενός σημείου της N, στο επίπεδο (ταυτιζόμενο με το $\mathbb{R}^2$). Για την μοναδιαία σφαίρα $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ και το σημείο $N = (0,0,1)$, η απεικόνιση αυτή περιγράφεται από τους τύπους

$$f : S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) = (x',y') = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right).$$

Γεωμετρικά, η απεικόνιση αντιστοιχίζει στο σημείο $A(x,y,z) \neq N$ της σφαίρας το σημείο τομής $B(x',y')$ του (x,y)-επιπέδου, με την ευθεία NA (σχήμα 1.2.12). Η απεικόνιση είναι $1-1$, *επί* και η αντίστροφή της, για κάθε $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, δίδεται από τον τύπο

$$f^{-1}(x',y') = (x,y,z) = \frac{1}{1+x'^2+y'^2}(2x', 2y', x'^2+y'^2-1).$$

Το παράδειγμα είναι γενίκευση του προηγουμένου και δίδει ένα ομοιομορφισμό του $\mathbb{R}^2$ με την συνήθη τοπολογία και του υποσυνόλου $S^2 - \{N\} \subset \mathbb{R}^3$ με την σχετική τοπολογία.



Σχήμα 1.2.13: Στερεογραφική προβολή II

Το παράδειγμα γενικεύεται και στις n διαστάσεις, για την μοναδιαία σφαίρα

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

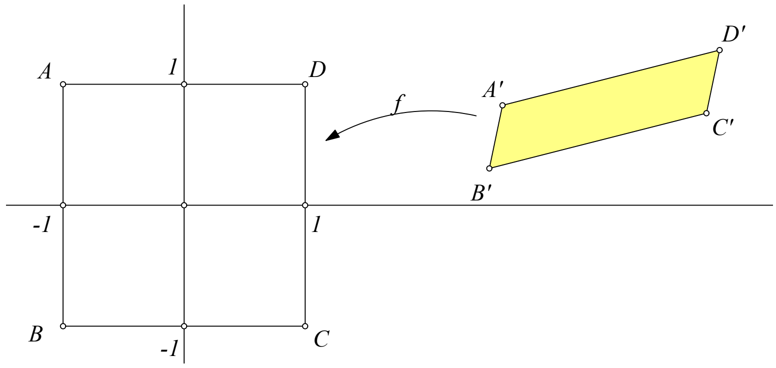
και το σημείο της $N = (0,...,0,1)$. Η γεωμετρική περιγραφή της στερεογραφικής προβολής είναι η ίδια με αυτή του προηγουμένου παραδείγματος και η αναλυτική περιγραφή δίδεται από τον τύπο

$$f(x_1,...,x_n) = \frac{1}{1-x_n}(x_1,...,x_{n-1}),$$

που ορίζει ένα ομοιομορφισμό της $S^{n-1} - \{N\}$ με το $\mathbb{R}^{n-1}$ και έχει αντίστροφο την

$$f^{-1}(t_1, ..., t_{n-1}) = \frac{1}{1+||t||^2}(2t_1, ..., 2t_{n-1}, ||t||^2 - 1).$$

18. **Ομοπαραλληλίες**. Κάθε παραλληλόγραμμο του επιπέδου μπορεί να απεικονισθεί μέσω ενός ο-



Σχήμα 1.2.14: Ομοπαραλληλία που απεικονίζει το $A'B'C'D'$ στο $ABCD$

μοιομορφισμού σε ένα οποιοδήποτε τετράγωνο (σχήμα 1.2.14). Μάλιστα είναι μια σχετικά εύκολη άσκηση της γραμμικής άλγεβρας να δείξουμε ότι ο ομοιομορφισμός αυτός μπορεί να περιγραφεί με πίνακες και είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{pmatrix},$$

όπου η ορίζουσα του πίνακα $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$. Τέτοιοι ομοιομορφισμοί του επιπέδου στον εαυτό του ονομάζονται **ομοπαραλληλίες**. Έναν τέτοιο ομοιομορφισμό θα χρησιμοποιήσουμε και στην §7.4. Σημειωτέον ότι αυτός ο τύπος ομοιομορφισμών γενικεύεται με το ίδιο όνομα σε ομοιομορφισμούς του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του.

Θεώρημα 1.2.14 *Ένας τοπικός ομοιομορφισμός f μεταξύ των τοπολογικών χώρων $\mathcal{M}$ και $\mathcal{M}'$ είναι α-νοικτή απεικόνιση.*

Απόδειξη: Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού, κατά τον οποίο για κάθε σημείο $x \in \mathcal{M}$ υπάρχουν ανοικτές περιοχές U_x του x και V_y του $y = f(x)$ έτσι ώστε ο περιορισμός $f\,\big|_{U_x}: U_x \to V_y$ να είναι ομοιομορφισμός. Τότε η f θα απεικονίζει μια οποιαδήποτε περιοχή $U'_x \subset U_x$ σε αντίστοιχο ανοικτό του V_y, άρα και ανοικτό του $\mathcal{M}'$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-5 Ένα τυπικό παράδειγμα τοπικού ομοιομορφισμού είναι αυτό της απεικόνισης της ευθείας στον μοναδιαίο κύκλο S^1 του επιπέδου

$$f(t) = e^{it} = \text{συν}(t) + i\ \text{ημ}(t).$$

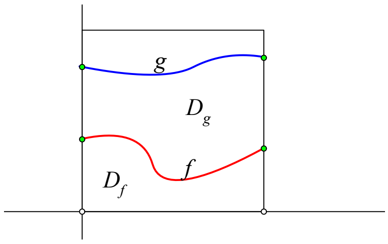
Για κάθε σημείο $t \in \mathbb{R}$ και το αντίστοιχο $f(t) \in S^1$ η εικόνα 1.2.11 δείχνει πώς μπορούμε να βρούμε περιοχή V_y, όπου $y = f(t)$ που να ικανοποιεί τον ορισμό του τοπικού ομοιομορφισμού. Αργότερα θα δούμε ότι αυτός ο τοπικός ομοιομορφισμός δεν μπορεί να είναι και ολικός ομοιομορφισμός του $\mathbb{R}$ με το S^1.

Σχόλιο-6 Τοπικοί ομοιομορφισμοί προκύπτουν και από απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και ο αντίστοιχος πίνακας

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Κατά το **θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης** του διανυσματικού λογισμού ([Τρό12α, σελ. 240], [Σπί94, σελ.36]), υπάρχουν τότε περιοχές U_x, V_y για κάθε x και $y = f(x)$, έτσι ώστε ο περιορισμός $f\big|_{U_x} : U_x \to V_y$ να είναι ομοιομορφισμός.

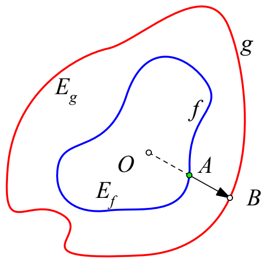
Σχόλιο-7 Όπως είδαμε και στα παραδείγματα έτσι και γενικότερα, στις εφαρμογές της τοπολογίας, προκύπτουν χώροι και απεικονίσεις που πρέπει να αναλυθούν σε συνθέσεις άλλων ώστε να αποδειχθεί ότι πρόκειται για συνεχείς απεικονίσεις ή/και ομοιομορφισμούς. Για παράδειγμα, μια συνεχής θετική απεικόνιση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ορίζει το χωρίο $D_f \subset \mathbb{R}^2$ κάτω από το γράφημα της



Σχήμα 1.2.15: Ομοιόμορφα χωρία D_f και D_g

$$D_f = \{(x, y) : 0 \le y \le f(x), x \in [0, 1]\}$$

(σχήμα 1.2.15). Για δύο τέτοιες συναρτήσεις f, g μπορεί κανείς να κατασκευάσει μία $1-1$ και επί απεικόνιση $h : D_f \to D_g$ που είναι ομοιομορφισμός. Λύνοντας αυτό το πρόβλημα, μπορεί κανείς να



Σχήμα 1.2.16: Ομοιόμορφα χωρία E_f και E_g

εξετάσει κατόπιν ένα χωρίο $E_f \subset \mathbb{R}^2$, που ορίζεται από μια συνεχή θετική συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f(2\pi)$, μέσω πολικών συντεταγμένων (r, ϕ):

$$E_f = \{(x, y) : x = r\,\text{συν}(\phi), y = r\,\text{ημ}(\phi), 0 \le r \le f(\phi), \phi \in [0, 2\pi]\}.$$

Δύο χωρία E_f, E_g που αντιστοιχούν σε δύο τέτοιες συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα (σχήμα 1.2.16).

Σχόλιο-8 Δεν είναι σπάνιες οι περιπτώσεις που μια συνάρτηση είναι δύσκολο να ορισθεί και να αποδειχθεί η συνέχειά της. Για παράδειγμα, το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας (§7.1) λέει ότι κάθε μιγαδικό πολυώνυμο $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$ έχει n ακριβώς ρίζες (μετρώντας και τις πολλαπλότητές τους) $\rho_1, ..., \rho_n \in \mathbb{C}$. Το ότι αυτές οι ρίζες είναι συνεχείς συναρτήσεις των συντελεστών $\{a_i\}$ είναι ένα σύνθετο θέμα και στην ακριβή διατύπωσή του και στην απόδειξη ([Mar66, σ. 3]). Σε αυτό λ.χ. ανάγεται και η συνέχεια των ιδιοτιμών ενός πίνακα ως προς τους συντελεστές του πίνακα. Το τελευταίο θέμα παρουσιάζει ιδιαίτερο γεωμετρικό ενδιαφέρον, καθώς, οι ιδιοτιμές μεταβάλλονται εντός ορισμένων δίσκων (του Gerschgorin, όπως λέγονται [Lax97, σ. 240]), που υπολογίζονται άμεσα από τους συντελεστές του πίνακα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1.2.1 *Δείξε ότι για μια απεικόνιση $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ και υποσύνολο $A \subset \mathcal{M}$, ισχύει $f^{-1}(f(A)) = A \;\Rightarrow\; f(A) \cap f(A^c) = \emptyset$.*

Άσκηση 1.2.2 *Έστω ότι ο τοπολογικός χώρος* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ *είναι ένωση* $\mathcal{M}= A \cup B$ *και για την συνάρτηση* $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ *οι περιορισμοί* $f\big|_A$ *και* $f\big|_B$ *είναι συνεχείς στο* $x \in A \cap B$. *Δείξε ότι η* f *είναι συνεχής στο* x.

Άσκηση 1.2.3 *Δείξε ότι μια 1-1 και επί απεικόνιση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι ομοιομορφισμός, αν και μόνον αν είναι γνήσια μονότονη.*

Άσκηση 1.2.4 *Δείξε ότι μια 1-1, επί και συνεχής απεικόνιση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι ομοιομορφισμός.*

Άσκηση 1.2.5 *Δείξε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι κλειστή.*

Άσκηση 1.2.6 *Δείξε ότι οι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^2$ *ως προς την σχετική τοπολογία* $[-1, 1]^2$ *και* $\overline{B_1(0)} = \{x : ||x|| \leq 1\}$ *είναι ομοιόμορφοι.*

Άσκηση 1.2.7 *Δείξε ότι η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} 0, x \notin \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q}, \text{ αν } x = \dfrac{p}{q} \text{ μ.κ.δ.}(p, q) = 1, \end{cases}$ *είναι συνεχής σε κάθε άρρητο σημείο και α-συνεχής σε κάθε ρητό σημείο* $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 1.2.8 *Δείξε ότι το σύνολο των σημείων* $x \in \mathcal{M}$ *στα οποία δύο συνεχείς συναρτήσεις* $f, g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *συμπίπτουν* $(f(x) = g(x))$, *είναι κλειστό του* $\mathcal{M}$. *Συμπέρανε ότι αν δύο τέτοιες συναρτήσεις συμπίπτουν σε πυκνό υποσύνολο του* $\mathcal{M}$, *τότε συμπίπτουν σε όλο το* $\mathcal{M}$.

Άσκηση 1.2.9 *Δείξε ότι μια συνεχής συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιεί* $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *είναι της μορφής* $f(x) = a \cdot x$, *για μια σταθερά* a. *(Υπόδειξη: Απόδειξε ότι η ιδιότητα ισχύει για ακεραίους, κατόπιν για ρητούς, και κάνε χρήση του ότι οι ρητοί είναι πυκνό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$.*)*

Άσκηση 1.2.10 *Δείξε ότι η απεικόνιση (αντιστροφής, όπως λέγεται)* $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ *με* $f(x) = r\frac{x}{||x||^2}$, *όπου* $r > 0$ *σταθερά, είναι ομοιομορφισμός.*

Άσκηση 1.2.11 *Εάν* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *συμβολίζει το σύνολο των πραγματικών πινάκων* $m \times n$ *διαστάσεων, τότε τοποθετώντας τη μία γραμμή μετά την άλλη κατασκευάζουμε ένα γραμμικό ισομορφισμό αυτού του συνόλου με το* $\mathbb{R}^{mn}$. *Όρισε μια τοπολογία στο* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *ως προς την οποία αυτός ο γραμμικός ισομορφισμός να είναι ομοιομορφισμός.*

Άσκηση 1.2.12 *Η αντιστοίχιση σε ένα πραγματικό* $m \times n$ *πίνακα* A *και έναν* $n \times p$ *πίνακα* B *του πίνακα γινομένου* $A \cdot B$, *που είναι* $m \times p$ *διαστάσεων ορίζει μια απεικόνιση* $f : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$. *Δείξε ότι αυτή η απεικόνιση είναι συνεχής ως προς τις τοπολογίες των συνόλων πινάκων* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *που ορίζονται στην προηγούμενη άσκηση.*

Άσκηση 1.2.13 *Δείξε ότι μια συνεχής απεικόνιση* $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ *επεκτείνεται σε μια συνεχή απεικόνιση* $f' : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$. *(Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε την άσκηση 1.1.11 και όρισε σε κάθε τέτοιο διάστημα* I_i *μια κατάλληλη συνάρτηση της μορφής* $f_i(x) = a_i x + b_i$, *όπου τα* $a_i, b_i \in \mathbb{R}^n$ *προσδιορίζονται από τα άκρα του* I_i *που είναι στοιχεία του* $\mathcal{C}$ *και την* f.*)*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μετρικοί χώροι, πληρότητα

2.1 Μετρικοί χώροι

Ορισμός 2.1.1 **Μετρικός χώρος** *λέγεται ένα ζεύγος* $(\mathcal{M}, d)$ *αποτελούμενο από ένα μη κενό σύνολο* $\mathcal{M}$ *και την* **μετρική** d*, που είναι μία συνάρτηση* $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *με τις ιδιότητες*

1. $d(x, y) \geq 0$ *γιά κάθε* $x, y \in \mathcal{M}$ *και* $d(x, y) = 0$ *τότε και μόνον, όταν* $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *γιά κάθε* $x, y \in \mathcal{M}$ *(συμμετρική ιδιότητα).*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *γιά κάθε* $x, y, z \in \mathcal{M}$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Τον αριθμό $d(x, y)$ *ονομάζουμε* **απόσταση** *των* x, y *ως προς την μετρική* d.

Σχόλιο-1 Συχνά με τον όρο *μετρικός χώρος* θα αναφερόμαστε στο ίδιο το σύνολο $\mathcal{M}$. Εξυπακούεται ότι θα έχουμε τότε προκαθορίσει την μετρική d με την οποία το θεωρούμε εφοδιασμένο. Όπως θα δούμε παρακάτω, το ίδιο το σύνολο $\mathcal{M}$ μπορεί να έχει περισσότερες από μία μετρικές $d, d', d'', \ldots$

Ορισμός 2.1.2 *Τα επόμενα σύνολα είναι θεμελιώδους σημασίας σε ένα μετρικό χώρο* $(\mathcal{M}, d)$.

1. **Ανοικτή μπάλα** *του* $\mathcal{M}$ *με κέντρο* $x \in \mathcal{M}$ *και ακτίνα* $r > 0$ *λέμε ένα σύνολο της μορφής*
$$B_r(x) = \{x' \in \mathcal{M} : d(x, x') < r\}.$$
2. **Κλειστή μπάλα** *του* $\mathcal{M}$ *με κέντρο* $x \in \mathcal{M}$ *και ακτίνα* $r > 0$ *λέμε ένα σύνολο της μορφής*
$$\overline{B_r(x)} = \{x' \in \mathcal{M} : d(x, x') \leq r\}.$$
3. **Σφαίρα** *του* $\mathcal{M}$ *με κέντρο* $x \in \mathcal{M}$ *και ακτίνα* $r > 0$ *λέμε ένα σύνολο της μορφής*
$$S_r(x) = \{x' \in \mathcal{M} : d(x, x') = r\}.$$
4. **Ανοικτό** *του* $\mathcal{M}$ *λέμε ένα υποσύνολο* $A \subset \mathcal{M}$*, που γράφεται ως ένωση ανοικτών μπαλών.*
5. **Φραγμένο** *του* $\mathcal{M}$ *λέμε ένα υποσύνολο* $A \subset \mathcal{M}$*, για το οποίο υπάρχει μπάλα που το περιέχει.*
6. **Φραγμένη** *λέμε την μετρική* d *του, όταν ο ίδιος ό χώρος* $\mathcal{M}$ *είναι φραγμένο σύνολο. Τότε το*
$$\delta = \sup\{d(x, y) : x, y \in \mathcal{M}\},$$
ονομάζουμε **διάμετρο** *του* $\mathcal{M}$.

Θεώρημα 2.1.1 *Γιά κάθε $(\mathcal{M}, d)$ ισχύουν τα επόμενα.*

1. *Οι ανοικτές μπάλες είναι ανοικτά.*
2. *Το σύνολο όλων των ανοικτών του $\mathcal{M}$ ορίζει μιά τοπολογία $\mathcal{T}$ στο $\mathcal{M}$, που λέγεται* **τοπολογία της μετρικής** *του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$.*
3. *Ένα σύνολο $A \subset\mathcal{M}$ είναι ανοικτό, τότε και μόνον, όταν γιά κάθε $x \in A$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε η ανοικτή μπάλα $B_{\frac{1}{n}}(x)$ να περιέχεται στο A.*
4. *Οι μπάλες $\{B_{\frac{1}{n}}(x), x \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}\}$ αποτελούν βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$.*

Απόδειξη: Το (1) αποδεικνύεται όπως το παράδειγμα 7 στην §1, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα. Το (2) προκύπτει από μια τετριμμένη επαλήθευση του ορισμού του τοπολογικού χώρου. Το (3) προκύπτει όπως και το (1). Το (4) είναι συνέπεια του (3), ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Οι περισσότεροι από τους τοπολογικούς χώρους που εξετάσαμε στα παραδείγματα, μέχρι τώρα, είναι μετρικοί χώροι. Η τοπολογία τους ορίζεται, όπως στο προηγούμενο θεώρημα, μέσω μιάς κατάλληλης μετρικής. Για παράδειγμα η συνήθης τοπολογία του $\mathbb{R}^n$ ορίζεται μέσω της μετρικής

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με αυτή την μετρική είναι μία ειδική περίπτωση μιάς γενικότερης δομής, που περιγράφεται με τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.1.3 *Ένας* **χώρος με norm** *είναι ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{M}$ εφοδιασμένος με μιά συνάρτηση $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, που ονομάζουμε norm, συμβολίζουμε με $f(x) = ||x||$ και ικανοποιεί τα επόμενα αξιώματα:*

1. *$||x|| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{M}$ και $||x|| = 0$ τότε και μόνον, όταν $x = 0$.*
2. *$||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathcal{M}$.*
3. *$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ για κάθε $x, y \in \mathcal{M}$.*

Μετρική της norm *λέμε την μετρική που ορίζεται στο $\mathcal{M}$ μέσω του τύπου*

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Σχόλιο-3 Στο τελευταίο μέρος του ορισμού χρειάζεται μια συμπλήρωση. Πρέπει να δείξουμε ότι αυτός ο τύπος ορίζει πράγματι μία μετρική. Αυτό όμως είναι μία απλή άσκηση που στηρίζεται στην ιδιότητα (3) της norm και που αναφέρεται ώς **τριγωνική ανισότητα** της norm. Το γενικό συμπέρασμα λοιπόν είναι, ότι κάθε (διανυσματικός) χώρος με norm ορίζει ένα μετρικό τοπολογικό χώρο.

Σχόλιο-4 Κάθε σύνολο $\mathcal{M}$ μπορεί να εφοδιασθεί με μία μετρική, κατά τετριμμένο τρόπο, λ.χ. με την

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ για } x \neq y, \\ 0 \text{ για } x = y. \end{cases}$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι ο ορισμός αυτός ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής και ότι η αντίστοιχη τοπολογία που ορίζεται είναι η διακριτή του $\mathcal{M}$, στην οποία κάθε μονοσύνολο είναι ανοικτό. Μία από τις ιδιομορφίες αυτής της μετρικής είναι ότι ισχύει $\partial B_r(x) \neq S_r(x)$, ενώ, λ.χ. για την μετρική που ορίζεται από μία norm ισχύει $\partial B_r(x) = S_r(x)$.

Ένα τελείως διαφορετικό και πολύ δυσκολότερο πρόβλημα είναι να ξεκινήσουμε από ένα τοπολογικό χώρο $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και να προσπαθήσουμε να βρούμε μία μετρική d έτσι ώστε η τοπολογία που ορίζεται μέσω της d να συμπίπτει με την δοθείσα $\mathcal{T}$. Κατ' αρχήν δεν είναι σαφές ότι αυτό το πρόβλημα λύνεται για τον τυχόντα τοπολογικό χώρο $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$. Υπάρχουν διάφορα θεωρήματα, από τα αρχικά στάδια της ανάπτυξης του κλάδου, που δίδουν κριτήρια για το πότε αυτό είναι δυνατόν. Ένας τοπολογικός χώρος που έχει αυτή την δυνατότητα λέγεται **μετρικοποιήσιμος**. Στο παρόν μάθημα, εκτός της περίπτωσης γινομένων μετρικών χώρων, δεν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με αυτό, το κάπως εσωτερικό πρόβλημα της τοπολογίας. Θα προτιμήσουμε να ασχοληθούμε με θέματα που έχουν περισσότερες εφαρμογές σε διάφορους άλλους κλάδους των Μαθηματικών (δες ωστόσο τα θεωρήματα 3.2.5 και 6.4.1).

Ορισμός 2.1.4 *Δύο μετρικές d, d' ορισμένες στο ίδιο μη κενο σύνολο $\mathcal{M}$ λέγονται* **ισοδύναμες**, *όταν ορίζουν την ίδια τοπολογία στο $\mathcal{M}$.*

Σχόλιο-5 Εύκολα βλέπουμε ότι η σχέση αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathcal{D}$ των μετρικών που ορίζονται σε ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{M}$. Παραδείγματα μπορούμε να φτιάξουμε με τετριμμένο τρόπο, λ.χ. πολλαπλασιάζοντας την μετρική με μια σταθερά $k > 0$, $d'(x, y) = kd(x, y)$. Κάπως πιο σύνθετα παραδείγματα ισοδύναμων μετρικών θα δούμε παρακάτω. Εδω ας σημειώσουμε ότι η ισοδυναμία των τοπολογιών μπορεί να διαπιστωθεί συγκρίνοντας τις ανοικτές μπάλες των δύο τοπολογιών. Το επόμενο θεώρημα είναι προφανές.

Θεώρημα 2.1.2 *Δύο μετρικές d, d' στον ίδιο χώρο $\mathcal{M}$ είναι ισοδύναμες, αν και μόνον αν, κάθε ανοικτή μπάλα $B_r(x)$ ως προς την μία μετρική περιέχει μιά ανοικτή μπάλα $B_{r'}(x)$ με το ίδιο κέντρο ως προς την άλλη μετρική.*

Παραδείγματα

1. **Διάφορες norm του** $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ μπορεί να εφοδιασθεί με διάφορες norm, εκτός αυτής που γνωρίσαμε στο παράδειγμα 7 της §1, μέσω της οποίας ορίσαμε την συνήθη τοπολογία αυτού του χώρου. Μερικές άλλες norm του ίδιου χώρου είναι οι εξής:

   (α') Γιά κάθε ακέραιο $p > 2$, η $||x||_p = ((x_1^p + ... + x_n^p))^{\frac{1}{p}}$. ορίζει μία norm στο $\mathbb{R}^n$.

   (β') Παρόμοια η $||x||_\infty = \max_i(|x_i|)$.

   (γ') Παρόμοια η $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$.

   Το ότι οι δύο τελευταίες ικανοποιούν πράγματι τα αξιώματα της norm, είναι μια τετριμμένη άσκηση. Στο πρώτο παράδειγμα κάποια δυσκολία παρουσιάζει μόνο η απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας που ισοδυναμεί με την λεγόμενη **ανισότητα του Minkowski**:

   $$\begin{aligned}(|x_1 + y_1|^p + ... + |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \leq (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (|y_1|^p + ... + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

   Μια απλή απόδειξη αυτής ([Dug66, σ. 182]) προκύπτει από την κυρτότητα της συνάρτησης $y = f(x) = x^p$, δηλαδή απ' το ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την ανισότητα ([Σπί04, σελ.183])

   $$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } t \in [0, 1].$$

   Η ανισότητα του Minkowski προκύπτει από αυτήν την γενική ανισότητα της κυρτότητας, θέτοντας

   $$X = (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad Y = (|y_1|^p + ... + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ και } t = \frac{X}{X+Y},$$

   γράφοντας για κάθε i την

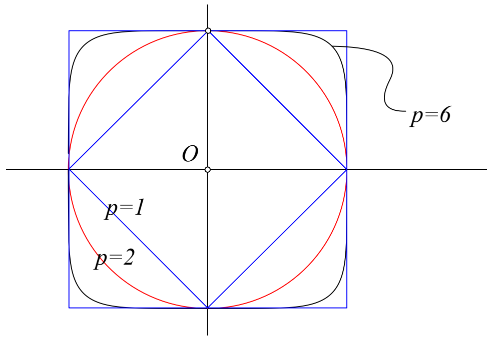
   $$\left((1-t)\frac{|x_i|}{X} + t\frac{|y_i|}{Y}\right)^p \leq (1-t)\left(\frac{|x_i|}{X}\right)^p + t\left(\frac{|y_i|}{Y}\right)^p,$$

   αθροίζοντας ως προς i και απλοποιώντας.

   Το σχήμα 2.1.1 δείχνει τις μπάλες της $B_1(0)$ του $\mathbb{R}^2$γιά την norm $||x||_p$ και διάφορες τιμές του p. Το εξωτερικό τετράγωνο είναι η $B_1(0)$ για την norm $||x||_\infty$. Όπως θα δούμε παρακάτω οι τοπολογίες που ορίζουν όλες αυτές οι norm συμπίπτουν με την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^n$, συνεπώς οι αντίστοιχες μετρικές είναι ισοδύναμες. Αυτό, αν λάβουμε υπόψη το τελευταίο θεώρημα, υποδεικνύεται και από το σχήμα 2.1.1.

2. **Φραγμένη ισοδύναμη μετρική**. Κάθε μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ δέχεται μια νέα μετρική d', ως προς την οποία η απόσταση δύο σημείων του είναι πάντοτε $d'(x, y) < 1$. Ένας συνηθισμένος τρόπος παραγωγής της νέας μετρικής d' από την d, είναι μέσω της συνάρτησης

   $$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{M}.$$



Σχήμα 2.1.1: $B_1(0)$ γιά την norm $||x||_p$ και διάφορες τιμές του p

Ως συνήθως, η μόνη δυσκολία στην διαπίστωση ότι η d' ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής, προκύπτει στην επαλήθευση της τριγωνικής ανισότητας, που αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας το ότι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{t}{1+t}, \text{ είναι αύξουσα για } 0 \le t < \infty \;\Rightarrow \\ d'(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\le \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d'(x,y) + d'(y,z). \end{aligned}$$

Περιοριζόμενοι σε $\varepsilon < 1$ βλέπουμε αμέσως ότι ισχύει

$$d'(x,y) < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; d(x,y) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Αυτή, συνδυαζόμενη με την $d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d'(x,y) < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, οδηγεί εύκολα στο συμπέρασμα ότι οι τοπολογίες που ορίζονται από τις d και d' ταυτίζονται, δηλαδή οι δύο μετρικές είναι ισοδύναμες.

3. **Αλλαγή μετρικής με κοίλη συνάρτηση**. Κοίλη συνάρτηση ονομάζεται μια συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα ([Σπί04, σελ.184])

$$f(t\,x + (1-t)\,y) \ge t\,f(x) + (1-t)\,f(y).$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε τέτοια συνάρτηση, που, επιπρόσθετα, είναι γνήσια αύξουσα και ικανοποιεί $f(0) = 0$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό μιας νέας μετρικής σε ένα μετρικό χώρο $(\mathcal{M}, d)$. Πράγματι, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η

$$d'(x,y) = f(d(x,y))$$

ορίζει μια νέα συνάρτηση που ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής.

4. **Ο χώρος** $B(X,\mathbb{R})$. Για ένα τυχόν μη κενό σύνολο X ορίζεται ο διανυσματικός χώρος $B(X,\mathbb{R})$ των φραγμένων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$. Στον χώρο αυτό η

$$||f||_\infty = \sup_{x\in X}\{|f(x)|\}$$

ορίζει μία norm. Η επαλήθευση των αξιωμάτων της norm είναι μια τετριμμένη άσκηση. Ανάλογα ορίζονται οι χώροι $B(X,\mathbb{C}), B(X,\mathbb{R}^n)$ και γενικότερα $B(X,V)$, όπου V ένας διανυσματικός χώρος με norm. Ειδικά ο χώρος $B(X,\mathbb{R})$ συμβολίζεται και με $B(X)$.

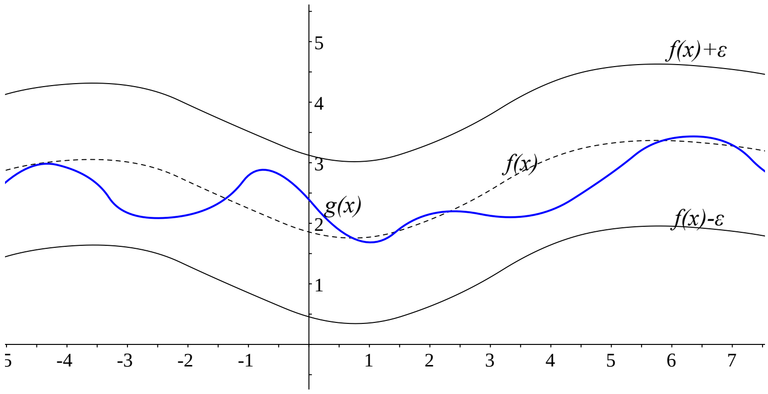
5. **Ο χώρος** $C[0,1]$. Ο διανυσματικός αυτός χώρος αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Υπάρχουν εδώ, μεταξύ άλλων, τρεις norm που συναντάμε συχνά σε εφαρμογές:

   (α') Η norm $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$,

   (β') η norm $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$,

   (γ') η norm $||f||_2 = (\int_0^1 f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$.

   Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η επαλήθευση των αξιωμάτων της norm, για τα τρία αυτά παραδείγματα, είναι τετριμμένη άσκηση. Το σχήμα 2.1.2 δείχνει την μπάλα $B_\varepsilon(f)$ του μετρικού



   Σχήμα 2.1.2: $B_\varepsilon(f)$ στον $C[0,1]$ με την norm $||f||_\infty$

   χώρου $C[0,1]$ εφοδιασμένου με την norm $||f||_\infty$. Αυτή αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις

$$g \in C[0,1] : f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x) + \varepsilon, \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

6. **Ο χώρος** $\mathbb{R}^\infty$. Ο διανυσματικός αυτός χώρος αποτελείται από όλες τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών, που σύντομα συμβολίζουμε με $\{x_n\}$. Στον χώρο αυτό μπορούμε να ορίσουμε άπειρες διαφορετικές μετρικές d_m, εξαρτώμενες από έναν αριθμο $m > 1$, μέσω του τύπου

$$d_m(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}, \quad \text{για} \quad x = \{x_i\},\ y = \{y_i\} \in \mathbb{R}^\infty.$$

   Το ότι η d_m ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής είναι τετριμμένο. Η αντίστοιχη τριγωνική ανισότητα προκύπτει όπως στο παράδειγμα 2.

7. **Οι χώροι** ℓ^p. Οι διανυσματικοί αυτοί χώροι είναι υπόχωροι του προηγουμένου παραδείγματος $\mathbb{R}^\infty$, αλλά καθένας εφοδιάζεται με διαφορετική μετρική, που προέρχεται από μία norm εξαρτώμενη από το $p \geq 1$. Συγκεκριμένα, ο ℓ^p ορίζεται ως το σύνολο των ακολουθιών $x = \{x_n\}$ που η σειρά των απολύτων p-δυνάμεών της συγκλίνει

$$\Sigma_i |x_i|^p < \infty \text{ και ορίζουμε } ||x||_p = (\Sigma_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

   Για $p = 1$, αντίστοιχος χώρος ταυτίζεται με το σύνολο των απολύτως συγκλινουσών σειρών. Η τριγωνική ιδιότητα για αυτήν την norm προκύπτει από το ότι, γιά δύο ακολουθίες

$$x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \ell^p \quad \Rightarrow \quad x + y = \{x_n + y_n\} \in \ell^p$$
$$\text{και} \quad ||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p.$$

Η ιδιότητα αυτή είναι επέκταση της ανισότητας του Minkowski (παράδειγμα 1) για άπειρα αθροίσματα. Πράγματι, από την ανισότητα αυτή

$$\begin{aligned}
\left(\sum_1^n |x^i+y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\sum_1^n |x^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_1^n |y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \Rightarrow \\
\left(\sum_1^n |x^i+y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\sum_1^\infty |x^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_1^\infty |y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \Rightarrow \\
\left(\sum_1^\infty |x^i+y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\sum_1^\infty |x^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_1^\infty |y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

8. **Ο χώρος ℓ^∞**. Αυτός ορίζεται ως ο διανυσματικός χώρος των φραγμένων ακολουθιών $x = \{x_n\}$ του $\mathbb{R}$, εφοδιασμένος με την norm
$$||x||_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}}(|x_n|).$$
Ένας διανυσματικός υπόχωρος αυτού του χώρου είναι ο χώρος ℓ_0^∞, που αποτελείται από τις ακολουθίες $x = \{x_n\}$ που συγκλίνουν στο 0. Μάλιστα, δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι ο ℓ_0^∞ είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ^∞.

   Ο ℓ^∞ είναι παράδειγμα μη-διαχωρίσιμου χώρου. Πράγματι, το υποσύνολό του $\mathcal{D}$, που αποτελείται από τις ακολουθίες $\{x_n : x_n \in \{0,1\}\}$ είναι υπεραριθμήσιμο, αφού κάθε τέτοια ακολουθία παριστάνει ένα αριθμό $x \in [0,1]$ στο δυαδικό σύστημα και αντίστροφα. Επίσης η απόσταση δύο διαφορετικών τέτοιων στοιχείων είναι πάντοτε $d = 1$. Επομένως οι μπάλες $B_\varepsilon(y)$ με κέντρα $y \in \mathcal{D}$ και $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ θα είναι ανά δύο ξένες. Έτσι ένα πυκνό υποσύνολο του ℓ^∞ θα έπρεπε να έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο σε κάθε τέτοια μπάλα και δεν μπορεί να είναι αριθμήσιμο.

9. **Περιορισμός σε υποσύνολο**. Σε ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, ορίζεται αυτόματα μια μετρική μέσω του περιορισμού της $d(x,y)$ στα σημεία του A. Προκύπτει άμεσα ότι οι ανοικτές μπάλες του A ως προς αυτήν τη μετρική είναι τομές του με ανοικτές μπάλες του $\mathcal{M}$, άρα η τοπολογία που ορίζεται από αυτή την μετρική στο A είναι η σχετική και εισαγόμενη από αυτή του $\mathcal{M}$.

10. **Τοπολογία γινόμενο μετρικών χώρων**. Το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{M}= \mathcal{M}_1 \times ... \times \mathcal{M}_n$ μετρικών χώρων $(\mathcal{M}_1, d_1)$, ..., $(\mathcal{M}_n, d_n)$, μπορεί να εφοδιασθεί με διάφορες μετρικές, των οποίων η τοπολογία συμπίπτει με την τοπολογία γινόμενο του $\mathcal{M}$. Οι μετρικές αυτές του $\mathcal{M}$ ορίζονται με την βοήθεια των $d_1, ..., d_n$. Ένα παράδειγμα είναι η
$$d((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = d_1(x_1,y_1) + ... + d_n(x_n,y_n),$$
$$\text{για } (x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n) \in \mathcal{M}.$$

    Το ότι η d είναι μια μετρική είναι τετριμμένο. Το ότι η d ορίζει την ίδια τοπολογία με την τοπολογία γινόμενο προκύπτει επίσης άμεσα, στην ουσία, με τον τρόπο του παραδείγματος 6, §1.1. Πράγματι, αν $y = (y_1, ..., y_n)$ είναι στοιχείο της μπάλας $B_\varepsilon(x)$ του $(\mathcal{M}, d)$, έστω $\varepsilon' = \varepsilon - d(x,y) > 0$ και ας πάρουμε $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon'}{n}$. Τότε για κάθε στοιχείο
$$\begin{aligned}
z = (z_1,...,z_n) &\in B_{\varepsilon''}(y_1) \times ... \times B_{\varepsilon''}(y_n) \Rightarrow \\
d(x,z) &< d(x,y) + d(y,z) \\
&= d(x,y) + [d_1(y_1,z_1) + ... + d_n(y_n,z_n)] \\
&< d(x,y) + n\varepsilon'' = d(x,y) + \varepsilon' = \varepsilon.
\end{aligned}$$

    Αυτό δείχνει ότι κάθε μπάλα $B_\varepsilon(x)$ ως προς d είναι ανοικτό ως προς την τοπολογία γινόμενο, αφού γράφεται σαν ένωση των ανοικτών $B_{\varepsilon''}(y_1) \times ... \times B_{\varepsilon''}(y_n)$ της τοπολογίας γινόμενο. Για το αντίστροφο, αρκεί να δείξουμε ότι ένα στοιχείο της υποβάσης της τοπολογίας γινόμενο, όπως το $\mathcal{M}_1 \times ... \times B_\varepsilon(x_i) \times ... \times \mathcal{M}_n$ είναι ανοικτό ως προς την τοπολογία που ορίζεται από την d. Εδώ η $B_\varepsilon(x_i)$ είναι μιά οποιαδήποτε μπάλα του $\mathcal{M}_i$. Πράγματι, το $y \in \mathcal{M}_1 \times ... \times B_\varepsilon(x_i) \times ... \times \mathcal{M}_n$

ισοδυναμεί με το ότι $d_i(x_i, y_i) < \varepsilon$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $\varepsilon' = \varepsilon - d_i(x_i, y_i)$ και να θεωρήσουμε την μπάλα $B_y(\varepsilon')$ του $\mathcal{M}$. Για κάθε στοιχείο $z \in B_y(\varepsilon')$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} d_i(x_i, z_i) &\leq d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) \\ &\leq d_i(x_i, y_i) + d(y, z) < d_i(x_i, y_i) + \varepsilon' = \varepsilon. \end{aligned}$$

11. **Ο χώρος** $2^{\mathbb{N}}$. Το σύνολο αυτό ([Edg08, σ. 44]) αποτελείται από τις ακολουθίες $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ με στοιχεία από το δισύνολο $\{0, 1\}$. Η μετρική ορίζεται μέσω του μήκους k του αρχικού κοινού τμήματος δύο τέτοιων ακολουθιών. Λ.χ. οι ακολουθίες

$$x = \{0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots\} \text{ και } y = \{0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$$

έχουν πρώτο κοινό το αρχικό τμήμα τους $\{0, 1, 1, 0, 0\}$. Το $k = k(x, y)$ λοιπόν είναι 5. Για δύο ακολουθίες ορίζουμε την απόσταση $d(x, y) = 0$ αν $x = y$ και $d(x, y) = \frac{1}{2^k}$ αν $x \neq y$, όπου το k προσδιορίζεται με τον προηγούμενο τρόπο. Από τα αξιώματα της μετρικής, τα δύο πρώτα ίσχύουν προφανώς και η τριγωνική ανισότητα εμφανίζεται με μια ισχυρότερη μορφή, καθώς αν $k(x, y) = a, k(y, z) = b$ και $k(x, z) = c$, τότε ισχύει $c = k(x, z) \geq \min(a, b)$, που συνεπάγεται την

$$d(x, z) = \frac{1}{2^c} \leq \frac{1}{2^{\min(a,b)}} = \max\left(\frac{1}{2^a}, \frac{1}{2^b}\right) = \max(d(x, y), d(y, z)),$$

που, βέβαια, συνεπάγεται την $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Μια μετρική, όπως η προηγούμενη, που ικανοποιεί την ισχυρότερη ανισότητα

$$d(x, y) \leq \max(d(x, y), d(y, z)),$$

ονομάζεται **υπερμετρική**.

Ορισμός 2.1.5 *Έστω f απεικόνιση μεταξύ των μετρικών χώρων $(\mathcal{M}, d)$ και $(\mathcal{M}', d')$.*

1. *Η f ονομάζεται* **άπεικόνιση Lipschitz**, *εάν υπάρχει σταθερά $K \geq 0$ (σταθερά Lipschitz), έτσι ώστε*
$$d'(f(x,)f(y)) \leq K d(x, y), \quad \textit{για κάθε } \; x, y \in \mathcal{M}.$$
2. *Η f ονομάζεται* **ομοιότητα**, *εάν υπάρχει σταθερά $K \geq 0$ (λόγος ομοιότητας), έτσι ώστε*
$$d'(f(x,)f(y)) = K d(x, y), \quad \textit{για κάθε } \; x, y \in \mathcal{M}.$$
3. *Η f ονομάζεται* **ισομετρία**, *εάν ισχύει*
$$d'(f(x,)f(y)) = d(x, y), \quad \textit{για κάθε } \; x, y \in \mathcal{M}.$$
4. *Η f ονομάζεται* **συστολή**, *εάν είναι Lipschitz με σταθερά $K < 1$.*

Παραδείγματα

12. **Συνέχεια απεικονίσεων Lipschitz**. Το επιχείρημα του ειδικού παραδείγματος 3, §1.2 μεταφέρεται αυτολεξί και στην γενικότερη αυτή περίπτωση και δείχνει ότι κάθε απεικόνιση Lipschitz είναι συνεχής. Έτσι λ.χ. η ίδια η συνάρτηση της απόστασης σε ένα μετρικό χώρο

$$d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι απεικόνιση Lipschitz με $K = 1$ και επομένως συνεχής, ως προς την μετρική του $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ που ορίσθηκε στο παράδειγμα 10. Αυτό προκύπτει από την ανισότητα

$$|d(x', y') - d(x, y)| \leq d(x, x') + d(y, y'),$$

που επαληθεύεται άμεσα, βάσει της τριγωνικής ανισότητας της d. Το δεξί μέλος της ανισότητας παριστάνει την απόσταση των $(x, y), (x', y')$ ως προς την μετρική του γινομένου.

13. **Πισωτράβηγμα μετρικής**. Αν υπάρχει μια $1-1$ απεικόνιση $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ και το $\mathcal{M}'$ είναι μετρικός χώρος με μετρική $d'(x,y)$, τότε μπορούμε να εφοδιάσουμε το $\mathcal{M}$ με μια μετρική $d(x,y)$, ορίζοντας
$$d(x,y) = d'(f(x), f(y)),$$
και μετατρέποντας την f σε μια ισομετρία των μετρικών χώρων. Η d ονομάζεται **πισωτράβηγμα** της $d'(x,y)$. Εάν ο $\mathcal{M}$ είναι ήδη τοπολογικός χώρος και η f είναι ομοιομορφισμός, τότε η τοπολογία που ορίζεται από αυτή την μετρική συμπίπτει με την αρχική τοπολογία του $\mathcal{M}$. Για παράδειγμα, τον ομοιομορφισμό $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ του παραδείγματος 15, §1.2, μπορούμε να τον μετατρέψουμε σε ισομετρία ορίζοντας την απόσταση δύο σημείων:
$$d(x,y) = d'(f(x), f(y)) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$
Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, τα ανοικτά του $\mathbb{R}$ ως προς αυτή τη μετρική θα συμπίπτουν με τα ανοικτά ως προς την συνήθη μετρική της απόλυτης τιμής.

Παρόμοια παραδείγματα μπορούμε να κατασκευάσουμε και με τις στερεογραφικές προβολές, ομοιομορφισμούς που ορίζονται στα παραδείγματα 16,17 της §1.2. Χρησιμοποιώντας τις αντίστροφες των στερεογραφικών προβολών
$$g : \mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1} - \{N\}$$
$$g(t_1, ..., t_{n-1}) = \frac{1}{1+||t||^2}(2t_1, ..., 2t_{n-1}, ||t||^2 - 1),$$
μπορούμε να ορίσουμε νέες μετρικές στους $\mathbb{R}^{n-1}$, διαφορετικές των συνήθων, μέσω των τύπων
$$d(t,t') = ||g(t) - g(t')|| = \frac{2||t-t'||}{\sqrt{1+||t||^2}\sqrt{1+||t'||^2}}.$$
Η τελευταία ισότητα προκύπτει με ένα απλό υπολογισμό από τους ορισμούς και χρήση της
$$||t||^2 = t_1^2 + ... + t_{n-1}^2.$$

14. **Γραμμικές απεικονίσεις**. Κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι απεικόνιση Lipschitz, επομένως συνεχής. Θεωρούμε εδώ τους διανυσματικούς χώρους με την συνήθη τοπολογία. Αν $\{e_1, ..., e_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε για οποιαδήποτε $x, y \in \mathbb{R}^n$ θα έχουμε
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 + ...x_n e_n) = x_1 f(e_1) + ... + x_n f(e_n) \quad \Rightarrow \\ ||f(x)|| &\le |x_1| \cdot ||f(e_1)|| + ... + |x_n| \cdot ||f(e_n)|| \\ &\le (|x_1| + ... + |x_n|) \max_i(||f(e_i)||) \;\Rightarrow \\ ||f(x)|| &\le K \cdot ||x|| \text{ όπου } K = \max_i(||f(e_i)||) \;\;\Rightarrow \\ ||f(x) - f(y)|| &= ||f(x-y)|| \le K \cdot ||x-y||. \end{aligned}$$
Ας σημειώσουμε ότι γραμμικές απεικονίσεις, δηλαδή απεικονίσεις f μεταξύ διανυσματικών χώρων $\mathcal{M}$ και $\mathcal{M}'$που ικανοποιούν τυπικά την
$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y),$$
ορίζονται και για χώρους απείρων διαστάσεων. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, ένα επιχείρημα, όπως το προηγούμενο, δεν είναι δυνατό, καθώς αυτό στηρίζεται στην ύπαρξη μιας βάσης με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Για χώρους απείρων διαστάσεων υπάρχουν παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων που δεν είναι συνεχείς (δες παράδειγμα 15). Αρκετές ωστόσο από τις γνωστές γραμμικές απεικονίσεις που ορίζονται σε αυτούς τους χώρους είναι συνεχείς. Για παράδειγμα, στον χώρο $B[0,1]$ η απεικόνιση E_x **εκτίμησης σε σημείο** $x \in [0,1]$ (θεωρώντας το x σταθερό και μεταβλητές τις f)
$$E_x(f) = f(x), \quad \text{για κάθε } f \in B[0,1] \;\; \text{ικανοποιεί} \;\; |E_x(f)| < ||f||_\infty,$$

άρα είναι συνεχής. Παρόμοια η **ολοκλήρωση** $I(f)$ μιας συνάρτησης $f \in C[0,1]$ είναι συνεχής γραμμική απεικόνιση, αφού ικανοποιεί

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx < ||f||_1 \text{ για κάθε } f \in C[0,1].$$

Ορισμός 2.1.6 *Έστω $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος.*

1. *Ο $\mathcal{M}$ λέγεται χώρος* **Hausdorff** *(ή T_2), αν*

$$\textit{Για κάθε } x \neq y \in \mathcal{M} \textit{ υπάρχουν περιοχές } U_x \ni x, U_y \ni y : U_x \cap U_y = \emptyset.$$

2. *Ο $\mathcal{M}$ λέγεται $1-$***αριθμήσιμος** *εάν σε κάθε σημείο του x υπάρχει μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του x, δηλαδή μιά αριθμήσιμη οικογένεια περιοχών U_n του x, έτσι ώστε γιά οποιοδήποτε ανοικτό $A \ni x$ να υπάρχει μία $U_n : x \in U_n \subset A$.*

3. *Ο $\mathcal{M}$ λέγεται $2-$***αριθμήσιμος** *εάν έχει αριθμήσιμη βάση ανοικτών.*

Θεώρημα 2.1.3 *Κάθε μετρικός χώρος είναι $1-$αριθμήσιμος και Hausdorff.*

Απόδειξη: Για τον πρώτο ισχυρισμό αρκεί σε κάθε σημείο x να πάρουμε τις μπάλες $B_{\frac{1}{n}}(x)$. Για τον δεύτερο παρατηρούμε ότι αν $x \neq y$, τότε $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2} \neq 0$ και οι μπάλες $B_\varepsilon(x)$, $B_\varepsilon(y)$ είναι προφανώς ξένες, ο.ε.δ.

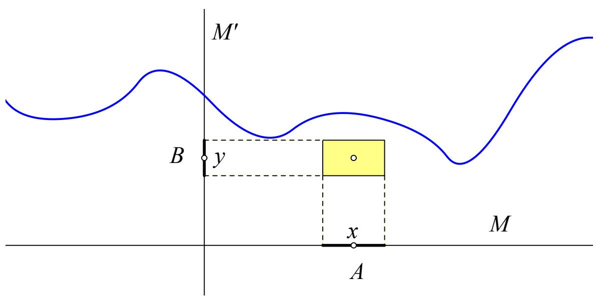
Θεώρημα 2.1.4 *Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι χώρος Hausdorff, τότε και μόνον, όταν η διαγώνιος $\Delta \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ είναι κλειστό σύνολο ως προς την τοπολογία γινόμενο.*

Απόδειξη: Η διαγώνιος ορίζεται ως το σύνολο των ζευγών $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathcal{M}\}$. Αν ο χώρος είναι Hausdorff, τότε κάθε ζεύγος $\Delta^c \ni (x,y) : x \neq y$ θα έχει περιοχές $U_x \ni x, U_y \ni y$ με $U_x \cap U_y = \emptyset$, που σημαίνει ότι $U_x \times U_y \subset \Delta^c$. Το επιχείρημα αντιστρέφεται και αυτό δείχνει την αλήθεια του θεωρήματος, ο.ε.δ.

Θεώρημα 2.1.5 *Εαν f είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ των μετρικών χώρων $(\mathcal{M}, d)$ και $(\mathcal{M}', d')$, τότε το γράφημα της απεικόνισης*

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{M}\},$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ ως προς την τοπολογία γινόμενο.



Σχήμα 2.1.3: Το γράφημα συνεχούς είναι κλειστό

Απόδειξη: Δια του σχήματος 2.1.3. Αν το $(x,y) \notin G_f$, τότε $f(x) \neq y$ και συνεπώς υπάρχουν δύο ξένες περιοχές (μπάλες) $B_{\varepsilon'}(f(x))$ και $B = B_\eta(y)$. Λόγω της συνέχειας της f θα υπάρχει, τότε, περιοχή $A = B_\varepsilon(x)$ με $f(B_\varepsilon(x)) \subset B_{\varepsilon'}(f(x))$. Βλέπουμε τότε εύκολα ότι το ανοικτό $A \times B$ του καρτεσιανού γινομένου, που είναι περιοχή του (x,y) δεν τέμνει το G_f. Αυτό δείχνει ότι το $(G_f)^c$ είναι ανοικτό, ο.ε.δ.

Στους μετρικούς χώρους μπορούμε να περιγράψουμε την συνέχεια με την βοήθεια ακολουθιών $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ που συγκλίνουν.

Ορισμός 2.1.7 *Λέμε ότι η ακολουθία σημείων $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ συγκλίνει στο σημείο x του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, όταν γιά κάθε περιοχή U_x του x, οι όροι της ακολουθίας περιέχονται* **τελικά** *στην U_x, με την έννοια ότι από ένα δείκτη και πέρα ($i > N$) όλα τα x_i περιέχονται στην U_x. Για το όριο γράφουμε εν συντομία*

$$x = \lim x_n.$$

Σχόλιο-6 Ο ορισμός για συγκλίνουσες ακολουθίες θα μπορούσε να μεταφερθεί αυτολεξί και στους γενικότερους τοπολογικούς χώρους ([Dug66, *σ.* 209]). Ωστόσο το 1-αριθμήσιμο της μετρικής τοπολογίας επιτρέπει ένα χαρακτηρισμό της συνέχειας συναρτήσεων που δεν γενικεύεται άμεσα. Στους μετρικούς χώρους μπορούμε να θεωρούμε ότι οι περιοχές U_x, που υπεισέρχονται στον ορισμό, είναι μπάλες με φθίνουσες ακτίνες (λ.χ. $B_{\frac{1}{n}}(x)$). Το *τελικά* σημαίνει ότι

$$\text{για δοθέν } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } N = N(x, \varepsilon) \;:\; n > N \;\Rightarrow\; d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Σχόλιο-7 Ο ℓ^∞ (παράδειγμα 8) είναι παράδειγμα μετρικού χώρου που δεν είναι $2-$αριθμήσιμος. Πράγματι, όπως είδαμε στο προαναφερθέν παράδειγμα, ο χώρος αυτός δεν είναι διαχωρίσιμος. Ωστόσο κάθε $2-$αριθμήσιμος χώρος είναι αυτόματα και διαχωρίσιμος, αφού ορίζεται αμέσως ένα πυκνό αριθμήσιμο σύνολο διαλέγοντας ένα σημείο σε κάθε ανοικτό μιας αριθμήσιμης βάσης. Τυπικά παραδείγματα $2-$αριθμήσιμων χώρων είναι οι $\mathbb{R}^n$ με την συνήθη τοπολογία. Σε αυτούς το σύνολο των μπαλών

$$\{B_r(x), x \in \mathbb{Q}^n, r = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

αποτελεί μια αριθμήσιμη βάση.

Θεώρημα 2.1.6 *Ένας μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος τότε και μόνον τότε αν είναι $2-$αριθμήσιμος.*

Απόδειξη: Αν είναι $2-$αριθμήσιμος, το επιχείρημα στο προηγούμεο σχόλιο δείχνει ότι θα είναι και διαχωρίσιμος. Αντίστροφα, αν είναι διαχωρίσιμος και έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, τότε βλέπουμε εύκολα ότι το σύνολο των μπαλών $\{B_r(x_n), r = \frac{1}{m}, m, n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας, ο.ε.δ.

Πόρισμα 2.1.1 *Κάθε υπόχωρος $\mathcal{N}$ ενός διαχωρίσιμου μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$ είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Εάν $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση ανοικτών του $\mathcal{M}$, τότε $\{\mathcal{N} \cap U_n, n \in \mathcal{N}\}$ είναι βάση της τοπολογίας του υπόχωρου $\mathcal{N}$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 2.1.7 *Ο χώρος ℓ^2 είναι διαχωρίσιμος και συνεπώς $2-$αριθμήσιμος.*

Απόδειξη: Θεώρησε τα αριθμήσιμα υποσύνολα $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \ldots$, όπου το A_n αποτελείται από τις ακολουθίες $\{x_k\} \in \ell^2$ των οποίων όλοι οι όροι είναι 0, εκτός των n πρώτων $\{x_1, \ldots, x_n\}$ που είναι ρητοί. Έστω το αριθμήσιμο σύνολο $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Για το τυχόν $y = \{y_i\} \in \ell^2$, για το οποίο, εξ ορισμού η σειρά $||y||_2 = \sum_i y_i^2$ συγκλίνει, και δοθέν $\varepsilon > 0$, έστω $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\sum_{i>N} y_i^2 < \varepsilon$. Διάλεξε και $x = \{x_i\} \in A_N$ έτσι ώστε

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i - x_i|^2 < \varepsilon \quad \Rightarrow ||x - y||_2^2 < 2\varepsilon,$$

από την οποία προκύπτει ότι το A είναι πυκνό υποσύνολο του ℓ^2, ο.ε.δ.

Θεώρημα 2.1.8 *Μία απεικόνιση f από τον μετρικό χώρο $(\mathcal{M}, d)$ στον $(\mathcal{M}', d')$, είναι συνεχής στο $x \in \mathcal{M}$, αν και μόνον αν, γιά κάθε ακολουθία $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ που συγκλίνει στο x η αντίστοιχη ακολουθία εικόνων $\{f(x_i), i \in \mathbb{N}\}$ συγκλίνει στο $f(x)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x και η ακολουθία $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ συγκλίνει στο x. Ας πάρουμε και περιοχή U_y του $y = f(x)$, τότε, λόγω της συνέχειας στο x, θα υπάρχει περιοχή U_x του x με $f(U_x) \subset U_y$. Λόγω της σύγκλισης $\lim x_n = x$ έπεται ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας περιέχονται τελικά στο U_x, άρα και όλοι οι όροι της ακολουθίας $\{f(x_n)\}$ περιέχονται τελικά στην U_y. Αυτό δείχνει ότι και $\lim y_n = y$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ που συγκλίνει στο x, έπεται ότι η αντίστοιχη ακολουθία $\{y_n = f(x_n)\}$ συγκλίνει στο $y = f(x)$. Έστω όμως ότι η f δεν είναι συνεχής στο x. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Πράγματι, τότε θα υπάρχει μιά περιοχή U_y του y έτσι ώστε σε κάθε περιοχή $B_{\frac{1}{n}}(x)$ να περιέχεται τουλάχιστον ένα $x_n : f(x_n) \notin U_y$. Προφανώς η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x, ενώ η $\{f(x_n)\}$ δεν συγκλίνει στο $y = f(x)$, πράγμα αντίθετο στην υπόθεση, ο.ε.δ.

Σχόλιο-8 Σχηματικά, βάσει του θεωρήματος, η συνέχεια της f μπορεί να χαρακτηρισθεί από την μεταθετικότητα των συμβόλων f και $\lim$ (εννοείται για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_n\}$).

$$f(\lim\, x_n) = \lim\, f(x_n).$$

Ορισμός 2.1.8 *Έστω A μη κενό υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$. Ορίζεται η* **απόσταση** $d(x, A)$ *ενός σημείου $x \in \mathcal{M}$ από το A, μέσω της*

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf_{y \in A}\{d(x, y)\},$$

η οποία είναι μια συνεχής απεικόνιση $d_A : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$d(x, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A}.$$

Απόσταση δύο υποσυνόλων A, B *λέμε τον αριθμό* $d(x, y) = \inf_{x \in A, y \in B}\{d(x, y)\}$.

Σχόλιο-9 Ο ορισμός χρειάζεται κάποιες συμπληρωματικές παρατηρήσεις. Το ότι η d_A είναι συνεχής, προκύπτει απ' το ότι η συνάρτηση αυτή είναι Lipschitz με σταθερά $K = 1$. Πράγματι η τριγωνική ανισότητα συνεπάγεται

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y),$$
$$\text{που χρησιμοποιούμενη για } z \in A \;\Rightarrow\; |d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y).$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός που περιέχεται στον ορισμό προκύπτει από το ότι αν $d(x, A) = 0$, τότε κάθε μπάλα $B_{\frac{1}{n}}(x)$ θα τέμνει το A και αντίστροφα.

Υπάρχει και μια άλλη έννοια *απόστασης υποσυνόλων* του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$ (λέγεται *απόσταση κατά Hausdorff* [Dug66, σ. 205], [Edg08, σ. 71]), χρήσιμη στην παραγωγή fractals ([Man89], [Fal90, σ. 113]) με την βοήθεια γενικών τοπολογικών μεθόδων, αλλά αυτή δεν θα μας απασχολήσει στο παρόν μάθημα.

Πόρισμα 2.1.2 *Για κάθε υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$ ισχύει $x \in \overline{A}$ αν και μόνον αν, υπάρχει ακολουθία $\{x_n\} \subset A$, που συγκλίνει στο x.*

Παράδειγμα 15 (**Μη συνεχής γραμμική**) Ας θεωρήσουμε τον διανυσματικό χώρο των πολυωνυμικών συναρτήσεων

$$P[0, 1] = \{f(x) = a_n x^n + ... + a_0,\; n \in \mathbb{N}, a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R}\} \subset C[0, 1].$$

Στο χώρο αυτό ορίζεται η **τυπική παραγώγιση** $T(f)$ μέσω της

$$T(f) = T(a_n x^n + ... + a_0) = n a_n x^{n-1} + ... + 2a_2 x + a_1, \text{ για κάθε} f \in P[0, 1].$$

Η γραμμική αυτή συνάρτηση δεν είναι Lipschitz, αφού λ.χ. $||T(x^n)||_\infty = ||nx^{n-1}||_\infty = n$. Αυτό συνεπάγεται ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει σταθερά $K > 0$ έτσι ώστε $||T(f)||_\infty \leq K||f||_\infty$.

Εύκολα βλέπουμε ότι δεν είναι και συνεχής. Πράγματι, η ακολουθία

$$\{f_n = \frac{x^n}{n}\}$$

συκλίνει στην μηδενική συνάρτηση $\lim f_n = 0$. Ωστόσο η $\{g_n = T(f_n) = x^{n-1}\}$ έχει $||g_n||_\infty = 1$ για κάθε n και συνεπώς δεν μπορεί να συγκλίνει στην μηδενική συνάρτηση.

Θεώρημα 2.1.9 *Μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ μεταξύ δύο χώρων με norm είναι συνεχής, αν και μόνον αν είναι Lipschitz.*

Απόδειξη: Εάν είναι Lipschitz, τότε, όπως αναλύσαμε παραπάνω στα παραδείγματα, θα είναι και συνεχής. Αντίστροφα, αν είναι συνεχής, θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{M}$, που ορίζεται από τα διανύσματα

$$S_M = \{x \in \mathcal{M} : ||x||_1 = 1\},$$

όπου $||x||_1$ συμβολίζει την norm του $\mathcal{M}$. Δείχνουμε πρώτα ότι η εικόνα $f(S_M) \subset \mathcal{M}'$ είναι φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει σταθερά $K > 0$ έτσι ώστε

$$||f(x)||_2 < K, \quad \text{για κάθε} \quad x \in S_M, \tag{1}$$

όπου $||y||_2$ συμβολίζει την norm του $\mathcal{M}'$. Πράγματι, αν δεν υπήρχε τέτοια σταθερά, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα υπήρχε $x_n \in S_M$ με $||f(x_n)||_2 > n$. Τότε η ακολουθία $\{y_n = \frac{1}{n}x_n\}$ του $\mathcal{M}$ θα ικανοποιούσε

$$\lim y_n = 0 \;\; \text{και} \quad ||f(y_n)||_2 > 1,$$

που αντιφάσκει στη συνέχεια της f, σύμφωνα με την οποία $0 = f(0) = f(\lim y_n) = \lim f(y_n)$. Ισχύει λοιπόν η (1) και συνεπώς

$$\text{για κάθε} \;\; x \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad ||f(x)||_2 < K \, ||x||_1, \tag{2}$$

αφού για $x \neq 0, x \in \mathcal{M}$ ισχύει $\frac{||f(x)||_2}{||x||_1} = ||f(\frac{x}{||x||_1})||_2 < K$. Η ανισότητα Lipschitz προκύπτει άμεσα από την (2) και την γραμμικότητα της f, ο.ε.δ.

Θεώρημα 2.1.10 *Κάθε υπόχωρος $\mathcal{N}$ πεπερασμένης διάστασης ενός απειροδιάστατου χώρου $\mathcal{M}$ με norm έχει πυκνό συμπλήρωμα $\mathcal{N}^c \subset \mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε περιοχή U_x σημείου $x \in \mathcal{M}$ τέμνει το $\mathcal{N}^c$. Πράγματι, αν δεν το έτεμνε, τότε θα ήταν $U_x \subset \mathcal{N}$. Μέσω της μεταφοράς κατά $-x$, που είναι ομοιομορφισμός του $\mathcal{M}$, θα παίρναμε περιοχή $\mathcal{N} \supset U_0 = -x+U_x$ του $0 \in \mathcal{M}$. Επειδή κάθε διάνυσμα $y \in \mathcal{M}$ έχει ένα $y' = \lambda \cdot y \in U_0$, όλο το $\mathcal{M}$ θα περιέχονταν στο $\mathcal{N}$, πράγμα άτοπο, ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.1.1 *Δείξε ότι αν $\{d_i(x,y), i = 1,\dots,n\}$ είναι μετρικές του χώρου $\mathcal{M}$ και $\{\lambda_i > 0, i = 1,\dots,n\}$ είναι σταθερές, τότε η $d(x,y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i(x,y)$ ορίζει μια μετρική στον $\mathcal{M}$.*

Άσκηση 2.1.2 *Δείξε ότι μια σφαίρα $S_r(x) = \{y \in \mathcal{M} : ||x-y|| = r\}$ ενός χώρου με norm $\mathcal{M}$ είναι κλειστό σύνολο και είναι το σύνορο της αντίστοιχης ανοικτής μπάλας, $B_r(x) = \{y \in \mathcal{M} : ||x-y|| < r\}$.*

Άσκηση 2.1.3 *Δείξε ότι το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης δεν ισχύει σε γενικούς μετρικούς χώρους. (Υπόδειξη: θεώρησε τυχόν σύνολο με την μετρική $d(x,y) = 1$ για $x \neq y$ και $d(x,x) = 0$).*

Άσκηση 2.1.4 *Δείξε ότι αν το x είναι σημείο συσσώρευσης του υποσυνόλου A του μετρικού χώρου $(\mathcal{M},d)$, τότε μπορούμε πάντοτε να βρούμε ακολουθία $\{x_n\}$, διαφορετικών ανά δύο, σημείων του A, η οποία να συγκλίνει στο x.*

Άσκηση 2.1.5 *Δείξε η $d(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$ ορίζει μια μετρική στο $\mathbb{R}$.*

Άσκηση 2.1.6 *Δείξε ότι αν το A είναι πεπερασμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου $(\mathcal{M},d)$, τότε είναι κλειστό.*

Άσκηση 2.1.7 *Έστω ότι το υποσύνολο A του μετρικού χώρου $(\mathcal{M},d)$ τέμνει την σφαίρα $S_r(x)$ και έχει διάμετρο $\delta(A) < r$. Δείξε ότι τότε το $A \subset B_{2r}(x)$.*

Άσκηση 2.1.8 *Δείξε ότι η ευθεία του επιπέδου* $A = \{(x, y) : y = 1\}$ *και το γράφημα* B *της συνάρτησης* $y = \frac{x}{1+|x|}$ *είναι δύο κλειστά σύνολα του* $\mathbb{R}^2$ *με την συνήθη τοπολογία, των οποίων η απόσταση* $d(A, B) = 0$.

Άσκηση 2.1.9 *Δείξε ότι το υποσύνολο* K *του μετρικού χώρου* (M, d) *είναι κλειστό, τότε και μόνον, όταν υπάρχει συνεχής συνάρτηση* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*, έτσι ώστε* $K = f^{-1}(\{0\})$.

Άσκηση 2.1.10 *Δώσε παράδειγμα ισομετρίας* f *ενός μετρικού χώρου* $(\mathcal{M}, d)$ *στον εαυτό του, που δεν έχει σταθερό σημείο, δηλαδή δεν υπάρχει* $x \in \mathcal{M}$ *με την ιδιότητα* $f(x) = x$.

Άσκηση 2.1.11 *Δείξε ότι σε κάθε διανυσματικό χώρο ορίζεται μια norm. (Υπόδειξη: Ένας τρόπος ορισμού norm περιέχεται στο πόρισμα 5.2.2.)*

Άσκηση 2.1.12 *Δείξε ότι αν* $\{(\mathcal{M}_i, ||.||_i), i = 1, \ldots, n\}$ *είναι διανυσματικοί χώροι με norm, τότε ο* $\mathcal{M}$= $\mathcal{M}_1 \times ... \times \mathcal{M}_n$ *είναι χώρος με norm* $||(x_1, \ldots, x_n)|| = ||x_1||_1 + \cdots + ||x_n||_n$. *Χρησιμοποιώντας αυτού του είδους τις norm στους αντίστοιχους χώρους γινόμενα, δείξε ότι η απεικόνιση της πρόσθεσης*

$$+ : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, (x, y) \mapsto x + y,$$

και του πολλαπλασιασμού με αριθμούς

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x,$$

είναι συνεχείς απεικονίσεις για ένα χώρο με norm $\mathcal{M}$.

2.2 Πληρότητα μετρικής

Ορισμός 2.2.1 Ακολουθίες Cauchy *ονομάζονται ακολουθίες* $\{x_n\}$ *ενός μετρικού χώρου* $(\mathcal{M}, d)$ *με την ιδιότητα*

η απόσταση των όρων τους $d(x_m, x_n)$ *να τείνει τελικά στο* 0.

Εννοούμε εδώ ότι γιά κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $N = N(\varepsilon)$*, έτσι ώστε* $n, m > N$ *να συνεπάγεται* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Σχόλιο-1 Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Ωστόσο το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ως μετρικό χώρο $(\mathcal{M}, d)$ τον χώρο $\mathbb{Q}$ με την σχετική τοπολογία, που ορίζεται από την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$, τότε η ακολουθία ρητών που ορίζεται επαγωγικά

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),$$

συγκλίνει στο $\sqrt{2}$ το οποίο όμως δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}$. Η ακολουθία αυτή, ως συγκλίνουσα είναι Cauchy, στο χώρο $(\mathcal{M}, d)$. Ωστόσο δεν συγκλίνει σε σημείο αυτού του χώρου. Όπως θα δούμε παρακάτω, μετρικοί χώροι μπορεί να παρουσιάζουν κενά (τρύπες) τα οποία, όμως μπορούμε να εξαλείψουμε, επεκτείνοντας το χώρο με κατάλληλο τρόπο. Η διαδικασία αυτή πλήρωσης των κενών έχει ως πρότυπο την πλήρωση του $\mathbb{Q}$ και την δημιουργία απ' αυτό του $\mathbb{R}$, το οποίο, ακριβώς, καλύπτει τα (πολλά) κενά του $\mathbb{Q}$ συμπληρώνοντάς το με τους άρρητους αριθμούς. Το συγκεκριμένο παράδειγμα, θα επεξεργαστούμε επίσης παρακάτω.

Σχόλιο-2 Κάθε ακολουθία Cauchy $\{x_n\}$ είναι φραγμένη. Πράγματι, αν

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ για κάθε } \quad n, m > N(\varepsilon)$$

και κρατήσουμε ένα τέτοιο $n > N(\varepsilon)$ σταθερό και αφήσουμε το m να τείνει στο άπειρο, τότε για κάθε τέτοιο m η $d(x_n, x_m) < N(\varepsilon)$ σημαίνει ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός ενδεχομένως κάποιων πεπερασμένου πλήθους, περιέχονται στην ανοικτή μπάλα $B_N(x_n)$.

Ορισμός 2.2.2 Πλήρης μετρικός χώρος *λέγεται εκείνος του οποίου κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.* **Χώρος Banach** *λέγεται ένας διανυσματικός χώρος με norm, ως προς την μετρική της οποίας είναι πλήρης.*

Παραδείγματα

1. **Οι χώροι $\mathbb{R}^n$.** Στο μάθημα προϋποθέτουμε την γνώση των πραγματικών αριθμών και ότι από την κατασκευή τους είναι ένας πλήρης χώρος ([Σπί04, σελ. 502]). Η διαδικασία κατασκευής του $\mathbb{R}$ από το $\mathbb{Q}$ είναι, στην ουσία, αυτή που περιγράφεται παρακάτω στο θεώρημα 2.2.5. Γενικότερα, είναι εύκολο να δούμε ότι αν οι μετρικοί χώροι $(\mathcal{M}_1, d_1)$, ..., $(\mathcal{M}_n, d_n)$ είναι πλήρεις, τότε και το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{M}= \mathcal{M}_1 \times ... \times \mathcal{M}_n$ εφοδιασμένο με την μετρική
$$\begin{aligned} d(x,y) &= d_1(x_1,y_1) + ... + d_n(x_n,y_n), \\ &\text{για } \ x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n) \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$
είναι πλήρης μετρικός χώρος. Από αυτό και την εκ κατασκευής πληρότητα του $\mathbb{R}$ συνάγουμε εύκολα την πληρότητα της μετρικής $d(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$ του $\mathbb{R}^n$. Από την πληρότητα αυτής της μετρικής έπεται κατά προφανή τρόπο και η πληρότητα κάθε άλλης μετρικής $d'(x,y)$ του $\mathbb{R}^n$, για την οποία υπάρχει σταθερά $K > 0$ έτσι ώστε
$$d'(x,y) \le K\, d(x,y) \ \text{ για κάθε } \ x,y \in \mathbb{R}^n.$$
Παράδειγμα μιάς τέτοιας d' είναι και η συνήθης μετρική d' του $\mathbb{R}^n$, που ικανοποιεί
$$\begin{aligned} d'(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} \\ &\le \ |x_1-y_1| + \cdots + |x_n-y_n| = d(x,y). \end{aligned}$$
Όπως θα δούμε παρακάτω, δύο οποιεσδήποτε norm $||x||_1$ και $||x||_2$ του $\mathbb{R}^n$ είναι **ισοδύναμες**, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $K' \ge K > 0$, έτσι ώστε
$$K\,||x||_2 \le ||x||_1 \le K'\,||x||_2 \quad \text{για κάθε } \ x,y \in \mathbb{R}^n,$$
πράγμα που συνεπάγεται ότι αν ο $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης ως προς κάποια μετρική προερχόμενη από μία norm, τότε είναι πλήρης και ως προς κάθε άλλη παρόμοια μετρική.

2. **Μια μη-πλήρης μετρική του $\mathbb{N}$.** Στο $\mathbb{N}$ ορίζουμε την συνάρτηση
$$d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$
Εύκολα βλέπουμε ότι η d ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής. Εύκολα επίσης βλέπουμε ότι η ακολουθία $\{x_n = n\}$ είναι ακολουθία Cauchy ως προς αυτή την μετρική
$$\left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$
Προφανώς όμως δεν υπάρχει ακέραιος προς τον οποίο να συγκλίνει αυτή η ακολουθία.

3. **Συμπαγοποίηση του $\mathbb{C}$.** Χρησιμοποιούμε εδώ μια μετρική $d(z_1, z_2)$ του $\mathbb{C}$, που ταυτίζουμε με το $\mathbb{R}^2$ και είναι διαφορετική από αυτήν της μιγαδικής απόλυτης τιμής. Η μετρική αυτή ορίζεται στο παράδειγμα 13 της §2.1, και καθιστά το $\mathbb{C}$ ισομετρικό με την $S^2 - \{N\} \subset \mathbb{R}^3$ με την μετρική του που εισάγεται από την συνήθη μετρική του $\mathbb{R}^3$. Το **συμπαγοποιημένο μιγαδικό επίπεδο** είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, στο οποίο έχουμε επισυνάψει ένα σημείο στο άπειρο, το οποίο θεωρούμε ότι αντιστοιχεί, μέσω της στερεογραφικής προβολής στο εξαιρετέο σημείο N, γι' αυτό συμβολίζουμε με ∞. Το σύνολο λοιπόν είναι το $\mathcal{M}$=$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ και η μετρική είναι μια επέκταση της (ας πούμε στερεογραφικής) $d(z_1, z_2)$ που δίδεται από τον τύπο (με απόλυτη τιμή αυτή των μιγαδικών):
$$d(z_1,z_2) = \begin{cases} \dfrac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, & \text{όταν } \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \dfrac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & \text{όταν } \ z_1 \in \mathbb{C} \ \text{ και } \ z_2 = \infty, \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι, ως προς αυτή την μετρική η στερεογραφική προβολή f επεκτείνεται, ορίζοντας $f(N) = \infty$, σε μια ισομετρία της S^2 με το $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ας δούμε τώρα ότι αυτός ο μετρικός χώρος είναι πλήρης. Προς τούτο, θεωρούμε ότι η ακολουθία $\{z_n\}$ του $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ είναι Cauchy και δείχνουμε ότι συγκλίνει. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: (α) η ακολουθία των μιγαδικών να είναι φραγμένη $|z_n| < M$ για κάποιο $M > 0$ και (β) η ακολουθία να μην είναι φραγμένη. Στην πρώτη περίπτωση θα ισχύει

$$d(z_m, z_n) = \frac{2|z_m - z_n|}{\sqrt{1+|z_m|^2}\sqrt{1+|z_n|^2}} \geq \frac{2}{1+M^2}|z_m - z_n|,$$

απο την οποία προκύπτει ότι η ακολουθία είναι Cauchy και ως προς την συνήθη μετρική του $\mathbb{C}$, που είναι πλήρης, άρα η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο σημείο $\zeta \in \mathbb{C}$ ως προς την συνήθη μετρική της μιγαδικής απόλυτης τιμής. Το ότι τότε η ακολουθία θα συγκλίνει και ως προς d έπεται από την προφανή

$$d(z, z') \leq 2|z - z'|.$$

Στην δεύτερη περίπτωση, της μη φραγμένης ακολουθίας, υπάρχουν πάλι δύο ενδεχόμενα: (β1) η ακολουθία να περιέχει άπειρους όρους ίσους με ∞ και (β2) να μην περιέχει ή να περιέχει πεπερασμένο πλήθος όρων ίσων με το ∞. Στην πρώτη περίπτωση βλέπουμε εύκολα ότι η ακολουθία θα πρέπει να είναι τελικά σταθερή και όλοι οι όροι της να είναι τελικά ίσοι με ∞. Στην δεύτερη περίπτωση, δείχνουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει στο ∞. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση, για κάθε $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ όλοι οι όροι της ακολουθίας θα είναι τελικά

$$M < |z_n| \;\Rightarrow\; d(\infty, z_n) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_n|^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+M^2}} \leq 2\varepsilon.$$

Σημειωτέον, ότι θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε την πληρότητα του $\mathbb{C}\cup\infty$ από αυτήν του S^2, που θα δείξουμε παρακάτω. Σε αυτό θα χρησιμοποιούσαμε το γεγονός ότι η απεικόνιση που ορίσθηκε παραπάνω είναι μια ισομετρία ως προς τις αντίστοιχες μετρικές.

4. **Μη διατήρηση πληρότητας.** Πολλά χαρακτηριστικά τοπολογικών χώρων διατηρούνται μέσω ομοιομορφισμών, όχι όμως η πληρότητα. Ένα παράδειγμα δίδει η $''$στερεογραφική μετρική$''$ του R^2 του προηγούμενου παραδείγματος. Θεωρούμε λοιπόν εδώ το $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ με αυτήν την μετρική και την ειδική ακολουθία $\{z_n = \frac{1}{n}\}$. Η ακολουθία αυτή είναι Cauchy, αφού

$$d(z_m, z_n) = \frac{2|z_m - z_n|}{\sqrt{1+|z_m|^2}\sqrt{1+|z_n|^2}} < 2\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|.$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο ∞, το οποίο όμως δεν το έχουμε συμπεριλάβει στον χώρο μας. Αρα ο χώρος $\mathbb{R}^2$ είναι μη πλήρης ως προς αυτή την μετρική. Έχουμε εδώ ένα παράδειγμα τοπολογικού χώρου ($\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$) και δύο μετρικών σε αυτόν (την συνήθη d_1 και την στερεογραφική d_2), που ορίζουν την ίδια τοπολογία (τα ίδια ανοικτά). Αυτό σημαίνει ότι η ταυτοτική απεικόνιση $id : (\mathcal{M}, d_1) \to (\mathcal{M}, d_2)$ είναι συνεχής και η αντίστροφή της επίσης, άρα ομοιομορφισμός. Ωστόσο η μία μετρική (d_1) είναι πλήρης ενώ η άλλη δεν είναι. Συμπεραίνουμε ότι η πληρότητα ενός μετρικού τοπολογικού χώρου εξαρτάται από την ειδική μετρική και όχι την τοπολογία που ορίζει αυτή η μετρική και μπορεί να είναι η ίδια με την τοπολογία άλλων (ισοδύναμων) μετρικών, που ορίζονται στον ίδιο χώρο.

Θεώρημα 2.2.1 *Το υποσύνολο $A \subset \mathcal{M}$ ενός πλήρους μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς την εισαγόμενη από το $\mathcal{M}$ μετρική, τότε και μόνον, όταν είναι κλειστό.*

Απόδειξη: Εάν το (A, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $x \in \overline{A}$, τότε υπάρχει ακολουθία $\{x_n\} \subset A$ που συγκλίνει στο x. Ως συγκλίνουσα, η ακολουθία είναι και Cauchy, άρα συγκλίνει σε σημείο του A, συνεπώς $x \in A$.

Αντίστροφα, αν το A είναι κλειστό, και $\{x_n\} \subset A$ είναι ακολουθία Cauchy, τότε συγκλίνει σε σημείο $x \in \mathcal{M}$, λόγω της πληρότητας του $\mathcal{M}$. Επειδή το A είναι κλειστό, έπεται και $x \in A$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 2.2.2 *Οι χώροι $B(X,\mathbb{R})$ είναι χώροι Banach, δηλαδή είναι πλήρεις ως προς την μετρική που εισάγεται από την norm*

$$||f-g|| = sup_{x\in X}\{|f(x)-g(x)|\}.$$

Απόδειξη: Οι χώροι αυτοί ορίσθηκαν στο παράδειγμα 4 της §2.1. Εάν $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία Cauchy αυτού του χώρου, τότε για κάθε $x \in X$ θα ισχύει

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq ||f_m - f_n||,$$

συνεπώς και η ακολουθία των αριθμών $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}$ θα είναι Cauchy και θα συγκλίνει, λόγω της πληρότητας του $\mathbb{R}$. Ορίζεται λοιπόν για κάθε x ο αριθμός $g(x) = \lim f_n(x)$. Η $g \in B(X,\mathbb{R})$ διότι αν η g δεν ήταν φραγμένη, θα υπήρχε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ έτσι ώστε $g(x_n) > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και λόγω της $g(x_n) = lim_k f_k(x_n)$, θα υπήρχε f_{k_n} με

$$n < f_{k_n}(x_n) < ||f_{k_n}||.$$

Αυτό σημαίνει ότι η υπακολουθία $||f_{k_n}||$ της $\{||f_n||\}$ είναι μη φραγμένη. Ωστόσο από το ότι η ακολουθία $\{f_n\}$ είναι Cauchy έπεται ότι και η $\{||f_n||\}$ είναι ακολουθία Cauchy πραγματικών αριθμών, αφού

$$|\,||f_m|| - ||f_n||\,| \leq ||f_m - f_n||.$$

Συνάγεται (σχόλιο 2.2) ότι η $\{||f_n||\}$ είναι φραγμένη. Το άτοπο αποδεικνύει το θεώρημα, ο.ε.δ.

Θεώρημα 2.2.3 *Για κάθε μετρικό τοπολογικό χώρο $(\mathcal{M},d)$, το σύνολο $C(\mathcal{M},\mathbb{R})$ των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ είναι υπόχωρος και κλειστό υποσύνολο του $B(\mathcal{M},\mathbb{R})$, άρα πλήρης τοπολογικός χώρος (Banach).*

Απόδειξη: Για την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι ο $C(\mathcal{M},\mathbb{R})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $B(\mathcal{M},\mathbb{R})$. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι αν η ακολουθία των συναρτήσεων $\{f_n\} \subset C(\mathcal{M},\mathbb{R})$ συγκλίνει στην $f \in B(\mathcal{M},\mathbb{R})$, τότε η $f \in C(\mathcal{M},\mathbb{R})$. Για να δείξουμε πάλι το τελευταίο αρκεί να δούμε ότι για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$, που συγκλίνει $\lim x_n = x$, έπεται ότι και η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ συγκλίνει στο $f(x)$. Αυτό στηρίζεται στις

$$\begin{aligned}
f(x_n) - f(x) &= f(x_n) - f_k(x_n) + f_k(x_n) - f_k(x) + f_k(x) - f(x) \Rightarrow \\
||f(x_n) - f(x)|| &\leq ||f(x_n) - f_k(x_n)|| + ||f_k(x_n) - f_k(x)|| \\
&\qquad + ||f_k(x) - f(x)|| \Rightarrow \\
&||f(x_n) - f(x)|| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

που επιτυγχάνεται λόγω της συνέχειας των $\{f_k\}$ καθώς και του ότι $\lim\, ||f_k - f|| = 0$, αρκεί, για δεδομένο ε, να επιλέξουμε κατάλληλους δείκτες k και n, ο.ε.δ.

Θεώρημα 2.2.4 *Οι χώροι ℓ^p για $1 \leq p \leq \infty$ είναι πλήρεις χώροι (Banach).*

Απόδειξη: Έστω $\{x_k\}^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, ακολουθία Cauchy του χώρου ℓ^p. Τότε για δοθέν $\varepsilon > 0$ θα ισχύει τελικά

$$||\{x_k\}^{(n)} - \{x_k\}^{(m)}||_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{1}$$

Αυτή, για κάθε σταθερό k συνεπάγεται ότι η αντίστοιχη ακολουθία, τελικά ικανοποιεί την

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon,$$

δηλαδή είναι Cauchy, άρα, λόγω της πληρότητας του $\mathbb{R}$, συγκλίνει σε σημείο $x_k^{(0)}$. Από την (1) έπεται ότι για κάθε N θα υπάρχει $n_0(N)$, ώστε να ισύχει τελικά, (για κάθε $n, m > n_0(N)$)

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Παίρνοντας σε αυτήν το όριο για $n \to \infty$ έχουμε ότι, για $m > n_0$ και κάθε N, θα ισχύει

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(0)} - x_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \varepsilon, \quad \Rightarrow \\ ||\{x_k\}^{(0)} - \{x_k\}^{(m)}||_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(0)} - x_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Από αυτήν έπεται ότι το $\{x_k\}^{(0)} \in \ell^p$, αφού

$$||\{x_k\}^{(0)}||_p \leq ||\{x_k\}^{(m)}||_p + ||\{x_k\}^{(0)} - \{x_k\}^{(m)}||_p \ ,$$

καθώς επίσης και ότι η ακολουθία $\{x_k\}^{(n)}$ συγκλίνει στο $\{x_k\}^{(0)}$, ο.ε.δ.

Το ενδεχόμενο μειονέκτημα ενός μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, να μην είναι πλήρης, θεραπεύεται με κάποιο τρόπο. Αυτός συνίσταται στο να τον επεκτείνουμε επισυνάπτοντας τα σημεία που ″λείπουν″. Μια καθιερωμένη μέθοδος είναι να τον τοποθετήσουμε (απεικονίσουμε) ισομετρικά και σαν πυκνό υποσύνολο, μέσα σε έναν άλλο μετρικό χώρο, που είναι πλήρης. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται με τον όρο της **πλήρωσης** ενός μετρικού μη-πλήρους χώρου.

Ορισμός 2.2.3 *Ένας πλήρης μετρικός χώρος* $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{d})$ *λέγεται* **πλήρωση** *του μετρικού χώρου* $(\mathcal{M}, d)$*, όταν υπάρχει ισομετρία* $f : \mathcal{M} \to \widetilde{\mathcal{M}}$*, έτσι ώστε το* $f(\mathcal{M})$ *να είναι πυκνό υποσύνολο του* $\widetilde{\mathcal{M}}$*.*

Σχόλιο-3 Το κλασικό παράδειγμα πλήρωσης είναι αυτό των ρητών $(\mathbb{Q}, |x-y|)$, των οποίων η πλήρωση δίδει τους πραγματικούς αριθμούς $(\mathbb{R}, |x-y|)$. Η παραδοσιακή διαδικασία αυτής της πλήρωσης είναι και το πρότυπο για την γενική περίπτωση. Στην περίπτωση των ρητών, η διαδικασία περιγράφεται ως εξής:

1. Ορίζεται στο σύνολο $\mathcal{C}$ των ακολουθιών Cauchy του $\mathbb{Q}$ μια σχέση ισοδυναμίας $\approx$.
2. Δύο ακολουθίες Cauchy θεωρούνται ισοδύναμες όταν $\lim |x_n - y_n| = 0$.
3. Το $\mathbb{R}$ ταυτίζεται με το σύνολο-πηλίκον $\mathcal{C}/\approx$.

Αυτά μπορούν να μεταφερθούν και σε γενικούς μετρικούς χώρους και οδηγούν στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.5 *Κάθε μετρικός χώρος* $(\mathcal{M}, d)$ *έχει μια πλήρωση* $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{d})$*.*

Απόδειξη: Η απόδειξη ([KF70, σ. 62]) είναι, στην ουσία, απομίμηση της διαδικασίας της κατασκευής των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς και περιλαμβάνει τέσσερα στάδια: (α) την κατασκευή του $\widetilde{\mathcal{M}}$, (β) την κατασκευή της ισομετρίας $f : \mathcal{M} \to \widetilde{\mathcal{M}}$, (γ) την απόδειξη της πυκνότητας του $f(\mathcal{M})$ στο $\widetilde{\mathcal{M}}$ και (δ) την απόδειξη της πληρότητας του $\widetilde{\mathcal{M}}$.

(α) Στο σύνολο $\mathcal{C}$, των ακολουθιών Cauchy του $\mathcal{M}$, ορίζουμε την σχέση

$$\{x_n\} \approx \{y_n\} \quad \Leftrightarrow \quad \lim d(x_n, y_n) = 0.$$

Βλέπουμε εύκολα ότι αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας και επομένως ορίζεται το σύνολο-πηλίκον $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{C}/\approx$. Αν με $[x_n] \in \widetilde{\mathcal{M}}$ συμβολίζουμε την κλάση της ακολουθίας Cauchy $\{x_n\}$, τότε ορίζουμε ως απόσταση στο $\widetilde{\mathcal{M}}$, την

$$\widetilde{d}([x_n], [y_n]) = \lim d(x_n, y_n).$$

Και πάλι είναι εύκολο να δούμε ότι η $\widetilde{d}$ δεν εξαρτάται από τον ειδικό αντιπρόσωπο των κλάσεων $[x_n], [y_n]$ και ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής.

(β) Ορίζουμε την ισομετρία

$$f : \mathcal{M} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}, \quad f(x) = [x], \ \text{για κάθε } x \in \mathcal{M}.$$

Το $[x]$ εδώ παριστάνει την κλάση της σταθερής ακολουθίας $x, x, x, ...$ και το ότι η f είναι ισομετρία, είναι πάλι προφανές.

(γ) Για την πυκνότητα του $f(\mathcal{M})$ στο $\widetilde{\mathcal{M}}$ δείχνουμε ότι κάθε στοιχείο $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ είναι όριο μιας ακολουθίας $\{f(x_n)\}$ του $f(\mathcal{M})$. Πράγματι, αν $\widetilde{x} = [x_n]$, όπου $\{x_n\}$ ακολουθία Cauchy του $\mathcal{M}$, τότε

$$\text{για κάθε } k \in \mathbb{N} \text{ υπάρχει } \quad n_k : d(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{k} \text{ για κάθε } n > n_k.$$

Ορίζεται τότε η $f(x_{n_k})$ μέσω της αντίστοιχης σταθερής ακολουθίας $[x_{n_k}]$ και

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(\widetilde{x}, f(x_{n_k})) = \widetilde{d}([x_n], [x_{n_k}]) = \lim_n d(x_n, x_{n_k}) \leq \frac{1}{k} \\ \Rightarrow \quad \lim_k \widetilde{d}(\widetilde{x}, f(x_{n_k})) = 0. \end{aligned}$$

(δ) Για την πληρότητα του $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{d})$, θεωρούμε μια ακολουθία Cauchy $\{x_n\}$ αυτού του χώρου. Κατά την (γ) θα υπάρχει ακολουθία $\{y_n\}$ του $\mathcal{M}$ έτσι ώστε

$$\widetilde{d}(x_n, f(y_n)) < \frac{1}{n}.$$

Η ακολουθία $\{y_n\}$ είναι Cauchy και επομένως ορίζει ένα στοιχείο $y = [y_n] \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Τούτο διότι η f είναι ισομετρία και επομένως

$$\begin{aligned} d(y_m, y_m) = \widetilde{d}(f(y_m), f(y_m)) &\leq \widetilde{d}(f(y_m), x_m) + \widetilde{d}(x_m, x_n) + \widetilde{d}(x_n, f(y_n)) \\ &< \frac{1}{m} + \widetilde{d}(x_m, x_n) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Δείχνουμε τώρα ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει στο $y = [y_n] \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Πράγματι

$$\widetilde{d}(x_n, y) \leq \widetilde{d}(x_n, f(y_n)) + \widetilde{d}(f(y_n), y) \leq \frac{1}{n} + \widetilde{d}(f(y_n), y) = \frac{1}{n} + \lim_k d(y_n, y_k).$$

Ο τελευταίος όρος, όμως, μπορεί να γίνει μικρότερος του ε, αρκεί το n να ληφθεί αρκετά μεγάλο. Αυτό δείχνει την απαιτούμενη σύγκλιση και ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος, ο.ε.δ.

Θεώρημα 2.2.6 *Δύο πληρώσεις $(\mathcal{M}', d')$ και $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{d})$ του ίδιου μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$ είναι ισομετρικές.*

Απόδειξη: Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχουν δύο ισομετρίες $f : \mathcal{M} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ και $f' : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, έτσι ώστε τα $f(\mathcal{M}), f'(\mathcal{M})$ να είναι πυκνά υποσύνολα, αντίστοιχα, των $\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{M}'$. Αυτό που κάνουμε, είναι να επεκτείνουμε την ισομετρία

$$g = f' \circ f^{-1} : f(\mathcal{M}) \longrightarrow f'(\mathcal{M})$$

σε μια ισομετρία

$$g' : \widetilde{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}'.$$

Αυτό γίνεται με την φυσιολογική διαδικασία, κατά την οποία, κάθε $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$ γράφεται σαν όριο μιάς ακολουθίας $\{x_n\} \subset f(\mathcal{M})$ και αντιστοιχίζεται στο $g'(x) \in \mathcal{M}'$, που είναι το όριο της $\{y_n = g(x_n)\}$. Το ότι η $\{y_n\}$ συγκλίνει προκύπτει από το ότι η $\{x_n\}$, ως συγκλίνουσα, είναι Cauchy και επομένως και η ισομετρική της $\{y_n\}$ είναι Cauchy, άρα συγκλίνει στο $\mathcal{M}'$. Εύκολα βλέπουμε επίσης ότι η αντιστοίχιση αυτή δεν εξαρτάται από την ειδική ακολουθία $\{x_n\}$ που συγκλίνει στο x και ότι η g' είναι ισομετρία, ο.ε.δ.

Θεώρημα 2.2.7 *(Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach) Κάθε απεικόνιση συστολής $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ ενός πλήρους μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο.*

Απόδειξη: Το θεώρημα λέει, ακριβέστερα, ότι για μια απεικόνιση συστολής, δηλαδή απεικόνιση με την ιδιότητα

$$d(f(x), f(y)) \leq K\, d(x, y), \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathcal{M},$$

όπου $0 \leq K < 1$ σταθερά, και κάθε αρχικό σημείο $x_0 \in \mathcal{M}$ η $''$επαναληπτική διαδικασία$''$

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad \text{για} \quad n = 1, 2, ...$$

ορίζει μια συγκλίνουσα ακολουθία με όριο $\lim x_n = x$ που ικανοποιεί την $f(x) = x$. Το συμπέρασμα προκύπτει από το ότι η ακολουθία που ορίζεται με αυτή την διαδικασία είναι Cauchy. Πράγματι,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1}) \leq K\, d(x_n, x_{n-1}) \quad \text{επαγωγικά} \quad \Rightarrow \\ d(x_{n+1}, x_n) &\leq K^n\, d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Για $m > n$, χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (K^{m-1} + ... + K^n)\, d(x_1, x_0) \\ &= K^n\, (1 + K + K^2 + ... + K^{m-n-1})\, d(x_1, x_0) \Rightarrow \\ &< \frac{K^n}{1-K}\, d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

που δείχνει άμεσα ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι Cauchy, άρα συγκλίνει σε σημείο x, το οποίο λόγω της συνέχειας της f θα ικανοποιεί

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x.$$

Το ότι το σταθερό αυτό σημείο είναι μοναδικό προκύπτει επίσης άμεσα, αφού αν ύπήρχε δεύτερο $x' \neq x$, τότε θα ίσχυε

$$d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq K\, d(x, x') \quad \text{που συνεπάγεται} \quad 1 \leq K,$$

αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.

Σχόλιο-4 Ας ξαναδούμε το σχόλιο στην αρχή της παραγράφου υπό το πρίσμα του προηγουμένου θεωρήματος. Η συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $\mathcal{M} = [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \ \text{είναι Lipschitz με}\ K = \frac{1}{2} : \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}\, |x - y|.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από τις

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2x} > 1 \ \text{και την}\ \ f(x) - f(y) = (x - y)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right).$$

Κατά το θεώρημα, η f θα έχει στο $\mathcal{M}$ ένα ακριβώς σταθερό σημείο

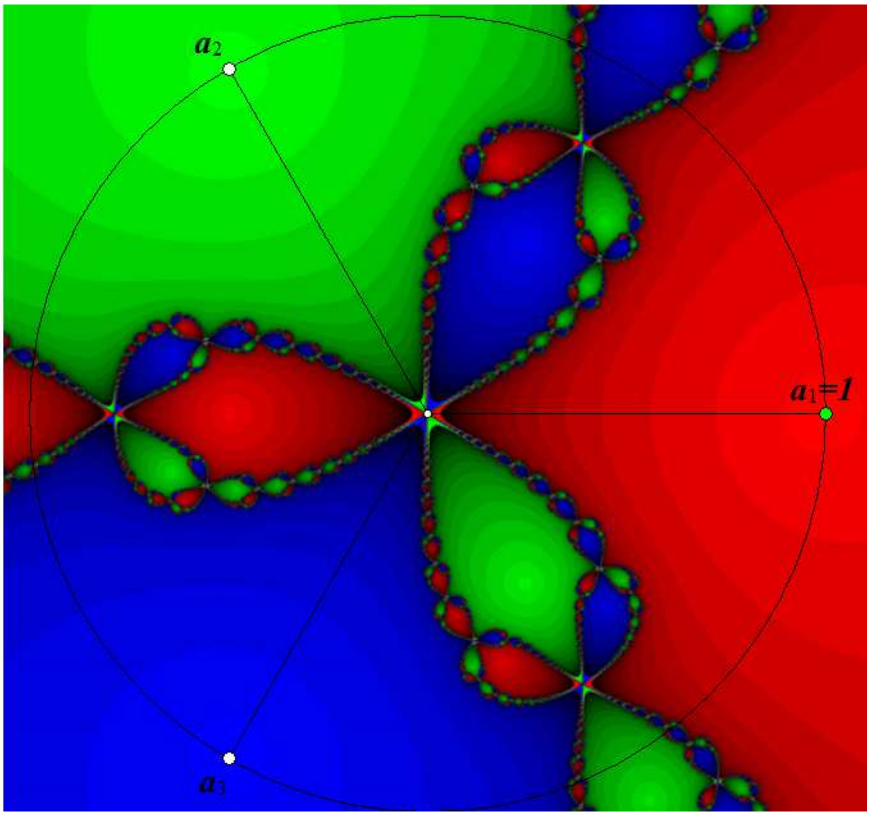
$$x = f(x) \ \Leftrightarrow \ x^2 = 2 \ \Leftrightarrow \ x = \sqrt{2}.$$

Ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι, για $a > 1$ η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}\right) \tag{*}$$

έχει στο $[1, \infty)$ ένα σταθερό σημείο x_0 που συμπίπτει με την $k-$στή ρίζα $x_0 = \sqrt[k]{a}$.

Σημειωτέον ότι η $''$καλή$''$ ιδιότητα της συνάρτησης (*), δηλαδή το ότι είναι συστολή, εξαρτάται από το πεδίο ορισμού στο οποίο την περιορίζουμε. Διευρύνοντας το πεδίο ορισμού η συνάρτηση παύει να είναι συστολή και η επαναληπτική διαδικασία γίνεται απρόβλεπτη. Το σχήμα 2.2.4 λ.χ. καταγράφει την συμπεριφορά της ανάλογης μιγαδικής της (*). Τα a, x σε αυτή την περίπτωση είναι μιγαδικοί αριθμοί και το $k = 3$. Η αντίστοιχη f έχει τρία σταθερά σημεία $\{a_1, a_2, a_3\}$ που είναι οι (μιγαδικές) ρίζες της μονάδας $a = 1$. Ανάλογα με την θέση του αρχικού z_0, η επαναληπτική διαδικασία (ακολουθία) $\{z_{n+1} = f(z_n)\}$ μπορεί να συγκλίνει προς μία εκ των $\{a_i\}$ ή και να μην συγκλίνει ([Fal90, σ. 220], [Mil06], [Car11]). Τα σημεία σύγκλισης περιέχονται, ανάλογα με το προς ποιά ρίζα a_i συγκλίνει η αντίστοιχη ακολουθία



Σχήμα 2.2.4: $z_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2z_n + \frac{1}{z_n^2}\right)$

$\{z_n\}$, σε τρία ανοικά υποσύνολα του επιπέδου A_1, A_2, A_3, που λέγονται περιοχές του Fatou της ρητής συνάρτησης (*). Καθένα από τα A_i έχει άπειρες συνεκτικές συνιστώσες, που στο σχήμα αποδίδονται με το ίδιο χρώμα. Η ένωσή τους $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ είναι ένα πυκνό σύνολο του επιπέδου. Το σύνορο ∂A του A, λέγεται σύνολο του Julia της ρητής μιγαδικής συνάρτησης (*) (είναι ένα Fractal) και ταυτίζεται με τα z_0, για τα οποία η αντίστοιχη ακολουθία $\{z_n\}$ δεν συγκλίνει.

Θεώρημα 2.2.8 *Μια συνεχής απεικόνιση $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, για την οποία υπάρχει ακέραιος $n > 1$, έτσι ώστε η $f^n = f \circ \cdots \circ f$ να είναι συστολή του πλήρους μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο.*

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathcal{M}$ το μοναδικό σταθερό σημείο της $g = f^n$. Δείχνουμε ότι αυτό είναι και μοναδικό σταθερό σημείο της f. Αυτό στηρίζεται στην μεταθετικότητα των δύο απεικονίσεων $f \circ g = g \circ f$:

$$f(x_0) = f(\lim_k g^k(x_0)) = \lim_k f(g^k(x_0)) = \lim_k g^k(f(x_0)).$$

Αυτό σημαίνει ότι και το $f(x_0)$ είναι σταθερό σημείο της g, που λόγω της μοναδικότητάς του θα πρέπει $f(x_0) = x_0$. Αν η f είχε και δεύτερο σταθερό σημείο $f(x_1) = x_1$, τότε αυτό προφανώς θα ήταν και σταθερό σημείο της g και συνεπώς θα ταυτίζοταν με το x_0, ο.ε.δ.

Θεώρημα 2.2.9 *(Κιβωτισμού του Cantor) Μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, των οποίων η διάμετρος δ_n τείνει στο μηδέν, έχει τομή $A = \cap_{n\in\mathbb{N}}$ που περιέχει ένα ακριβώς στοιχείο.*

Απόδειξη: Διαλέγουμε ένα σημείο $x_n \in A_n$. Η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι Cauchy, λόγω του ότι $d(x_m, x_n) < \delta_{\max(n,m)} \to 0$, συνεπώς συγκλίνει σε σημείο x. Το $x \in A_n$ για κάθε n, διότι αν ήταν για κάποιο n η απόσταση $d = d(x, A_n) > 0$, τότε θα ήταν και $d(x_m, x) > d$ για $m > n$, αφού τότε $A_m \subset A_n$. Συνεπώς θα είχαμε αντίφαση στο ότι η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x. Το ότι δεν υπάρχει άλλο $x' \in A, x' \neq x$ προκύπτει αμέσως από την $\lim \delta_n = 0$, ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.2.1 *Δείξε ότι μια ακολουθία Cauchy του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$ συγκλίνει, αν υπάρχει υπακολουθία της που συγκλίνει.*

Άσκηση 2.2.2 *Δείξε ότι για μια υπερμετρική, η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι Cauchy $\Leftrightarrow \lim d(x_n, x_{n+1}) \to 0$.*

Άσκηση 2.2.3 *Δείξε ότι $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ είναι δύο ακολουθίες Cauchy του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, τότε η ακολουθία αριθμών $\{d(x_n, y_n)\}$ συγκλίνει.*

Άσκηση 2.2.4 *Δείξε ότι η ακολουθία συναρτήσεων του $C[0,1]$*

$$f(x) = \begin{cases} n \cdot x, & \text{όταν} \quad x < \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \text{όταν} \quad x \geq \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

δεν είναι Cauchy

Άσκηση 2.2.5 *Δείξε ότι ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι πλήρης, αν και μόνον άν, κάθε ακολουθία μπαλών $\{B_{r_i}(x_i), i \in \mathbb{N}\}$ με την ιδιότητα, $\lim_i r_i = 0$ και $B_{r_i}(x_i) \supset B_{r_{i+1}}(x_{i+1})$ γιά κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχει μη κενή τομή $\cap_i B_{r_i}(x_i)$.*

Άσκηση 2.2.6 *Έστω η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από δύο οιουσδήποτε αριθμούς $a, b \in \mathbb{R}$: $x_0 = a$, $x_1 = b$ και $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$. Δείξε ότι η ακολουθία αυτή είναι Cauchy. Προσδιόρισε το όριό της.*

Άσκηση 2.2.7 *Δείξε ότι το σύνολο $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ των συγκλινουσών ακολουθιών $\{x_n\}$ του $\mathbb{R}$ είναι χώρος Banach ως προς την $\sup$ norm $||\{x_n\}|| = \sup_n\{|x_n|\}$. Δείξε επίσης ότι το υποσύνολο $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ αυτού του χώρου, το οποίο αποτελείται από όλες τις συγκλίνουσες στο 0 ακολουθίες, είναι επίσης χώρος Banach ως προς την ίδια norm.*

Άσκηση 2.2.8 *Έστω x_0 σημείο του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$. Κατασκευάζουμε μια απεικόνιση $f : \mathcal{M} \longrightarrow C(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, αντιστοιχίζοντας σε κάθε $x \in \mathcal{M}$ την απεικόνιση*

$$\phi_x : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \phi_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0), \quad \forall y \in \mathcal{M}.$$

Δείξε ότι: (1) η απεικόνιση αυτή παίρνει πράγματι τιμές $\phi_x \in \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, δηλαδή, κάθε ϕ_x είναι φραγμένη και συνεχής. (2) η απεικόνιση f είναι ισομετρία. Αποδεικνύεται ([Sim63, σ. 85]) ότι η $\overline{f(\mathcal{M})} \subset C(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ είναι μια πλήρωση του $\mathcal{M}$.

Άσκηση 2.2.9 *Έστω A υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$. Ας λέμε έναν αριθμό $r > 0$ επαρκή, αν $\forall x \in A, A \subset B_r(x)$. Δείξε ότι η διάμετρος $\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$ του A ισούται με το $\Delta = \inf\{r : r \text{ επαρκής}\}$.*

Άσκηση 2.2.10 *Βρες ένα παράδειγμα υποσυνόλου A ενός μετρικού χώρου με διάμετρο $\delta(A) < \infty$, για το οποίο δεν υπάρχουν $x, y \in A : d(x,y) = \delta$.*

Άσκηση 2.2.11 *Δείξε ότι ο μετρικός χώρος $(2^{\mathbb{N}}, d)$ (παράδειγμα 11, §2.1) είναι πλήρης.*

Υπόδειξη: ([Edg08, σ. 53]) Αν $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει n_k έτσι ώστε

$$m, n > n_k \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^k}.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πρώτες k συνιστώσες των x_m και x_n συμπίπτουν. Κατασκεύασε το $\tau = \{t_i\} \in (2^{\mathbb{N}}, d)$ έτσι ώστε το t_k να συμπίπτει με την αντίστοιχη k συνιστώσα του x_{n_k}. Τότε $d(x_n, \tau) \leq \frac{1}{2^k}$ για $n > n_k$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Θεωρήματα των Baire, Urisohn, Tietze

3.1 Θεώρημα του Baire

Ορισμός 3.1.1 *Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ λέγεται χώρος του Baire όταν κάθε ακολουθία $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του έχει τομή $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ πυκνό σύνολο.*

Θεώρημα 3.1.1 *Σε ένα χώρο του Baire $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ κάθε ακολουθία $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ αραιών υποσυνόλων έχει ένωση $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Πράγματι, αν μια τέτοια ακολουθία συνόλων είχε $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \mathcal{M}$, τότε, παίρνοντας συμπληρώματα θα είχαμε $\emptyset = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c \supset \cap_{n\in\mathbb{N}} (\overline{B_n})^c$. Αυτό όμως αντιφάσκει στην υπόθεση, αφού, εξ ορισμού, τα $(\overline{B_n})^c$ είναι ανοικτά πυκνά και η τομή τους πρέπει να είναι πυκνό, άρα $\neq \emptyset$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 3.1.2 *Για κάθε ακολουθία $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ ανοικτών πυκνών υποσυνόλων ενός πλήρους μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, η τομή τους $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{M}$. Με άλλα λόγια κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι χώρος του Baire.*

Απόδειξη: Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ανοικτό U η τομή $U \cap A$ είναι μη κενό σύνολο. Ξεκινάμε από το ανοικτό πυκνό A_1 και το ότι το ανοικτό $U \cap A_1 \neq \emptyset$. Συνάγεται ότι υπάρχει ανοικτή μπάλα B_1' ακτίνας $< \frac{1}{2}$ περιεχόμενη στο $U \cap A_1$. Παίρνουμε μια συγκεντρική μπάλα μικρότερης ακτίνας $B_1 \subset B_1'$, έτσι ώστε $\overline{B_1} \subset B_1'$. Και πάλι από την υπόθεση το ανοικτό $B_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Ανάλογα προς την B_1 μπορούμε να κατασκευάσουμε μπάλα B_2 με ακτίνα $< \frac{1}{4}$ και $\overline{B_2} \subset B_1 \cap A_2 \subset U$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε ακολουθία μπαλών με $\overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap A_n$:

$$U \supset \overline{B_1} \supset B_1 \supset \overline{B_2} \supset B_2 \supset \cdots \supset \overline{B_n} \supset B_n \ldots$$

με την ακτίνα της B_n να είναι $< \frac{1}{2^n}$. Κατά το θεώρημα 2.2.9 κιβωτισμού του Cantor, η τομή όλων αυτών των μπαλών αποτελείται από ένα στοιχείο $x \in U \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 3.1.3 *Αν ο μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ του Baire είναι ένωση $\mathcal{M} = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ μιας ακολουθίας κλειστών υποσυνόλων του $\{B_n\}$, τότε κάποιο από τα B_n θα έχει μη κενό εσωτερικό.*

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα παίρνοντας τα συμπληρώματα των B_n, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.1.1 *(Θεώρημα κατηγορίας του Baire) Κάθε πλήρης μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι 2ης κατηγορίας.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του ορισμού 1.1.8 και του προηγουμένου θεωρήματος, ο.ε.δ.

Θεώρημα 3.1.4 *(Ομοιόμορφης φραγής) Έστω $\{f_i, i \in I\}$ μια οικογένεια συνεχών πραγματικών συναρτήσεων του πλήρους μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$. Έστω ότι η οικογένεια είναι φραγμένη κατά σημείο εκ των άνω, με την έννοια ότι, για κάθε $x \in \mathcal{M}$ υπάρχει σταθερά M_x έτσι ώστε για κάθε f_i να ισχύει $|f_i(x)| \leq M_x$. Τότε Υπάρχει ανοικτό A του $\mathcal{M}$ και $M_0 > 0$, έτσι ώστε $|f_i(x)| \leq M_0$ να ισχύει για κάθε $i \in I$ και κάθε $x \in A$.*

Απόδειξη: Θεώρησε τα σύνολα

$$B_n = \{x \in \mathcal{M} : \sup_{i \in I}\{|f_i(x)|\} \leq n\}.$$

Τα B_n είναι κλειστά σύνολα διότι, λόγω της συνέχειας των f_i είναι τομές κλειστών συνόλων

$$B_n = \cap_{i \in I}\{|f_i|^{-1}([0, n])\}.$$

Επίσης, από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathcal{M} = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Συνεπώς (θεώρημα 3.1.3), κάποιο B_n θα έχει μη κενό εσωτερικό $A = (B_n)^o \neq \emptyset$. Το θεώρημα προκύπτει παίρνοντας $M_0 = n$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Το θεώρημα *ομοιόμορφης φραγής*, όπως το διατυπώσαμε παραπάνω, είναι σε μια γενικότερη μορφή από αυτή που συναντάμε συνήθως σε χώρους Banach ([Sim63, σ. 239]). Η απόδειξη είναι τυπικό δείγμα εφαρμογής της ιδιότητας των πλήρων χώρων να είναι 2ης κατηγορίας. Παρόμοιες εφαρμογές οδηγούν στις αποδείξεις γνωστών θεωρημάτων της συναρτησιακής ανάλυσης, όπως αυτό της *ανοικτής απεικόνισης* και του *κλειστού γραφήματος* ([Sim63, σ. 235]). Ένα άλλο είδος εφαρμογών του θεωρήματος του Baire είναι η χρήση του για την απόδειξη ύπαρξης παντού μη-διαφορισίμων συναρτήσεων ([Shi00, σ. 90, 152]).

Σχόλιο-2 Το θεώρημα του Baire δείχνει ότι οι πλήρεις μετρικοί χώροι δεν μπορεί να είναι αραιά σύνολα (ακριβέστερα 1ης κατηγορίας). Υπάρχουν ωστόσο μη-αραιά που δεν είναι πλήρη. Ένα παράδειγμα είναι οι άρρητοι $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Το $\mathbb{R}$ είναι πλήρης χώρος ως προς την συνήθη μετρική, άρα δεν είναι 1ης κατηγορίας. Αν το $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ήταν 1ης κατηγορίας, καθώς και το $\mathbb{Q}$ είναι 1ης κατηγορίας, το ίδιο θα ήταν και το $\mathbb{R} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$, που είναι άτοπο. Άρα το $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ είναι δεύτερης κατηγορίας.

Τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι επίσης 2ης κατηγορίας, καθώς αν ήταν 1ης, τότε μέσω παράλληλης μεταφοράς τους, θα καλύπταμε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με αριθμήσιμο πλήθος συνόλων 1ης κατηγορίας και συνεπώς και ολόκληρο το $\mathbb{R}$, ως ένωση αυτών των διαστημάτων, θα ήταν 1ης κατηγορίας, πράγμα άτοπο. Η παρατήρηση γενικεύεται για τους χώρους $\mathbb{R}^n$ και τα υποσύνολά τους που είναι γινόμενα διαστημάτων. Αργότερα (§5.3) θα δείξουμε ότι εκτός των πλήρων μετρικών χώρων και μία άλλη ενδιαφέρουσα κατηγορία χώρων, οι λεγόμενοι *τοπικά συμπαγείς* είναι χώροι του Baire.

Μια απλή εφαρμογή του θεωρήματος δείχνει ότι οι χώροι Banach είναι ή πεπερασμένης διάστασης ή έχουν *υπεραριθμήσιμη βάση*. Η έννοια της βάσης σε αυτούς τους χώρους είναι ταυτόσημη με την έννοια της βάσης Hamel, που για πεπερασμένης διάστασης χώρους συμπίπτει με την γνωστή μας έννοια ([Στρ12β, σελ.97]). Αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη μιάς βάσης (Hamel) σε κάθε διανυσματικό χώρο είναι συνέπεια του αξιώματος της επιλογής (ή του ισοδυνάμου του λήμματος του Zorn) ([Dug66, σ. 35]).

Ορισμός 3.1.2 *Μια βάση Hamel $\mathcal{B}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{M}$ είναι μια οικογένεια διανυσμάτων του $\mathcal{B} = \{v_i, i \in I\}$ με την ιδιότητα: κάθε διάνυσμα $x \in \mathcal{M}$ να γράφεται με ένα ακριβώς τρόπο ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_{n_i}$ διανυσμάτων της $\mathcal{B}$.*

Θεώρημα 3.1.5 *Μια βάση Hamel ενός χώρου Banach $\mathcal{M}$ είναι ή πεπερασμένη ή υπεραριθμήσιμη.*

Απόδειξη: Υποθέτοντας ότι ο χώρος δεν έχει πεπερασμένη βάση, η απόδειξη προκύπτει με εις άτοπο απαγωγή. Πράγματι αν $\{v_i, i \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση, τότε ο $\mathcal{M}$ γράφεται σαν ένωση χώρων πεπερασμένης διάστασης $\mathcal{M} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_i$, όπου $\mathcal{N}_k$ ο υπόχωρος ο παραγόμενος από τα πρώτα k διανύσματα της βάσης $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Ωστόσο, κάθε τέτοιος υπόχωρος $\mathcal{N}_k$ είναι αραιός (Θεώρημα 2.1.10) και συνεπώς, τότε ο $\mathcal{M} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_i$ θα είναι πρώτης κατηγορίας, πράγμα άτοπο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.1.2 *Στο χώρο Banach των συνεχών συναρτήσεων $C[0,1]$ ως προς την norm*

$$||f||_\infty = \max_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\},$$

ο διανυσματικός υπόχωρος των πολυωνυμικών συναρτήσεων δεν είναι κλειστός (άρα δεν είναι υπόχωρος Banach).

Απόδειξη: Ο χώρος αυτός έχει μια αριθμήσιμη βάση αποτελούμενη από τα $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$, άρα δεν μπορεί να είναι κλειστός, γιατί τότε θα ήταν πλήρης (χώρος Banach) σε αντίφαση με το προηγούμενο θεώρημα, ο.ε.δ.

Σχόλιο-3 Εκτός από την προηγούμενη έννοια βάσης (του Hamel) υπάρχουν και άλλες έννοιες βάσης, που βοηθούν να παραστήσουμε όλα τα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου με ένα ορισμένο τρόπο. Μια βάση του Schauder ενός χώρου Banach $\mathcal{M}$ είναι μια ακολουθία διανυσμάτων $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{M}$ να υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένη ακολουθία αριθμών $\{\lambda_i, i \in \mathbb{N}\}$, έτσι ώστε $\lim_n \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = x$.

Παράδειγμα μιας Schauder βάσης στους χώρους ℓ^p είναι η αποτελούμενη από τις ακολουθίες $\{e_i\}$, που έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα με 0 εκτός του i που είναι 1. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ένας χώρος Banach που έχει μια βάση Schauder είναι διαχωρίσιμος. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Υπάρχουν διαχωρίσιμοι χώροι που δεν έχουν βάση Schauder ([Enf73]).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.1.1 *Δείξε ότι ο διανυσματικός υπόχωρος $\mathcal{P}$ του $C[0,1]$, που αποτελείται από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $C[0,1]$.*

Άσκηση 3.1.2 *Δείξε ότι αν ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ είναι χώρος του Baire, τότε και κάθε ανοικτό $A \subset \mathcal{M}$ είναι χώρος του Baire ως προς την σχετική τοπολογία.*

3.2 Τα θεωρήματα των Uryshohn και Tietze

Ορισμός 3.2.1 *Ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ λέγεται* **κανονικός** *ή T_3 (regular), όταν κάθε κλειστό του A και σημείο $x \notin A$ διαχωρίζονται, με την έννοια ότι υπάρχουν ανοικτά U_A, U_x, που περιέχουν αντίστοιχα τα A και x και είναι ξένα $U_A \cap U_x = \emptyset$.*
Επίσης ο $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ λέγεται **φυσιολογικός** *ή T_4 (normal), όταν κάθε ζεύγος A_1, A_2 ξένων κλειστών του διαχωρίζεται, με την έννοια ότι υπάρχουν ανοικτά U_1, U_2, που περιέχουν αντίστοιχα τα A_1, A_2 και είναι ξένα $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Θεώρημα 3.2.1 *Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ είναι φυσιολογικός, τότε και μόνον τότε, όταν για κάθε κλειστό B και κάθε ανοικτό που το περιέχει $A \supset B$ υπάρχει άλλο ανοικτό A' ώστε να ισχύει*

$$A \supset \overline{A'} \supset A' \supset B. \qquad (*)$$

Απόδειξη: Αν ο $\mathcal{M}$ είναι T_4, τότε για τα κλειστά και ξένα B και A^c θα υπάρχουν ξένα ανοικτά $A' \supset B$ και $A'' \supset A^c$. Το A' προφανώς ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος.

Αντίστροφα, αν ισχύει η ιδιότητα του θεωρήματος και B, B' είναι ξένα κλειστά, τότε το $A = (B')^c$ είναι ανοικτό και $A \supset B$, οπότε εφαρμόζοντας την ιδιότητα βρίσκουμε ανοικτό A' έτσι ώστε να ισχύει η $(*)$. Προκύπτει ότι το $B' = A^c \subset (\overline{A'})^c = A''$ και τα A', A'' είναι ανοικτά ξένα που διαχωρίζουν τα B και B', ο.ε.δ.

Θεώρημα 3.2.2 *Κάθε μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι κανονικός και φυσιολογικός.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι ένας μετρικός χώρος είναι φυσιολογικός. Τούτο διότι τα μονοσύνολα $\{x\}$ σε ένα μετρικό χώρο είναι κλειστά. Εάν λοιπόν τα A_1, A_2 είναι ξένα κλειστά τότε η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{d(x, A_1) - d(x, A_2)}{d(x, A_1) + d(x, A_2)}$$

είναι καλώς ορισμένη, αφού ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται για κανένα x. Επίσης βλέπουμε εύκολα ότι η συνάρτηση είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Τέλος για $x \in A_1$ παίρνει την τιμή -1, ενώ γιά $x \in A_2$ παίρνει την τιμή $+1$. Συνάγεται ότι τα ανοικτά σύνολα $U_1 = f^{-1}((-\infty, 0))$ και $U_2 = f^{-1}((0, \infty))$ είναι ανοικτά, ξένα και περιέχουν, αντίστοιχα τα A_1, A_2, ο.ε.δ.

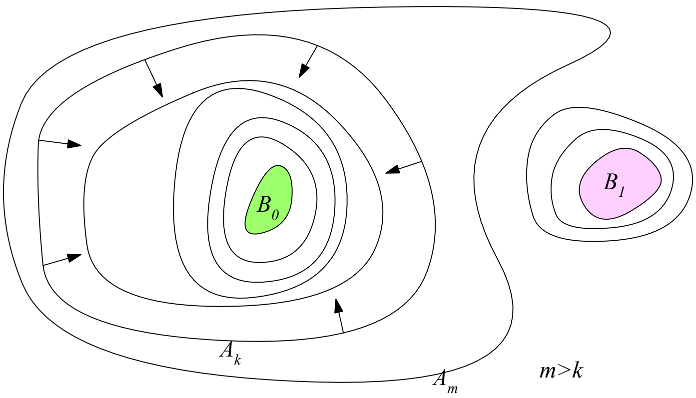
Σχόλιο-1 Τα μονοσύνολα $\{x\}$ είναι κλειστά σε χώρους Hausdorff. Επομένως η ιδιότητα T_4 συνεπάγεται την T_3.

Θεώρημα 3.2.3 *(Λήμμα του Urysohn) Για κάθε ζεύγος ξένων κλειστών υποσυνόλων B_0, B_1 του φυσιολογικού τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{M} \longrightarrow [0,1]$ έτσι ώστε $f\big|_{B_0} = 0$ και $f\big|_{B_1} = 1$.*

Απόδειξη: ([Dug66, σ. 147]) Χρησιμοποιώντας κατ' επανάληψη το θεώρημα 3.2.1, κατασκευάζουμε μια οικογένεια ανοικτών A_k που έχει ως δείκτες k τους ρητούς αριθμούς του συνόλου

$$K = \{\frac{p}{2^q}, p, q \in \mathbb{N}, 0 < p < 2^q\}.$$

Την πρώτη φορά εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.2.1 και εξασφαλίζουμε ανοικτό $A_{\frac{1}{2}}$ έτσι ώστε



Σχήμα 3.2.1: Θεώρημα του Urysohn

$$B_0 \subset A_{\frac{1}{2}} \subset \overline{A_{\frac{1}{2}}} \subset (B_1)^c.$$

Κατόπιν το ξαναεφαρμόζουμε και εξασφαλίζουμε ανοικτό $A_{\frac{1}{4}}$ έτσι ώστε

$$B_0 \subset A_{\frac{1}{4}} \subset \overline{A_{\frac{1}{4}}} \subset A_{\frac{1}{2}}.$$

Κατόπιν το ξαναεφαρμόζουμε και εξασφαλίζουμε ανοικτό $A_{\frac{3}{4}}$ έτσι ώστε

$$\overline{A_{\frac{1}{2}}} \subset A_{\frac{3}{4}} \subset \overline{A_{\frac{3}{4}}} \subset (B_1)^c.$$

Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπον ορίζουμε ένα αριθμήσιμο πλήθος ανοικτών A_k με δείκτες $k \in K$ και τις ιδιότητες

$$B_0 \subset A_m \subset \overline{A_m} \subset A_n \subset (B_1)^c, \text{ για } \quad m < n, \quad m, n \in K.$$

Το σχήμα 3.2.1 δίνει μια εντύπωση τέτοιων ανοικτών συνόλων. Τα βέλη δείχνουν προς το εσωτερικό του A_k, το οποίο περιλαμβάνει πάντοτε το B_0 και έχει το B_1 στο εξωτερικό του. Οι δείκτες αυτών των ανοικτών συνόλων, με τον τρόπο που τους κατασκευάζουμε, διατρέχουν το K, που είναι ένα πυκνό υποσύνολο του διαστήματος $[0,1]$. Την συνάρτηση f ορίζουμε μέσω των A_k και την θέση του x ως προς αυτά:

$$f(x) = \sup\{k : x \notin A_k\} \quad \text{και} \quad f(x) = 0 \text{ για } x \in \cap_{k\in K} A_k.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει τα σύνορα ∂A_k ως ισοσταθμικές $f\,\big|_{\partial A_k} = k$. Προφανώς επίσης $f\,\big|_{B_0} = 0$ και $f\,\big|_{B_1} = 1$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται δείχνοντας την συνέχεια της f. Πράγματι, για x τέτοια ώστε $0 < f(x) < 1$ και $\varepsilon > 0$ έστω $m, n \in K$ έτσι ώστε

$$f(x) - \varepsilon < m < f(x) < n < f(x) + \varepsilon.$$

Από τον ορισμό της f έπονται οι επόμενες σχέσεις

$$\begin{aligned}
\text{για } k \in K : m < k < f(x) &\Rightarrow x \notin A_k \text{ και } x \notin \overline{A_m} \\
x \in A_n &\Rightarrow x \in A_n - \overline{A_m} \ :\ \text{ανοικτή περιοχή του } x \\
\Rightarrow \text{ για } y \in A_n - \overline{A_m} &\Rightarrow m \le f(y) \le n \\
&\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ανάλογα, και κάπως ευκολότερα, αποδεικνύεται και η συνέχεια της f για x τέτοια ώστε $f(x) = 0$ ή/και $f(x) = 1$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Το διάστημα $[0,1]$ που εμφανίζεται στο θεώρημα θα μπορούσε να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο. Εάν μια συνάρτηση f ικανοποιεί το θεώρημα του Urysohn, τότε και η $f'(x) = (b-a)f(x) + a, (a < b)$, ικανοποιεί το ίδιο, ελαφρά τροποποιημένο θεώρημα, στο οποίο, το το $[0,1]$ έχει αντικατασταθεί με το διάστημα $[a,b]$.

Θεώρημα 3.2.4 *(θεώρημα επέκτασης του Tietze) Έστω B κλειστό υποσύνολο του φυσιολογικού τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει συνεχής επέκταση F της f, δηλαδή συνεχής $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε $F\big|_B = f$.*

Απόδειξη: ([Boo05]) Κατ' αρχήν υποθέτουμε ότι η f είναι φραγμένη στο B και $b = \sup\{|f(x)| : x \in B\}$. Κατασκευάζουμε ακολουθία συναρτήσεων $\{g_0, g_1, \ldots\}$, ορισμένων σε όλο το $\mathcal{M}$, εφαρμόζοντας κατ' επανάληψη το θεώρημα του Urysohn. Ξεκινάμε με δύο κλειστά υποσύνολα του B (άρα και του $\mathcal{M}$):

$$E_0 = \{x \in B : f(x) \le -b/3\} \quad \text{και} \quad Z_0 = \{x \in B : f(x) \ge b/3\}.$$

Ένας γραμμικός συνδυασμός μιάς συνάρτησης Urysohn για τα E_0, Z_0 και μιας σταθεράς (δες σχόλιο 2 παραπάνω) ορίζει μια συνάρτηση $g_0 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$g_0(\mathcal{M}) \subset \left[-\frac{b}{3}, \frac{b}{3}\right], \ g_0\,\big|_{E_0} = -\frac{b}{3}, \quad g_0\,\big|_{Z_0} = \frac{b}{3} \quad \Rightarrow$$
$$|f(x) - g_0(x)| \le \frac{2b}{3} \quad \forall x \in B.$$

Την ίδια διαδικασία επαναλμβάνουμε τώρα για την συνάρτηση $f - g_0$ και τα

$$E_1 = \{x \in B : f(x) - g_0(x) \le -\frac{2b}{9}\} \quad \text{και} \quad Z_1 = \{x \in B : f(x) - g_0(x) \ge \frac{2b}{9}\}.$$

Και πάλι ένας γραμμικός συνδυασμός μιάς συνάρτησης Urysohn για τα E_1, Z_1 και μιας σταθεράς ορίζει μια συνάρτηση $g_1 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$g_1(\mathcal{M}) \subset \left[-\frac{2b}{9}, \frac{2b}{9}\right], g_1\,\big|_{E_1} = -\frac{2b}{9}, \quad g_1\,\big|_{Z_1} = \frac{2b}{9} \quad \Rightarrow$$
$$|f(x) - g_0(x) - g_1(x)| \le \frac{4b}{9} \ \forall x \in B.$$

Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο και κατασκευάζουμε συναρτήσεις $\{g_2, g_3, ...\}$, που ικανοποιούν

$$|g_n(x)| \leq \frac{2^n b}{3^{n+1}} \quad \text{και} \quad |f(y) - g_0(x) - \cdots - g_{n-1}(x)| \leq \frac{2^{n+1} b}{3^{n+1}}, \ \forall \ x \in B.$$

Τότε για τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f_n &= g_0 + g_1 + \cdots + g_n, \quad \text{για} \quad n \geq 1 \quad \Rightarrow \\ |f_n(x) - f_m(x)| &= |g_{m+1}(x) + \cdots + g_n(x)| \quad \text{για} \;\; m \leq n \\ &\leq \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \frac{b}{3} \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} b. \end{aligned}$$

Συνάγεται ότι για κάθε $x \in \mathcal{M}$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ είναι Cauchy, άρα συγκλίνει σε αριθμό $y = F(x) \in \mathbb{R}$. Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει επίσης εύκολα ότι η F, που εκ κατασκευής ικανοποιεί το θεώρημα, είναι συνεχής συνάρτηση.

Εάν η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο B, τότε, διαλέγοντας έναν οποιοδήποτε ομοιομορφισμό που απεικονίζει το $\mathbb{R}$ στο $[-1, 1]$, λ.χ. τον $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$, και αντικαθιστώντας την f με την $h \circ f$, βρίσκουμε μια επέκταση αυτής F, τότε η $h^{-1} \circ F$ συμπίπτει με την f στο B και είναι επέκταση αυτής στο $\mathcal{M}$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-3 Τα θεωρήματα των Urysohn και Tietze έχουν πολλές εφαρμογές, δύο από τις οποίες (θεώρημα 5.2.15 και 7.4.1) θα δούμε παρακάτω. Εδώ ας αναφέρουμε ένα ακόμη θεώρημα του Urysohn ([Sim63, *σ.* 138]).

Θεώρημα 3.2.5 *Για κάθε $2-$αριθμήσιμο φυσιολογικό τοπολογικό χώρο $\mathcal{M}$, υπάρχει ομοιομορφισμός με ένα υποσύνολο του ℓ^2. Συνεπώς ο $\mathcal{M}$ είναι μετρικοποιήσιμος.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συνεκτικότητα

4.1 Συνεκτικοί χώροι

Διαισθητικά, συνεκτικός είναι ένας τοπολογικός χώρος που αποτελείται από ένα ″κομμάτι″. Λ.χ. δύο επίπεδα του $\mathbb{R}^3$ που τέμνονται κατά μία ευθεία, ορίζουν ένα συνεκτικό τοπολογικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$. Αντίθετα δύο παράλληλα επίπεδα ορίζουν ένα μη-συνεκτικό υπόχωρο. Τα δύο ″κομμάτια″ του, που αργότερα θα ονομάσουμε ″συνεκτικές συνιστώσες″ είναι τα δύο επίπεδα.

Ορισμός 4.1.1 *Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ λέγεται* **συνεκτικός** *όταν δεν υπάρχουν δύο μη-κενά ανοικτά $A, A' \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε*

$$\mathcal{M} = A \cup A' \quad \textit{και} \quad A \cap A' = \emptyset.$$

Ένα υποσύνολο B του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ λέγεται **συνεκτικό***, αν είναι συνεκτικός χώρος ως προς την σχετική τοπολογία, την εισαγόμενη από το $\mathcal{M}$.*

Σχόλιο-1 Η άρνηση του ορισμού, δηλαδή η μη συνεκτικότητα του $\mathcal{M}$, ισοδυναμεί με την ύπαρξη μιας διαμέρισης του $\mathcal{M}$ με δύο ανοικτά, δηλαδή την ύπαρξη μη κενών ξένων ανοικτών $A, A' : A \cup A' = \mathcal{M}$. Τότε $A^c = A'$ και $(A')^c = A$, συνεπώς τα A, A' θα είναι ταυτόχρονα και κλειστά. Συμπεραίνουμε αμέσως μια ισοδύναμη συνθήκη συνεκτικότητας.

Πόρισμα 4.1.1 *Ένας χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικός τότε και μόνον, όταν τα μόνα ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά υποσύνολά του είναι το ίδιο $\mathcal{M}$ και το $\emptyset$.*

Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε μια άλλη άποψη της συνεκτικότητας. Υπεισέρχεται σε αυτήν η έννοια της **τοπικής σταθερότητας** μιας συνάρτησης $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$. Έτσι χαρακτηρίζεται μία συνάρτηση f γιά την οποία, σε κάθε σημείο $x \in \mathcal{M}$ υπάρχει περιοχή U_x στην οποία η f είναι σταθερή. Είναι εύκολο να δούμε ότι μια τοπικά σταθερή συνάρτηση είναι συνεχής.

Θεώρημα 4.1.1 *Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικός αν και μόνον αν, κάθε τοπικά σταθερή συνάρτηση $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ σε διακριτό χώρο, με δύο τουλάχιστον σημεία, είναι σταθερή.*

Απόδειξη: Αν υποθέσουμε την συνεκτικότητα του $\mathcal{M}$ και η $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ είναι τοπικά σταθερή αλλά όχι σταθερή, τότε παίρνει δύο τουλάχιστον τιμές $f(x) = y \neq f(x') = y'$. Επειδή σε ένα διακριτό χώρο, όπως ο $\mathcal{M}'$ τα μονοσύνολα είναι ανοικτά, έπεται ότι τα $A = f^{-1}(\{y\})$ και $A' = \cup_{y' \neq y} f^{-1}(\{y'\})$ είναι ξένα μη-κενά ανοικτά σύνολα και $A \cup A' = \mathcal{M}$, αντίθετα με την υπόθεση.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η ιδιότητα του θεωρήματος και ταυτόχρονα υποθέσουμε ότι το $\mathcal{M}$ δεν είναι συνεκτικό, τότε θα υπάρχουν δύο μη-κενά ξένα ανοικτά $A \cup A' = \mathcal{M}$. Καταλλήγουμε τότε σε αντίφαση, ορίζοντας την τοπικά σταθερή συνάρτηση αλλά μη σταθερή $f : \mathcal{M} \to \{0,1\}$ στον διακριτό χώρο $\{0,1\}$ με $f(x) = 0, \forall x \in A$ και $f(x) = 1, \forall x \in A'$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 4.1.2 *Μια συνεχής απεικόνιση διατηρεί την συνεκτικότητα. Με άλλα λόγια, αν f είναι συνεχής απεικόνιση μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$, τότε η εικόνα $f(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}'$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathcal{M}'$.*

Απόδειξη: Μια απλή απόδειξη γίνεται με αναγωγή σε άτοπο. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι το $f(\mathcal{M})$ είναι μη συνεκτικό, τότε θα γράφεται σαν ένωση δυο μη κενών ξένων ανοικτών $f(\mathcal{M}) = A \cup A'$. Ορίζουμε τότε την τοπικά σταθερή αλλά μη σταθερη $g : f(\mathcal{M}) \to \{0,1\}$ στον διακριτό χώρο $\{0,1\}$ με $f(x) = 0, \forall x \in A$ και $f(x) = 1, \forall x \in A'$. Η σύνθεση $g \circ f : \mathcal{M} \to \{0,1\}$ είναι και αυτή μια τοπικά σταθερή αλλά όχι σταθερή συνάρτηση, που κατά το προηγούμενο θεώρημα χαρακτηρίζει το $\mathcal{M}$ ως μη-συνεκτικό, πράγμα αντίθετο με την υπόθεση, ο.ε.δ.

Θεώρημα 4.1.3 *Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικός, τότε και μόνον τότε, όταν για κάθε διαμέριση του $\mathcal{M}$ σε δύο μη κενά ξένα σύνολα $A \cup B = \mathcal{M}$ και $A \cap B = \emptyset$ ισχύει*

$$\overline{A} \cap B \neq \emptyset \quad \acute{\eta} \quad A \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{M}$ είναι συνεκτικός και ταυτόχρονα ότι δεν ισχύει η ιδιότητα του θεωρήματος. Τότε θα υπάρχει διαμέριση σε ξένα μη-κενά $\mathcal{M} = A \cup B$ και $\overline{A} \cap B = \emptyset$ και $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Τότε έχουμε συνολικά

$$\begin{aligned} A \cap B &= \emptyset \text{ και } A \cup B = \mathcal{M} \;\Rightarrow\; A = B^c \text{ και } B = A^c. \\ \overline{A} \cap B &= \emptyset \Rightarrow \overline{A} \subset B^c \text{ και } \overline{B} \cap A = \emptyset \Rightarrow \overline{B} \subset A^c. \Rightarrow \\ & \overline{A^c} = A^c \quad \text{και} \quad \overline{B^c} = B^c \end{aligned}$$

Από αυτές συνάγεται αμέσως ότι τα A, B είναι ανοικτά και αποτελούν διαμέριση του $\mathcal{M}$, αντίθετα με την υπόθεση.

Το αντίστροφο είναι ακόμη πιο εύκολο, διότι αν ισχύει η συνθήκη και το $\mathcal{M}$ είναι μη-συνεκτικό, τότε θα υπάρχει διαμέριση με σύνολα που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά $\mathcal{M}$=$A \cup B$ και συνεπώς $A \cap \overline{B} = A \cap B = \emptyset$ και $B \cap \overline{A} = B \cap A = \emptyset$, αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.

Θεώρημα 4.1.4 *Εάν το υποσύνολο B του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικό τότε και κάθε υποσύνολο B' που ικανοποιεί την $B \subset B' \subset \overline{B}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathcal{M}$. Ειδικά το $\overline{B}$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι προφανής, διότι αν το $\overline{B}$ γραφόταν ως ένωση ανοικτών $\overline{B} = A \cup A'$, όπου τα ανοικτά είναι τομές $A = \overline{B} \cap A_1, A' = \overline{B} \cap A_1'$ με $A_1, A_1' \in \mathcal{T}$, τότε θα προέκυπτε και διαμέριση του B. Πράμγατι, τότε θα είχαμε, λόγω της $B' \subset \overline{B}$ και $B = (B' \cap A_1) \cup (B' \cap A_1')$ και οι τομές εντός των παρενθέσεων θα ήταν μη-κενά σύνολα, αφού τα ανοικτά A_1, A_1' τέμνουν το $\overline{B}$ άρα και το B καθώς και το $B' \supset B$, ο.ε.δ.

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε τα προηγούμενα θεωρήματα για να αποδείξουμε ότι τα πάσης φύσεως διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικά σύνολα.

Θεώρημα 4.1.5 *Το $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία είναι συνεκτικό. Το ίδιο ισχύει και για οποιοδήποτε διάστημα του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη: ([Arm83, σ. 56]) Εφαρμόζουμε το θεώρημα 4.1.3. Έστω $\mathbb{R} = A \cup B$ μια διαμέριση του $\mathbb{R}$ με δύο ξένα μη-κενά υποσύνολα και $a \in A, b \in B$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a < b$. Ορίζεται τότε το

$$s = \sup\{x \in A : x < b\}, \qquad \text{το οποίο} \quad s \in \overline{A}$$

και υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

$$\begin{array}{ll}(\alpha) & s \in A \ \Rightarrow\ s < b \text{ και } (s,b) \subset B \ \Rightarrow\ s \in \overline{B} \ \Rightarrow A \cap \overline{B} \neq \emptyset. \\ (\beta) & s \notin A \ \Rightarrow\ s \in B \ \Rightarrow\ \overline{A} \cap B \neq \emptyset.\end{array}$$

Η απόδειξη για οποιοδήποτε άλλο διάστημα είναι ανάλογη, ο.ε.δ.

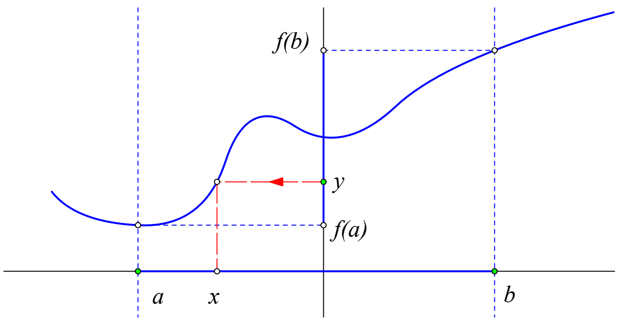
Πόρισμα 4.1.2 *Τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ως προς την συνήθη τοπολογία είναι τα διαστήματα.*

Απόδειξη: Το προηγούμενο θεώρημα εξασφαλίζει το ότι τα διαστήματα είναι συνεκτικά. Για το αντίστροφο αρκεί να εφαρμόσουμε την χαρακτηριστική ιδιότητα ενός διαστήματος I που έγκειται στο ότι, με κάθε $a, b \in I, a < b \Rightarrow\ (a,b) \subset I$. Εάν λοιπόν το συνεκτικό $A \subset \mathbb{R}$ δεν ήταν διάστημα, θα υπήρχαν $a, b \in A, a < b$ και $c \notin A, a < c < b$. Τότε, όμως, τα ανοικτά διαστήματα $B = (-\infty, c), B' = (c, \infty)$ θα όριζαν διαμέριση του A με μη κενά ξένα $A = (B \cap A) \cup (B' \cup A)$, αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε ομοιομορφισμούς μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Πράγματι η $f(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$ είναι ομοιομορφισμός του $(-1,1)$ στο (a,b) και η $g : \mathbb{R} \to (-1,1), g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ομοιομορφισμός του $(-1,1)$ στο $\mathbb{R}$. Η σύνθεση $h_{(a,b)} = g \circ f^{-1}$ δίδει ένα ομοιομορφισμό του (a,b) στο $\mathbb{R}$. Η σύνθεση $h^{-1}_{(c,d)} \circ h_{(a,b)}$ δίδει έναν ομοιομορφισμό του (a,b) στο (c,d). Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε και ομοιομορφισμούς μεταξύ δύο διαστημάτων της μορφής $(-\infty, a)$ ή (b, ∞).

Θεώρημα 4.1.6 Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής *Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στο $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία, το $f(M)$ είναι ένα διάστημα.*

Απόδειξη: Το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.1.2 και του πορίσματος 4.1.3. Γενικεύει το γνωστό από τον απειροστικό λογισμό θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, κατά το οποίο μια συνεχής απεικόνιση ενός διαστήματος $[a,b]$ σε ένα διάστημα $[a' = f(a), b' = f(b)]$ λαμβάνει κάθε ενδιάμεση τιμη $y \in [a', b']$



Σχήμα 4.1.1: Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

(σχήμα 4.1.1), ο.ε.δ.

Θεώρημα 4.1.7 *Για κάθε οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων $\{A_i, i \in I\}$ ενός τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, με μη κενή τομή $A = \cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, η ένωση $\cup_{i \in I} A_i$ είναι συνεκτικό σύνολο.*

Απόδειξη: Πράγματι, αν υπήρχε μια διαμέριση του $A' = \cup_{i \in I} A_i$ με ανοικτά μη κενά και ξένα $A' = B \cup B'$, τότε, λόγω της συνεκτικότητας του, κάθε A_i θα έπρεπε να περιέχεται ολόκληρο σε ένα από τα B, B' λ.χ. το B. Τότε και η τομή A θα περιήχετο στο B και συνεπώς κάθε άλλο A_j θα περιήχετο και αυτό στο B. Τότε το B' θα ήταν κενό, αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.

Τα $''$κομμάτια$''$ ή **συνεκτικές συνιστώσες** ενός τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, ορίζονται με την βοήθεια της επόμενης σχέσης ισοδυναμίας

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει συνεκτικό } \ A \subset \mathcal{M} \text{ με } \ x, y \in A.$$

Το ότι αυτή η σχέση είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας είναι τετριμμένο. Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης ορίζουν ακριβώς τις συνεκτικές συνιστώσες του $\mathcal{M}$.

Θεώρημα 4.1.8 *Οι κλάσεις ισοδυναμίας $\mathcal{M}$ της σχέσης $\sim$ είναι ξένα μεταξύ τους κλειστά συνεκτικά σύνολα που λέγονται* **συνεκτικές συνιστώσες** *του $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Αν A είναι μια κλάση ισοδυναμίας και $x \in A$, τότε για κάθε άλλο $y \sim x$ θα υπάρχει συνεκτικό $S_y \ni y, x$, πράγμα που συνεπάγεται ότι και όλα τα σημεία του S_y είναι ισοδύναμα του x, άρα $S_y \subset A$ και συνεπώς $A = \cup_{y \in A} S_y$ είναι συνεκτικό, βάσει του προηγουμένου θεωρήματος. Το ότι $\overline{A} = A$ προκύπτει από το θεωρημα 4.1.4, ο.ε.δ.

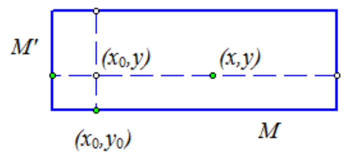
Σχόλιο-3 Εάν ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ έχει πεπερασμένο πλήθος συνεκτικών συνιστωσών, τότε αυτές είναι ταυτόχρονα και ανοικτά σύνολα, αφού τα συμπληρώματά τους είναι πεπερασμένες ενώσεις (των υπολοίπων συνιστωσών) κλειστών. Ένας χώρος στον οποίον οι συνεκτικές συνιστώσες είναι σημεία λέγεται **ολικά μη-συνεκτικός**. Τέτοιοι χώροι, για παράδειγμα, είναι οι διακριτοί αλλά και το $\mathbb{Q}$ και οι άρρητοι $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, με την σχετική τοπολογία την εισαγόμενη από το $\mathbb{R}$. Ολικά μη-συνεκτικό είναι επίσης το σύνολο Cantor. Πράγματι, αν μια συνεκτική συνιστώσα του δεν ήταν σημειακή, τότε θα υπήρχε ένα διάστημα περιεχόμενο εξ' ολοκλήρου στο σύνολο Cantor, πράγμα αδύνατο (θεώρημα 1.1.10).

Σχόλιο-4 Κατά το θεώρημα 4.1.2 ένας ομοιομορφισμός f μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ διατηρεί την συνεκτικότητα και απεικονίζει συνεκτικές συνιστώσες σε αντίστοιχες συνεκτικές συνιστώσες, επομένως οι δύο ομοιόμορφοι χώροι θα έχουν το ίδιο πλήθος συνεκτικών συνιστωσών. Αυτό δίνει σε μερικές περιπτώσεις μια άμεση απόδειξη για το ότι δύο χώροι δεν είναι ομοιόμορφοι. Λ.χ το $\mathbb{R}$ δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφο με το $\mathbb{R}^n$ ως προς τις συνήθεις τοπολογίες. Αυτό φαίνεται αφαιρώντας από το $\mathbb{R}$ ένα σημείο, λ.χ. το 0. Αν υπήρχε τέτοιος ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, τότε θα υπήρχε και ομοιομορφισμός του $A = \mathbb{R} - \{0\}$ στο $B = \mathbb{R}^n - \{f(0)\}$. Όμως το A έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες ενώ το B μόνο μία.

Παρόμοια, ο μοναδιαίος κύκλος $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ του $\mathbb{R}^2$ με την σχετική τοπολογία, δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφος του $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία. Και εδώ αν, υπήρχε τέτοιος ομοιομορφισμός f και αφαιρέσουμε ένα σημείο, λ.χ. το $E = (1, 0)$, τότε το $A = S^1 - \{E\}$ θα πρέπει να είναι ομοιόμορφο με το $B = \mathbb{R} - f(E)$. Το A όμως είναι συνεκτικό, ενώ το B δεν είναι.

Θεώρημα 4.1.9 *Το καρτεσιανό γινόμενο $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$= $\mathcal{M}_1 \times ... \times \mathcal{M}_n$ τοπολογικών χώρων, εφοδιασμένο με την τοπολογία-γινόμενο, ειναι συνεκτικό, τότε και μόνον, όταν κάθε $\mathcal{M}_i$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη: Εάν το γινόμενο είναι συνεκτικό, τότε, επειδή κάθε προβολή $p_i : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_i$ είναι συνεχής, έπεται ότι και το $p_i(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_i$ θα είναι συνεκτικό. Για το αντίστροφο χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς το πλήθος των παραγόντων. Η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλα τα βήματα, που για δύο παράγοντες $\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ είναι η εξής: Διαλέγουμε τυχόν σημείο (x_0, y_0) και θεωρούμε ένα οποιοδή-



Σχήμα 4.1.2: Γινόμενο συνεκτικών είναι συνεκτικό

ποτε άλλο σημείο του (x, y) του $\mathcal{M}$. Οι $''$φέτες$''$ $\{x_0\} \times \mathcal{M}'$ και $M \times \{y\}$ είναι συνεκτικά σύνολα και τέμνονται στο (x_0, y) (σχήμα 4.1.2), άρα η ένωσή τους είναι συνεκτικό (θεώρημα 4.1.7). Αυτό σημαίνει ότι κάθε άλλο σημείο (x, y) του $\mathcal{M}$ είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα με το (x_0, y_0) και συνεπώς το $\mathcal{M}$ έχει μία και μοναδική συνεκτική συνιστώσα, άρα είναι συνεκτικό, ο.ε.δ.

Παραδείγματα

1. **Τα κλειστά κουτιά του $\mathbb{R}^n$.** Αυτά είναι τα καρτεσιανά γινόμενα

$$A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

που ως γινόμενα συνεκτικών είναι συνεκτικά σύνολα. Ανάλογα και τα ανοικτά κουτιά, δηλαδή γινόμενα ανοικτών διαστημάτων, είναι συνεκτικά σύνολα. Παρόμοια και τα γινόμενα ημιανοικτών διαστημάτων είναι συνεκτικά σύνολα. Ειδικά, το ίδιο το $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό σύνολο.

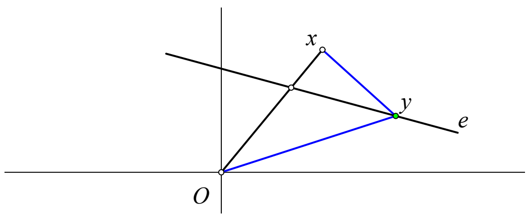
2. **Οι ανοικτές μπάλες** $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση
$$y = f(x) = \frac{x}{1+||x||}, \quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow B_1(0),$$
είναι συνεχής επίρριψη στην ανοικτή μοναδιαία μπάλα $B_1(0)$. Το $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό, άρα και η συνεχής εικόνα του, που είναι αυτή η μπάλα, είναι συνεκτικό σύνολο. Εύκολα βλέπουμε ότι η μπάλα $B_r(x)$ είναι ομοιόμορφη της $B_1(0)$, άρα και αυτή είναι συνεκτική. Η κλειστή μπάλα $\overline{B_r(x)}$ είναι επίσης συνεκτική, βάσει του θεωρήματος 4.1.4.

3. **Επίπεδα του** $\mathbb{R}^n$. Τα επίπεδα E^m διαφόρων διαστάσεων $1 \le m < n$ του $\mathbb{R}^n$ ορίζονται μέσω γραμμικών απεικονίσεων $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ και σταθερών διανυσμάτων $c \in \mathbb{R}^n$
$$E^m = \{f(x) + c, \text{ για } \ x \in \mathbb{R}^m \ \text{ και σταθερό } \ c \in \mathbb{R}^n\}.$$
Είναι λοιπόν εικόνες συνεκτικού συνόλου μέσω συνεχούς απεικόνισης g, που είναι η σύνθεση $g = t_c \circ f$ της f και της $t_c(x) = x + c$. Η τελευταία είναι μια $''$μεταφορά$''$ του $\mathbb{R}^n$ κατά το διάνυσμα c.

4. **Παραλληλεπίπεδα του** $\mathbb{R}^n$. Τα διάφορα κουτιά του $\mathbb{R}^m$ απεικονίζονται μέσω συνεχών απεικονίσεων $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, όπως αυτές του προηγουμένου παραδείγματος, σε $''$ευθύγραμμα$''$ τμήματα και γενικότερα σε $''$παραλληλόγραμμα$''$ διαφόρων διαστάσεων του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 4.1.10 *Για $n > 1$, εάν από το $\mathbb{R}^n$ αφαιρέσουμε αριθμήσιμο πλήθος σημείων, αυτό που απομένει είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη: Έστω A το σύνολο που απομένει, αν αφαιρέσουμε ένα αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων του $\mathbb{R}^n$. Διαλέγουμε ένα σημείο $O \in A$ και δείχνουμε ότι κάθε άλλο σημείο $x \in A$ μπορεί να συνδεθεί με μια τεθλασμένη Oyx, που είναι συνεκτικό σύνολο και περιέχεται εξ ολοκλήρου στο A (σχήμα 4.1.3). Πράγματι,



Σχήμα 4.1.3: $\mathbb{R}^n$ εκτός αριθμήσιμου πλήθους σημείων

σ' ένα τυχόν σημείο του ευθυγράμμου τμήματος Ox φέρνουμε ένα εγκάρσιο ευθύγραμμο τμήμα e. Κάθε σημείο $y \in e$ ορίζει μια τεθλασμένη Oyx. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $y \in e$ έτσι ώστε η Oyx να περιέχεται εξ ολοκλήρου στο A. Τούτο διότι, διαφορετικά, επειδή οι Oyx, για τα διάφορα $y \in e$ τέμνονται μόνο στα O, x, θα είχαν με το αριθμήσιμο $\mathbb{R}^n - A$ ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος κοινών στοιχείων, πράγμα άτοπο, ο.ε.δ.

Παραδείγματα

5. **Το συνεκτικό** $\mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$ **για** $n > 1$. Το σύνολο $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ είναι αριθμήσιμο, άρα το συμπλήρωμά του $A = \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$, για $n > 1$, κατά το προηγούμενο θεώρημα, θα είναι συνεκτικό. Σημείωσε ότι η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, δείχνει ότι υπάρχουν τεθλασμένες μεταξύ δύο σημείων O, x του A που δεν περιέχουν κανένα ρητό σημείο, δηλαδή σημείο (x, y) με x, y, αμφότερους, ρητούς αριθμούς.

6. **Οι σφαίρες** $S_r(x) \subset \mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S_1(0)$ που ορίζεται από τον τύπο
$$f(x) = \frac{x}{||x||}, \quad \text{για} \quad x \neq 0,$$
είναι συνεχής επίρριψη του συνεκτικού $\mathbb{R}^n - \{0\}$ στην μοναδιαία σφαίρα, άρα αυτή είναι συνεκτικό σύνολο. Για την τυχούσα σφαίρα $S_r(x)$ κατασκευάζουμε εύκολα ομοιομορφισμό που την απεικονίζει στην $S_1(0)$. Συμπεραίνουμε ότι όλες οι σφαίρες είναι συνεκτικές.

7. **Οι χώροι με Norm**. Ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{M}$ με norm είναι συνεκτικός. Κάθε $x \in \mathcal{M}$ ενώνεται μέσω του ευθυγράμμου τμήματος Ox με το O και ο $\mathcal{M}$ είναι ένωση όλων αυτών των τμημάτων. Γενικότερα ένα κυρτό υποσύνολο ενός τέτοιου διανυσματικού χώρου είναι συνεκτικό. **Κυρτό** λέγεται το σύνολο $A \subset \mathcal{M}$ για το οποίο ισχύει
$$x, y \in A \quad \Rightarrow \quad \text{το ευθύγραμμο τμήμα} \;\; \{(1-\lambda)\,x + \lambda\,y : \lambda \in [0,1]\} \subset A.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.1.1 *Δείξε ότι κάθε ανοικτό του $\mathbb{R}$ είναι ένωση, το πολύ, αριθμήσιμου πλήθους ξένων ανοικτών διαστημάτων. Συμπέρανε ότι κάθε κλειστό του $\mathbb{R}$ προκύπτει αφαιρώντας από το $\mathbb{R}$ ένα, το πολύ αριθμήσιμο, πλήθος ξένων κλειστών διαστημάτων.*

Άσκηση 4.1.2 *Δείξε ότι το γράφημα $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$ μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [0,1] \to [0,1]$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.*

Άσκηση 4.1.3 *Δείξε ότι ένας χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι μη συνεκτικός αν υπάρχουν δύο μη κενά υποσύνολά του A, B που ικανοποιούν μία από τις:*

1. $A \cap B = \emptyset$ *και* $\overline{A} \cup \overline{B} = \mathcal{M}$.
2. *Τα A, B είναι κλειστά και* $A \cap B = \emptyset$ *και* $A \cup B = \mathcal{M}$.
3. $B = \mathcal{M} - A$ *και* $\partial A = \emptyset$.

Άσκηση 4.1.4 *Δώσε παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, του οποίου τα A^o και ∂A είναι μη συνεκτικά.*

Άσκηση 4.1.5 *Δείξε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to [0,1]$ έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ με $f(x_0) = x_0$.*

Άσκηση 4.1.6 *Δείξε ότι μία 1-1 και επί συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια μονότονη και ως εκ τούτου ομοιομορφισμός.*

Άσκηση 4.1.7 *Έστω $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία συνεκτικών υποσυνόλων του χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, έτσι ώστε γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Δείξε ότι τότε και η ένωση $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ είναι συνεκτικό σύνολο.*

Άσκηση 4.1.8 *Τα A, B είναι μη κενά υποσύνολα του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και το B είναι συνεκτικό. Δείξε ότι αν το B τέμνει και το A και το A^c, τότε θα τέμνει αναγκαστικά και το σύνορο ∂A.*

Άσκηση 4.1.9 *Θεώρησε τα επόμενα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ και εξέτασε αντίστοιχα την συνεκτικότητά τους.*

1. *Το A αποτελούμενο από τα $x \in \mathbb{R}^n$ με όλες συντεταγμένες άρρητες (μη συνεκτικό).*
2. *Το B αποτελούμενο από τα $x \in \mathbb{R}^n$ με μία τουλάχιστον συντεταγμένη άρρητη (συνεκτικό).*
3. *Το C αποτελούμενο από τα $x \in \mathbb{R}^n$ με μία τουλάχιστον συντεταγμένη ρητή (συνεκτικό).*

Άσκηση 4.1.10 *Χρησιμοποιώντας τις προβολές στους άξονες συντεταγμένων, δείξε ότι ένα μη κενό συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ έχει ή μόνο ένα στοιχείο ή υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων.*

4.2 Συνεκτικότητα κατά τόξα

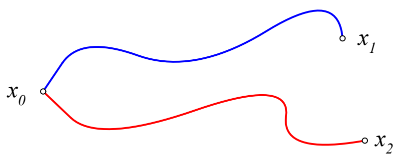
Ορισμός 4.2.1 *Στην ανάλυση γίνεται ευρεία χρήση μιας ισχυρότερης έννοιας συνεκτικότητας.*

1. **Τόξο ή δρόμο** *Ονομάζουμε μια συνεχή απεικόνιση* $f : I = [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}$ *του διαστήματος* $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ *στον τοπολογικό χώρο* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$. *Τα σημεία* $f(0)$ *και* $f(1)$ *ονομάζουμε αντίστοιχα* **αρχή** *και* **τέλος** *του δρόμου.*

2. *Δύο σημεία του* x, y *του τοπολογικού χώρου* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ *λέμε ότι* **συνδέονται**, *όταν υπάρχει δρόμος* f *με* $f(0) = x$ *και* $f(1) = y$.

3. **Κατά τόξα συνεκτικό** *ονομάζουμε ένα υποσύνολο* A *του τοπολογικού χώρου* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, *για το οποίο δύο οποιαδήποτε σημεία του συνδέονται με δρόμο που περιέχεται στο* A, *δηλαδή δρόμο* f *με* $f(I) \subset A$.

Θεώρημα 4.2.1 *Ο τοπολογικός χώρος* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ *είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει σημείο* x_0 *το οποίο συνδέεται με κάθε άλλο σημείο* x *του χώρου.*



Σχήμα 4.2.1: Δρόμοι από x_0 προς όλα τα σημεία

Απόδειξη: Εάν ο χώρος είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε το θεώρημα προφανώς θα ισχύει. Αντίστροφα αν υπάρχει σημείο x_0, όπως στο θεώρημα, αρκεί να δείξουμε ότι δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 συνδέονται. Προς τούτο αρκεί αν πάμε από το x_1 πίσω στο x_0 και από εκεί στο x_2. Αν f_1, f_2 είναι οι δρόμοι από το x_0 αντίστοιχα, προς το x_1, x_2, τότε ένας δρόμος από το x_1 στο x_2 δίνεται από την απεικόνιση $f_{12} : [0,1] \to \mathcal{M}$:

$$f_{12}(t) = \begin{cases} f_1(1-2t) & \text{για} \;\; t \in [0, \frac{1}{2}], \\ f_2(2t-1) & \text{για} \;\; t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Θεώρημα 4.2.2 *Ένας κατά τόξα συνεκτικός τοπολογικός χώρος* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ *είναι και συνεκτικός.*

Απόδειξη: Κάθε δρόμος, ως εικόνα του συνεκτικού συνόλου $f(I)$, είναι συνεκτικός. Το συμπέρασμα του θεωρήματος προκύπτει από το προηγούμενο και το θεώρημα 4.1.7, ο.ε.δ.

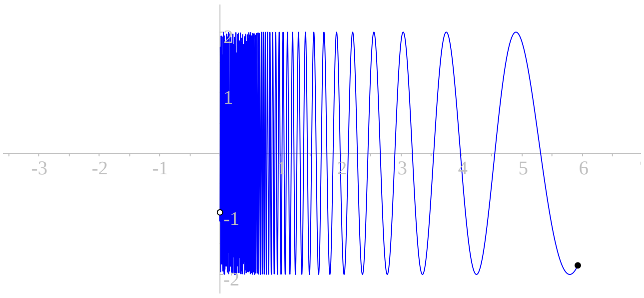
Σχόλιο-1 Όπως και στην συνεκτικότητα, έτσι και στην συνεκτικότητα κατά τόξα μπορούμε να ορίσουμε τις κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει δρόμος συνδέων τα} \;\; x, y,$$

είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης είναι οι **κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες** του $\mathcal{M}$. Αυτές δεν συμπίπτουν, εν γένει, με τις απλές συνεκτικές συνιστώσες. Ωστόσο, ως συνεκτικά σύνολα, διαμερίζουν τις απλές συνεκτικές συνιστώσες σε ξένα υποσύνολα. Το σχήμα 4.2.2 δείχνει ένα συνεκτικό τοπολογικό χώρο, που δεν είναι κατά τόξα συνεκτικός. Αποτελείται από ένα κομμάτι (υποσύνολο) A του γραφήματος της συνάρτησης $g(t) = k$ ημ$(\frac{1}{x})$ και το τμήμα B του $y-$άξονα $\{(0,y) : y \in [-k, k]\}$. Το τμήμα του γραφήματος της g είναι αυτό που ορίζεται στο διάστημα $(0, 6]$. Το $A \cup B$ είναι συνεκτικό. Πράγματι, βλέπουμε εύκολα ότι ισχύει $\overline{A} = A \cup B$ και το συμπέρασμα προκύπτει από το θεώρημα 4.1.4, αφού το A ως εικόνα ενός διαστήματος μέσω συνεχούς απεικόνισης είναι συνεκτικό.

Ωστόσο το σύνολο $A \cup B$ δεν είναι κατά τόξα συνεκτικό. Αν ήταν, θα υπήρχε δρόμος f μεταξύ των σημείων $(0,0)$ και $(1/\pi, 0)$. Όμως γιά $\frac{1}{2} \geq \varepsilon > 0$ δεν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$f([0,\delta)) \subset (A \cup B) \cap B_\varepsilon((0,0)),$$



Σχήμα 4.2.2: Κατά τόξα συνεκτικός χώρος

κάτι που θα έπρεπε να συμβαίνει για μια f συνεχή στο σημείο $0 \in [0,1]$. Εδώ $B_\varepsilon((0,0))$ συμβολίζει, ως συνήθως, την μπάλα γύρω από το $(0,0)$. Η τοπολογία του $A \cup B$ είναι η σχετική, εισαγόμενη από το $\mathbb{R}^2$. Κατά το θεώρημα 4.1.4, εάν υπήρχε τέτοια f, τότε οι συνθέσεις της με τις προβολές $p_1 \circ f, p_2 \circ f$ στους x και y άξονες αντίστοιχα, θα ήταν επίσης συνεχείς. Αυτό θα είχε σαν συνέπεια το $(p_1 \circ f)([0,\delta))$ να περιλαμβάνει άπειρα σημεία της μορφής $\frac{1}{k\pi}$, στα οποία η g λαμβάνει τις τιμές $\pm 1 \notin (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Σχόλιο-2 Το προηγούμενο παράδειγμα, σε αντίθεση με την ιδιότητα της απλής συνεκτικότητας (θεώρημα 4.1.4), δείχνει ότι κατά τόξα συνεκτικά σύνολα A μπορεί να έχουν κλειστή θήκη $\overline{A}$ που δεν είναι κατά τόξα συνεκτική.

Θεώρημα 4.2.3 *Οι επόμενες δύο ιδιότητες ενός τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ είναι ισοδύναμες.*

1. *Κάθε κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του $\mathcal{M}$ είναι ανοικτή (και επομένως και κλειστή).*
2. *Κάθε σημείο του $\mathcal{M}$ έχει μια κατά τόξα συνεκτική περιοχή.*

Απόδειξη: Η (1) συνεπάγεται προφανώς την (2), αφού σαν περιοχή του σημείου μπορούμε να πάρουμε το ίδιο το $\mathcal{M}$. Αντίστροφα, έστω x σημείο μιας συνεκτικής συνιστώσας $\mathcal{N}$ του $\mathcal{M}$ και U_x μια κατά τόξα ανοικτή περιοχή του x. Τότε η U_x είναι συνεκτική και το $\mathcal{N} \cup U_x$ επίσης συνεκτικό. Επειδή το $\mathcal{N}$ είναι μέγιστο συνεκτικό, η U_x θα περιέχεται σ' αυτό, ο.ε.δ.

Θεώρημα 4.2.4 *Ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε και μόνον τότε, όταν είναι συνεκτικός και κάθε σημείο του έχει μια κατά τόξα συνεκτική περιοχή.*

Απόδειξη: Εάν είναι κατά τόξα συνεκτικός, το συμπέρασμα προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα. Αντίστροφα, εάν είναι συνεκτικός και κάθε σημείο του έχει μια κατά τόξα συνεκτική περιοχή, τότε, κατά το προηγούμενο θεώρημα, μια κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του θα είναι ταυτόχρονα ανοικτή και κλειστή. Σε συνεκτικό χώρο, όμως, μόνο ο ίδιος χώρος έχει αυτή την ιδιότητα (εκτός του κενού), ο.ε.δ.

Πόρισμα 4.2.1 *Ένα ανοικτό σύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με την συνήθη τοπολογία ή του S^{n-1} είναι συνεκτικό, αν και μόνον αν είναι κατά τόξα συνεκτικό.*

Απόδειξη: Πράγματι, αν το ανοικτό A είναι συνεκτικό, επειδή κάθε σημείο του x έχει μια μπάλα $B_\varepsilon(x)$ (ή τομή μιας τέτοιας μπάλας με το S^{n-1} στην περίπτωση της σφαίρας) που περιέχεται στο A και η μπάλα είναι κατά τόξα συνεκτική, συνάγεται, κατά το προηγούμενο θεώρημα, ότι το A θα είναι κατά τόξα συνεκτικό. Το αντίστροφο είναι προφανές, ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.2.1 *Δείξε ότι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ έχει το πολύ αριθμήσιμες το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες. Δώσε παράδειγμα κλειστού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$, το οποίο να μην έχει την προηγούμενη ιδιότητα.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπάγεια

5.1 Συμπαγείς χώροι

Ορισμός 5.1.1 *Εστω το υποσύνολο A του συνόλου $\mathcal{M}$ και $\{A_i, i \in I\}$ οικογένεια υποσυνόλων του $\mathcal{M}$.*

1. *Λέμε ότι η οικογένεια $\{A_i, i \in I\}$* **καλύπτει** *το A ή είναι μια* **κάλυψη** *του A, όταν $\cup_{i\in I} A_i \supset A$.*
2. *Μια* **υποκάλυψη** *αυτής της κάλυψης για το A ορίζεται από ένα υποσύνολο $J \subset I$, για το οποίο εξακολουθεί να ισχύει $\cup_{i\in J} A_i \supset A$.*
3. *Μια* **πεπερασμένη υποκάλυψη** *του A είναι μια υποκάλυψη για την οποία το J είναι πεπερασμένο σύνολο.*
4. *Ένα υποσύνολο A του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ λέγεται συμπαγές όταν* **για κάθε ανοικτή** *κάλυψη του A δηλαδή κάλυψη για την οποία τα A_i είναι ανοικτά: $\cup_{i\in I} A_i \supset A$, υπάρχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη $A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \supset A$ του A.*
5. *Ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ λέγεται* **συμπαγής** *όταν το $A = \mathcal{M}$ είναι συμπαγές.*

Θεώρημα 5.1.1 *Η θεμελιώδης σχέση μεταξύ συμπαγών και κλειστών συνόλων περιγράφεται από τις ιδιότητες:*

1. *Ένα κλειστό υποσύνολο A ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι συμπαγές.*
2. *Ένα συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Hausdorff είναι κλειστό.*

Απόδειξη: Για το (1), έστω $\{A_i, i \in I\}$ μια ανοικτή κάλυψη του A, τότε, επισυνάπτοντας στην κάλυψη αυτή το ανοικτό A^c παίρνουμε μια ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{M}$. Λόγω της συμπάγειας του $\mathcal{M}$, θα υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη αυτού

$$A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \cup A^c = \mathcal{M}.$$

Επειδή $A \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$, συνάγεται ότι υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη του A, άρα τούτο είναι συμπαγές.

Για το (2) ας υποθέσουμε ότι το A είναι συμπαγές του χώρου Hausdorff $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $x \notin A$. Τότε για κάθε $y \in A$ υπάρχουν ξένες ανοικτές περιοχές U_x, U_y, αντίστοιχα, των x και y. Οι $\{U_y, y \in A\}$ καλύπτουν το A, άρα θα υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος εξ αυτών, που επίσης θα καλύπτουν το A : $U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_n} \supset A$. Τότε η τομή των αντιστοίχων U_{x_i} : $U = U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n}$ είναι μια περιοχή που δεν τέμνει την $U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_n} \supset A$ και επομένως περιέχεται ολόκληρη στο συμπλήρωμα A^c, που με αυτό τον τρόπο αποδεικνύεται ανοικτό, άρα το A κλειστό, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Το επιχείρημα της απόδειξης δείχνει, ότι για χώρους Hausdorff $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, ένα συμπαγές $A \subset \mathcal{M}$ και ένα σημείο $x \notin A$ **διαχωρίζονται**, δηλαδή υπάρχουν ξένα ανοικτά $U \supset A$ και $U' \ni x$. Στο εξής θα υποθέτουμε πάντοτε ότι ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι Hausdorff.

Πόρισμα 5.1.1 *Η τομή $\cap_{i \in I} A_i$ οσωνδήποτε συμπαγών συνόλων $\{A_i, i \in I\}$ ενός τοπολογικού χώρου είναι συμπαγές. Η ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους συμπαγών είναι συμπαγές σύνολο.*

Απόδειξη: Η τομή $\cap_{i \in I} A_i \subset A_k$ για κάθε $k \in I$ είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς, ο.ε.δ.

Πόρισμα 5.1.2 *Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής, τότε και μόνον, όταν κάθε οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του με κενή τομή έχει πεπερασμένη υποοικογένεια με επίσης κενή τομή.*

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της συμπάγειας παίρνοντας τα συμπληρώματα των κλειστών, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Το τελευταίο πόρισμα είναι λογικά ισοδύναμο με το επόμενο, που χρησιμοποιεί την έννοια της **ιδιότητας πεπερασμένης τομής** μιάς οικογένειας. Λέμε ότι μία οικογένεια υποσυνόλων του συνόλου $\mathcal{M}$ έχει αυτή την ιδιότητα, όταν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της έχει μη-κενή τομή. Το προηγούμενο πόρισμα λοιπόν είναι λογικά ισοδύναμο με το επόμενο.

Πόρισμα 5.1.3 *Ένας τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής, όταν κάθε οικογένεια κλειστών του $\{A_i, i \in I\}$, που έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής έχει μη κενή τομή $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.*

Θεώρημα 5.1.2 *Εάν f είναι συνεχής απεικόνιση μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$, τότε η εικόνα $B = f(A)$ ενός συμπαγούς υποσυνόλου του $\mathcal{M}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{M}'$.*

Απόδειξη: Πράγματι, αν $\{B_i, i \in I\}$ είναι μια κάλυψη του B με ανοικτά, τότε, λόγω της συνέχειας της f η $\{f^{-1}(B_i), i \in I\}$ θα είναι κάλυψη του A με ανοικτά και λόγω της συμπάγειάς του θα υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη

$$A \subset f^{-1}(B_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(B_{i_n}) \quad \Rightarrow \quad B \subset B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_n},$$

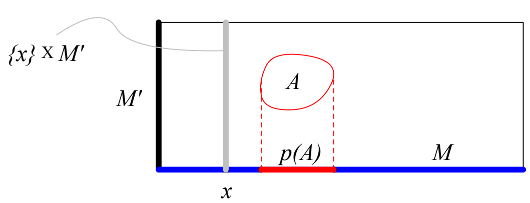
είναι επίσης κάλυψη του B, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.1.3 *Εάν ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής και ο $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ είναι Hausdorff, τότε μια συνεχής απεικόνιση του $\mathcal{M}$ στον $\mathcal{M}'$ είναι και κλειστή. Εάν η f είναι συνεχής $1-1$ και επί, τότε είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη: Ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει από το θεώρημα 5.1.1 και το προηγούμενο θεώρημα, αφού ένα κλειστό A του συμπαγούς $\mathcal{M}$ είναι και αυτό συμπαγές και θα απεικονίζεται σε συμπαγές $f(A)$ του χώρου Hausdorff, άρα κλειστό. Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι συνέπεια του πρώτου, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.1.4 *Εάν ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ είναι συμπαγής και ο $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία-γινόμενο, τότε η συνάρτηση προβολής $p : \mathcal{M} \times \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$ είναι κλειστή.*

Απόδειξη: Δείχνουμε ότι αν $A \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ είναι κλειστό τότε το $p(A) \subset \mathcal{M}$ είναι κλειστό ή ισοδύναμα το $U = p(A)^c$ είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $x \in U$, τότε το $\{x\} \times \mathcal{M}'$ δεν τέμνει το A. Τότε επειδή

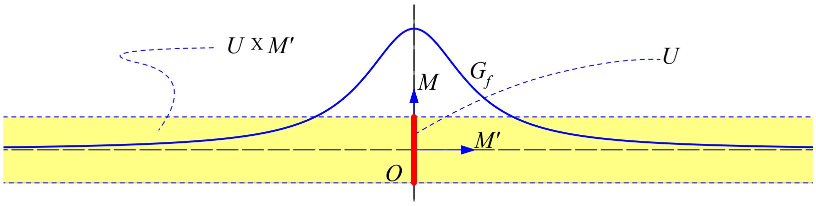


Σχήμα 5.1.1: $(\{x\} \times \mathcal{M}') \cap A = \emptyset$

το A^c είναι ανοικτό, γιά κάθε σημείο $y \in \mathcal{M}'$ υπάρχει περιοχή $U_x \times V_y$ του (x, y) που επίσης δεν τέμνει το A. Τα V_y αποτελούν κάλυψη του $\mathcal{M}'$, άρα υπάρχει, λόγω συμπάγειας, πεπερασμένη υποκάλυψη $V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n} \supset \mathcal{M}'$. Η τομή των αντίστοιχων $U_{x_i} : U' = \cap_i U_{x_i}$ είναι μια περιοχή του x και περιέχεται στο U, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.1.5 *Εάν ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ είναι συμπαγής, ο $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία-γινόμενο, $A \subset \mathcal{M}$ είναι τυχόν υποσύνολο και $U \supset A \times \mathcal{M}'$ είναι ανοικτό, τότε υπάρχει ανοικτό $V \supset A$ έτσι ώστε $V \times \mathcal{M}' \subset U$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος και του θεωρήματος 1.2.12. Το θεώρημα αναφέρεται συχνά ως **θεώρημα ύπαρξης κυλινδρικής περιοχής**, δηλαδή περιοχής του $A \times \mathcal{M}'$ της μορφής $V \times \mathcal{M}'$, περιεχόμενης σε τυχούσα περιοχή του U του $A \times \mathcal{M}'$, ο.ε.δ.



Σχήμα 5.1.2: Μη-ύπαρξη κυλινδρικής περιοχής $U \times \mathcal{M}' \supset \{0\} \times \mathcal{M}'$

Σχόλιο-3 Το ότι δεν υπάρχει τέτοια κυλινδρική περιοχή, αν το $\mathcal{M}'$ δεν είναι συμπαγές, φαίνεται με το απλό παράδειγμα του σχήματος 5.1.2, όπου το ρόλο του A παίζει το (κλειστό) γράφημα της συνάρτησης $x = \frac{1}{1+y^2}$. Το $0 \notin p(A)$ αλλά $0 \in \overline{p(A)}$ και δεν υπάρχει ανοικτό $U \subset \mathcal{M}$ με $U \cap p(A) = \emptyset$.

Θεώρημα 5.1.6 *Το γινόμενο $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times ... \times \mathcal{M}_n$ με την τοπολογία γινόμενο είναι συμπαγές, αν και μόνον αν, κάθε $\mathcal{M}_i$ είναι συμπαγής χώρος.*

Απόδειξη: ([Mun75, σ. 167]) Αν ο $\mathcal{M}$ είναι συμπαγής, τότε, επειδή η προβολή $p_i : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_i$ είναι συνεχής, το $\mathcal{M}_i = p_i(\mathcal{M})$ θα είναι συμπαγές (θεώρημα 5.1.2).

Για το αντίστροφο χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς το πλήθος των παραγόντων του γινομένου. Το σημαντικό βήμα είναι το πρώτο, για δύο παράγοντες. Υποθέτουμε λοιπόν ότι οι $\mathcal{M}$ και $\mathcal{M}'$ είναι συμπαγείς χώροι και δείχνουμε ότι και το γινόμενό τους είναι συμπαγής χώρος. Έστω ότι $\{A_i, i \in I\}$ είναι μία ανοικτή κάλυψη του γινομένου. Για κάθε $x \in \mathcal{M}$ το $\{x\} \times \mathcal{M}'$ είναι συμπαγές (ως ομοιόμορφο του $\mathcal{M}'$), συνεπώς καλύπτεται από πεπερασμένα

$$\{x\} \times \mathcal{M}' \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}.$$

Τότε, κατά το θεώρημα 5.1.5, θα υπάρχει κυλινδρική περιοχή του $\{x\} \times \mathcal{M}'$ της μορφής $U_x \times \mathcal{M}'$ περιεχόμενη στη προηγούμενη:

$$\{x\} \times \mathcal{M}' \subset U_x \times \mathcal{M}' \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}.$$

Η διαδικασία αυτή ορίζει ένα ανοικτό $U_x \subset \mathcal{M}$ γιά κάθε $x \in \mathcal{M}$. Λόγω της συμπάγειας του $\mathcal{M}$, προκύπτει κάλυψή του από πεπερασμένα $U_{x_1}, ..., U_{x_m}$, έτσι ώστε τα αντίστοιχα $U_{x_j} \times \mathcal{M}'$ να καλύπτονται από πεπερασμένα το πλήθος $A^{(j)}_{i_k}$, τα οποία ορίζουν και μια πεπερασμένη υποκάλυψη της $\{A_i, i \in I\}$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.1.7 *Ένας συμπαγής χώρος του Hausdorff $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι φυσιολογικός (T_4) (άρα και κανονικός T_3).*

Απόδειξη: Αν A, B είναι δύο ξένα κλειστά του $\mathcal{M}$, δείχνουμε ότι υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα $U \supset A, V \supset B$. Πράγματι, έστω $x \in A$ και $y \in B$. Αφήνουμε το x σταθερό και μεταβάλλουμε το y διαλέγοντας ξένες περιοχές $U_x \ni x, V_y \ni y$. Τότε $B \subset \cup V_y$ και λόγω συμπάγειας θα υπάρχουν πεπερασμένα $\{y_i\}$ και αντίστοιχες περιοχές $\{U_i\}$ του x, έτσι ώστε $B \subset \cup V_{y_i}$. Παίρνουμε τις ανοικτές ξένες περιοχές $W_x = \cap U_i$ του x και $Y_x = \cup V_{y_i}$ του B. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία γιά κάθε $x \in A$ και κατασκευάζουμε άντίστοιχες περιοχές W_x, Y_x των x, B. Λόγω της συμπάγειας του A θα υπάρχουν πεπερασμένα $\{x_i\}$ με $\cup W_{x_i} \supset A$. Τότε η τομή των αντιστοίχων Y_{x_i} και οι W_{x_i} ορίζουν περιοχές $U = \cup W_{x_i}$ και $V = \cap Y_{x_i}$ που διαχωρίζουν τα A, B, ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5.1.1 *Βρες μια ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{R}$ για την οποία δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη.*

Άσκηση 5.1.2 *Δείξε ότι δεν υπάρχει συνεχής 1-1 και επί απεικόνιση του μοναδιαίου κύκλου S^1 σε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Άσκηση 5.1.3 *Δείξε ότι αν κάθε φραγμένο και κλειστό σύνολο ενός μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$ είναι συμπαγές, τότε ο μετρικός χώρος είναι πλήρης.*

Άσκηση 5.1.4 *Διατύπωσε μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ακολουθία $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, ώστε το σύνολο των σημείων της να είναι συμπαγές.*

Άσκηση 5.1.5 *Έστω $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος με άπειρα σημεία, στον οποίο τα ανοικτά είναι τα συμπληρώματα πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathcal{M}$. Δείξε ότι ο χώρος αυτός είναι συμπαγής. Δείξε επίσης ότι σε αυτόν τον τοπολογικό χώρο, κάθε σύνολο με άπειρο πλήθος στοιχείων είναι πυκνό. Συμπέρανε ότι ο χώρος είναι επίσης διαχωρίσιμος.*

Άσκηση 5.1.6 *Δείξε ότι ένας διακριτός τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής τότε και μόνον, όταν αποτελείται από πεπερασμένα σημεία.*

Άσκηση 5.1.7 *Δείξε ότι τα μόνα μη κενά συνεκτικά και συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα μονοσύνολα και τα κλειστά διαστήματα.*

Άσκηση 5.1.8 *Δείξε ότι σε κάθε συμπαγή τοπολογικό χώρο με άπειρο πλήθος στοιχείων υπάρχει ένα μη κλειστό αριθμήσιμο υποσύνολο.*

Άσκηση 5.1.9 *Δείξε ότι για δύο ξένα και συμπαγή υποσύνολα A, B του χώρου του Hausdorff $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, υπάρχουν πάντα δύο ξένα ανοικτά που τα διαχωρίζουν: $U \supset A, V \supset B$.*

Άσκηση 5.1.10 *Έστω ότι η συνεχής απεικόνιση f μεταξύ των τοπολογικών χώρων είναι κλειστή και έχει την ιδιότητα: για κάθε $x \in \mathcal{M}'$ το σύνολο $K_x = f^{-1}(\{x\})$ να είναι συμπαγές. Δείξε ότι τότε για κάθε συμπαγές $B \subset \mathcal{M}'$ το $f^{-1}(B)$ είναι συμπαγές του $\mathcal{M}$.*

Άσκηση 5.1.11 *Έστω f μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$. Εάν ο $\mathcal{M}$ είναι συμπαγής και $\{B_1 \supset B_2, \supset \ldots\}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία συμπαγών του $\mathcal{M}$, δείξε ότι $f(\cap_i B_i) = \cap_i f(B_i)$.*

Άσκηση 5.1.12 *Έστω f μια συνεχής απεικόνιση του συμπαγούς τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στον εαυτό του. Δείξε ότι υπάρχει μη κενό κλειστό υποσύνολο A του $\mathcal{M}$ με την ιδιότητα $f(A) = A$.*

5.2 Συμπάγεια και μετρικοί χώροι

Στους μετρικούς χώρους η συμπάγεια μπορεί να διατυπωθεί με διάφορους απλούς τρόπους, όπως αυτοί που περιγράφονται παρακάτω. Ιδιαίτερο ρόλο παίζουν οι ακολουθίες και τα **φραγμένα υποσύνολα** $A \subset \mathcal{M}$ του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, δηλαδή εκείνα για τα οποία το

$$\delta = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} \ < \ \infty.$$

Το δ λέγεται τότε **διάμετρος** του συνόλου A.

Ορισμός 5.2.1 *Οι επόμενες έννοιες είναι στενά συνδεδεμένες με την έννοια της συμπάγειας σε ένα μετρικό χώρο.*

1. *Λέμε ότι ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ έχει την ιδιότητα* **Bolzano-Weierstrass** *(σύντομα BW), όταν κάθε σύνολο με άπειρα στοιχεία έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης.*
2. *Λέμε ότι ο μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι* **ακολουθιακά συμπαγής**, *όταν κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*
3. *Λέμε ότι ο μετρικός χώρος είναι* **ολικά φραγμένος**, *όταν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος από μπάλες $B_\varepsilon(x_i)$ που καλύπτουν το χώρο $B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_n) \supset \mathcal{M}$.*
4. *Ονομάζουμε* **αριθμό Legesque μιάς κάλυψης** *$\{A_i, i \in I\}$ του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, έναν αριθμό δ έτσι ώστε κάθε υποσύνολο $A \subset \mathcal{M}$ διαμέτρου μικρότερης του δ να περιέχεται σε ένα τουλάχιστον A_i.*
5. *Λέμε* **ομοιόμορφα συνεχή** *μια απεικόνιση f μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, d)$ και $(\mathcal{M}', d')$, όταν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon)$ έτσι ωστε για κάθε $x, y \in \mathcal{M}$ με $d(x,y) < \delta$ να ισχύει $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Θεώρημα 5.2.1 *Ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι ολικά φραγμένος, αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος υποσύνολα $\{A_1, \ldots, A_k\}$ διαμέτρου $< \varepsilon$ που καλύπτουν το $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Αν ο $\mathcal{M}$ είναι ολικά φραγμένος, τότε για $\varepsilon = 2\varepsilon'$ θα καλύπτεται από πεπερασμένες το πλήθος μπάλες ακτίνας ε', που είναι σύνολα με διάμετρο $< \varepsilon$. Αντίστροφα, αν για $\varepsilon = 2\varepsilon' > 0$ καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος σύνολα $\{A_i\}$ διαμέτρου $< \varepsilon'$, τότε διαλέγοντας ένα $x_i \in A_i$, θα καλύπτεται από τις μπάλες $B_\varepsilon(x_i)$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.2.2 *Κάθε ολικά φραγμένος μετρικός χώρος είναι φραγμένος. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.*

Απόδειξη: Αν ο μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι ολικά φραγμένος και $x, y \in \mathcal{M}$, τότε υπάρχουν πεπερασμένα $\{x_i, i = 1, ..., n\}$, των οποίων οι αντίστοιχες μπάλες ακτίνας 1 καλύπτουν το χώρο. Το x θα περιέχεται σε μια τέτοια μπάλα κέντρου x_s και το y σε μια μπάλα κέντρου x_t. Συνάγεται ότι η απόσταση των x, y θα φράσσεται

$$d(x,y) \leq d(x,x_s) + d(x_s,x_t) + d(x_t,y) < 2 + \max_{s,t}(d(x_s,x_t)).$$

Για το ότι δεν ισχύει το αντίστροφο αρκεί ένα (αντι) παράδειγμα. Θεωρούμε λοιπόν την μοναδιαία σφαίρα του ℓ_∞, που αποτελείται από τις φραγμένες απολύτως ακολουθίες $x = \{x_n\}$ και είναι διανυσματικός χώρος με norm την $||x||_\infty = \sup_n |x_n|$. Η ακολουθίες $e_i = \{0, \ldots, 1, \ldots\}$ με 1 στην i θέση και όλες τις άλλες θέσεις 0, έχουν $||e_i||_\infty = 1$ και συνεπώς περιέχονται στην μοναδιαία σφαίρα $S = \{x \in \ell_\infty : ||x||_\infty = 1\}$, που είναι φραγμένο σύνολο. Επίσης η απόσταση μεταξύ τους $||e_i - e_j||_\infty = 1$. Ωστόσο, μπάλες με κέντρα σε σημεία της S και ακτίνα $\varepsilon < \frac{1}{2}$ περιέχουν, έκαστη, το πολύ ένα e_i, και συνεπώς δεν επαρκεί ένα πεπερασμένο πλήθος τους για να καλύψουν το σύνολο S, πράγμα που δείχνει ότι η S δεν είναι ολικά φραγμένη, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.2.3 *Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι συμπαγής, τότε και μόνον τότε, όταν είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο χώρος είναι συμπαγής και έστω ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι Cauchy αλλά δεν συγκλίνει. Θα δείξουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο. Διαλέγοντας, ενδεχομένως, μια υπακολουθία, μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι η ακολουθία αποτελείται από διαφορετικούς ανά δύο όρους. Τότε τα σύνολα

$$A_m = \mathcal{M} - (\cup_{i=m}^{\infty}\{x_i\})$$

είναι ανοικτά και αποτελούν κάλυψη του $\mathcal{M}$, χωρίς ωστόσο να υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη, πράγμα άτοπο. Αυτό δείχνει ότι ο χώρος είναι πλήρης. Το ότι είναι ολικά φραγμένος προκύπτει επίσης εύκολα. Πράγματι, αν ο $\mathcal{M}$ είναι συμπαγής και $\varepsilon > 0$ τότε οι μπάλες ακτίνας ε γύρω από κάθε σημείο καλύπτουν όλο το χώρο. Άρα θα υπάρχει πεπερασμένο πλήθος από αυτές που επίσης καλύπτει τον χώρο.

Για το αντίστροφο, θα θεωρήσουμε ότι ο $\mathcal{M}$ είναι πλήρης και ολικά φραγμένος αλλά έχει κάλυψη με ανοικτά $\{A_i, i \in I\}$, που δεν επιδέχεται πεπερασμένη υποκάλυψη. Θα δείξουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο. Προς τούτο ας ονομάζουμε *μεγάλο* ένα υποσύνολο N του $\mathcal{M}$ που δεν καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος A_i της κάλυψης. Είναι προφανές ότι αν το N είναι *μεγάλο* και ταυτόχρονα είναι ένωση

$$N = N_1 \cup \cdots \cup N_k,$$

πεπερασμένου πλήθους N_i, τότε κάποιο από τα N_i θα είναι επίσης μεγάλο. Κατά την υπόθεση το $\mathcal{M}$ είναι ένωση μπαλών με ακτίνα $\frac{1}{2}$, άρα κάποια από αυτές, ας πούμε η $B_{\frac{1}{2}}(x_1)$ θα είναι *μεγάλη*. Με το ίδιο επιχείρημα, η $B_{\frac{1}{2}}(x_1)$ θα καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπαλών με ακτίνα $\frac{1}{4}$, άρα θα υπάρχει μια τέτοια μπάλα, ας πούμε $B_{\frac{1}{4}}(x_2)$ που θα είναι επίσης μεγάλη. Συνεχίζουμε κατ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζοντας μια ακολουθία από *μεγάλες* μπάλες

$$B_{\frac{1}{2}}(x_1), B_{\frac{1}{2^2}}(x_2), \ldots, B_{\frac{1}{2^k}}(x_k), \ldots,$$

που, λόγω του τρόπου κατασκευής τους ικανοποιούν τις

$$B_{\frac{1}{2^k}}(x_k) \cap B_{\frac{1}{2^{k+1}}}(x_{k+1}) \neq \emptyset \quad \text{και} \quad d(x_k, x_{k+1}) < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Προκύπτει άμεσα ότι η ακολουθία $\{x_k\}$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει σε κάποιο σημείο $x \in \mathcal{M}$. Το σημείο αυτό θα περιέχεται σε κάποιο A_i και επομένως θα υπάρχει μπάλα με ακτίνα $\varepsilon > 0$, επίσης περιεχόμενη στο A_i. Ας πάρουμε τότε έναν όρο της ακολουθίας x_n με $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ και $n : 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε

$$\text{για κάθε } y \in B_{\frac{1}{2^n}}(x_n) \;\Rightarrow\; d(y,x) \le d(y,x_n) + d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα η *μεγάλη* μπάλα $B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ περιέχεται σε ένα και μόνο A_i, πράγμα άτοπο, ο.ε.δ.

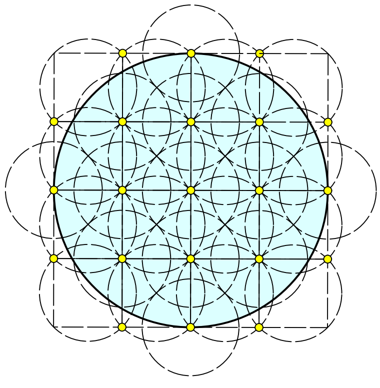
Θεώρημα 5.2.4 *Στον $\mathbb{R}^n$ με την συνήθη μετρική οι έννοιες του φραγμένου και ολικά φραγμένου συνόλου είναι ισοδύναμες. Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, τότε και μόνον τότε, όταν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη: Το ότι το ολικά φραγμένο A είναι και φραγμένο αποδείχτηκε στο θεώρημα 5.2.2. Το ότι κάθε φραγμένο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι και ολικά φραγμένο αποδεικνύεται με την επεξεργασία του σχήματος 5.2.1, που δείχνει ότι αν δοθεί μια μπάλα B_r ακτίνας $r > 0$ και ένα $\varepsilon > 0$, τότε η B_r καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπαλών ακτίνας ε. Κάθε φραγμένο $A \subset \mathbb{R}^n$ μπορεί να καλυφθεί από μία επαρκώς μεγάλη μπάλα B_r, η οποία με τη σειρά της καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπαλών οποιασδήποτε ακτίνας $\varepsilon > 0$.

Ο δεύτερος ισχυρισμός του θεωρήματος, που συχνά αναφέρεται ως θεώρημα των Heine, Borel, προκύπτει από το θεώρημα 5.2.3 και τον πρώτο ισχυρισμό, σε συνδυασμό με το θεώρημα 5.2.3, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.2.5 *Κάθε κάλυψη ενός ακολουθιακά συμπαγούς μετρικού χώρου έχει ένα αριθμό Lebesque $\delta > 0$.*

Απόδειξη: Δοθείσης κάλυψης $\{A_i, i \in I\}$ του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, ας λέμε ένα υποσύνολο του $\mathcal{M}$ *μεγάλο* αν δεν καλύπτεται από κάποιο A_i. Δείχνουμε ότι $\delta = 0$ οδηγεί σε άτοπο. Πράγματι, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει *μεγάλο* υποσύνολο B_n διαμέτρου μικρότερης του $\frac{1}{n}$. Διαλέγουμε ένα σημείο x_n σε κάθε τέτοιο B_n. Από την υπόθεση συνάγεται ότι θα υπάρχει υπακολουθία $\{y_n\} \subset \{x_n\}$, η οποία θα συγκλίνει σε σημείο y του χώρου. Έστω ένα A_i το οποίο περιέχει το y. Τότε το A_i θα περιέχει και μιά μπάλα $y \in B_\varepsilon(y) \subset A_i$ και η μπάλα $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$ ένα y_n του οποίου η διάμετρος είναι μικρότερη του $\varepsilon/2$. Τότε όμως και ολόκληρο το αντίστοιχο του y_n *μεγάλο* B_n θα περιέχεται στο A_i, πράγμα άτοπο, ο.ε.δ.



Σχήμα 5.2.1: Οι μπάλες του $\mathbb{R}^n$ είναι ολικά φραγμένες

Θεώρημα 5.2.6 *Ο μετρικός χώρος έχει την BW ιδιότητα, τότε και μόνον τότε όταν είναι ακολουθιακά συμπαγής.*

Απόδειξη: Αυτό είναι τετριμμένη συνέπεια των ορισμών. Πράγματι, αν κάθε σύνολο με άπειρα στοιχεία έχει σημείο συσσώρευσης και $\{x_n\}$ είναι ακολουθία, τότε ή θα έχει μία τουλάχιστον σταθερή υπακολουθία ή θα έχει ακολουθίες με άπειρους διαφορετικούς ανά δύο όρους και ένα σημείο συσσώρευσης. Και στις δύο περιπτώσεις περιέχει συγκλίνουσα ακολουθία.

Αντίστροφα, αν το σύνολο A έχει άπειρους όρους και ο χώρος είναι ακολουθιακά συμπαγής, τότε υπάρχει ακολουθία $\{x_n\} \subset A$ και κατά την υπόθεση θα υπάρχει και υπακολουθία $\{y_k\} \subset \{x_n\}$ συγκλίνουσα σε σημείο y. Προφανώς το y είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.2.7 *Κάθε ακολουθιακά συμπαγής μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Δείχνουμε ότι ο χώρος περιέχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Πράγματι, αν δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο, τότε θα υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε για κάθε αριθμήσιμο σύνολο X να υπάρχει σημείο x σε απόσταση $d(x, X) > \varepsilon$. Αρχίζοντας λοιπόν από τυχόν σημείο x_1 του χώρου, κατασκευάζουμε επαγωγικά μια ακολουθία σημείων $\{x_n\}$, που ευρίσκονται, ανά δύο, σε απόσταση μεγαλύτερη του ε. Είναι φανερό ότι μια τέτοια ακολουθία δεν μπορεί να έχει σημείο συσσώρευσης, πράγμα άτοπο, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.2.8 *Ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι συμπαγής τότε και μόνον τότε όταν είναι ακολουθιακά συμπαγής.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι ο $(\mathcal{M}, d)$ είναι συμπαγής και ότι $X = \{x_n\}$ είναι ακολουθία που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Πράγματι, τότε για κάθε στοιχείο x_i της ακολουθίας θα υπάρχει μπάλα B_i με κέντρο το x_i που περιέχει πεπερασμένα μόνο στοιχεία της ακολουθίας. Επίσης για κάθε στοιχείο x που δεν ανήκει στην ακολουθία θα υπάρχει μπάλα B_x με κέντρο το x που επίσης δεν περιέχει στοιχεία της ακολουθίας. Τότε η ένωση αυτών των μπαλών θα καλύπτει το $\mathcal{M}$

$$(\cup_{x \notin X} B_x) \cup (\cup_i B_i) \supset \mathcal{M},$$

και είναι φανερό ότι δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη αποτελούμενη από τέτοιες μπάλες.

Αντίστροφα, το ότι ο χώρος είναι διαχωρίσιμος (θεώρημα 5.2.7), συνεπάγεται ότι είναι και $2-$ αριθμήσιμος, δηλαδή έχει αριθμήσιμη βάση ανοικτών (μπάλες). Συνεπώς κάθε κάλυψη $\{A_i, i \in I\}$ θα έχει και αριθμήσιμη υποκάλυψη, δηλαδή κάλυψη από αριθμήσιμο πλήθος ανοικτών $\{B_j, j \in \mathbb{N}\}$, όπου κάθε B_j περιέχεται σε κάποιο A_i. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο $\mathcal{M}$ είναι ακολουθιακά συμπαγής και δείχνουμε ότι κάθε κάλυψη $\{B_j, j \in \mathbb{N}\}$, με αριθμήσιμο πλήθος ανοικτών μιάς βάσης έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Πράγματι, αν δεν συνέβαινε αυτό, τότε θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε επαγωγικά ακολουθία σημείων $\{x_n\}$, έτσι ώστε το x_n να ανήκει σε ανοικτό B_n αλλά όχι στην ένωση των προηγουμένων $B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}$. Τότε θα υπήρχε υπακολουθία $\{y_k\} \subset \{x_n\}$ συγκλίνουσα σε κάποιο x, το οποίο θα περιήχετο σε κάποιο ανοικτό B_j. Τότε κατά την υπόθεση, για $k > j$ τα $y_k \notin B_j$, πράγμα αντίθετο με την σύγκλιση της $\{y_k\}$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.2.9 *Μια συνεχής απεικόνιση f του συμπαγούς χώρου $(\mathcal{M}, d)$ στον χώρο $(\mathcal{M}', d')$, είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη: Κατά το θεώρημα 5.1.2, η εικόνα $\mathcal{N} = f(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}'$ θα είναι συμπαγής. Θα καλύπτεται συνεπώς από πεπερασμένο πλήθος μπαλών

$$\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i), y_i \in \mathcal{N}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Η αντίστροφη εικόνα $\{A_i = f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i))\}$ αυτών των μπαλών ορίζει μια κάλυψη του $\mathcal{M}$, η οποία, κατά το θεώρημα 5.2.5, έχει έναν αριθμό Lebesque $\delta > 0$. Τότε κάθε ζεύγος $x, x' \in \mathcal{M}$ με $d(x, x') < \delta$ θα περιέχεται σ' ένα A_i και συνεπώς $d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.2.10 *Κάθε συνεχής απεικόνιση f ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στο $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία, λαμβάνει την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της για κάποια αντίστοιχα σημεία $x, y \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Πράγματι, κατά το θεώρημα 5.2.4, το υποσύνολο $f(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}$ θα είναι φραγμένο, άρα θα υπάρχουν τα $X = \inf f(\mathcal{M})$ και $Y = \sup f(\mathcal{M})$. Κατασκευάζουμε λοιπόν ακολουθία $\{x_n\}$, έτσι ώστε $\lim\ f(x_n) = X$. Κατά το θεώρημα 5.2.8 αυτή θα έχει υπακολουθία $\{x_{n_k}\}$ συγκλίνουσα σε σημείο $x \in \mathcal{M}$ και λόγω συνέχειας θα έχουμε $X = \lim\ f(x_{n_k}) = f(\lim\ x_{n_k}) = f(x)$. Ανάλογα αποδεικνύεται η ύπαρξη του y, ο.ε.δ.

Παραδείγματα

1. **Οι σφαίρες $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.** Για κάθε norm $||.||$ του $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να ορίσουμε την αντίστοιχη σφαίρα

   $$S_r(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = r\}.$$

   Ειδικά, για την συνήθη norm $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ η αντίστοιχη σφαίρα $S_1(0)$ ακτίνας 1, συμβολίζεται συνήθως με το S^{n-1}. Το $n-1$ υποδηλώνει εδώ την $''$διάσταση$''$ της σφαίρας, για την οποία δεν θα μιλήσουμε στο παρόν μάθημα. Ως κλειστό και φραγμένο το S^{n-1} είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

2. **Τα κλειστά διαστήματα** $[a, b]$. Ως κλειστά και φραγμένα είναι και αυτά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Σημείωσε ότι, κατά το προηγούμενο θεώρημα, κάθε εικόνα $f(\mathcal{M})$ ενός συνεκτικού και συμπαγούς τοπολογικού χώρου $\mathcal{M}$, μέσω συνεχούς απεικόνισης $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, θα είναι ένα τέτοιο κλειστό διάστημα.

3. **Συγκλίνουσα + όριο**. Μια ακολουθία $\{x_n\}$ ενός μετρικού χώρου, που συγκλίνει σε σημείο x ορίζει ένα συμπαγές σύνολο αποτελούμενο από τα $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$.

Θεώρημα 5.2.11 *Για κάθε norm f του $\mathbb{R}^n$, με την συνήθη τοπολογία της norm $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, υπάρχουν σταθερές $K > 0, K' > 0$ έτσι ώστε*

$$K\,||x|| \leq f(x) \leq K'\,||x|| \ \ \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Απόδειξη: Κάθε norm f του $\mathbb{R}^n$, είναι συνεχής ως προς την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^n$. Αυτό συνάγεται άμεσα χρησιμοποιώντας μια βάση $\{e_i\}$ του $\mathbb{R}^n$ και την επόμενη ανισότητα:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) &\leq |x_1| f(e_1) + ... + |x_n| f(e_n) \\ &\leq (|x_1| + \cdots + |x_n|) \max_i (f(e_i)) \ \Rightarrow \\ f(x) \leq n \cdot ||x|| \max_i (f(e_i)) &= M \cdot ||x||, \end{aligned}$$

όπου $M > 0$ σταθερά. Η σφαίρα του S^{n-1} του $\mathbb{R}^n$ είναι για $n \geq 1$ συνεκτικό και συμπαγές σύνολο, άρα το $A = f(S^{n-1}) \subset \mathbb{R}$ θα είναι ένα κλειστό διάστημα $[K, K']$. Το $K > 0$ διότι αν ήταν $K = 0$, τότε κατά το προηγούμενο θεώρημα θα υπήρχε $x \in S^{n-1} \Rightarrow ||x|| = 1$ με $f(x) = 0$, που λόγω της ιδιότητας της norm, συνεπάγεται την $x = 0$, που είναι άτοπο. Θα έχουμε λοιπόν

$$K \leq f\left(\frac{x}{||x||}\right) \leq K' \quad \Rightarrow \quad K\,||x|| \leq f(x) \leq K'\,||x||, \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Πόρισμα 5.2.1 *Δύο οποιεσδήποτε norm f_1, f_2 του $\mathbb{R}^n$ είναι* **ισοδύναμες**, *δηλαδή υπάρχουν σταθερές $K > 0, K' > 0$ έτσι ώστε*

$$K\,f_1(x) \;\leq\; f_2(x) \;\leq K'\,f_1(x) \;\; \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Οι μετρικές του $\mathbb{R}^n$, που ορίζονται από τις f_1, f_2, είναι επίσης ισοδύναμες, δηλαδή ορίζουν τα ίδια ανοικτά σύνολα στο $\mathbb{R}^n$.

Πόρισμα 5.2.2 *Ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{M}$ είναι πεπερασμένης διάστασης τότε και μόνον τότε, όταν δύο οποιεσδήποτε norm είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη: Εάν ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε, κατά το προηγούμενο πόρισμα ο ισχυρισμός ισχύει. Εάν ο χώρος είναι άπειρης διάστασης και $\mathcal{B} = \{b_i, i \in I\}$ είναι μια βάση (Hamel) του χώρου, τότε βλέπουμε εύκολα ότι μια οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathcal{B} \longrightarrow (0, \infty)$ ορίζει μια αντίστοιχη norm

$$||x||_f = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_{n_i}|\, f(b_{n_i}), \text{ για κάθε } x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{n_i} b_{n_i} \in \mathcal{M}.$$

Αρκεί λοιπόν για μια τυχούσα τέτοια f να διαλέξουμε μια άπειρη ακολουθία $\{b_{n_j}\} \subset \mathcal{B}$ και να ορίσουμε την g έτσι ώστε $g(b) = f(b)$ αν το $b \notin \{b_{n_j}\}$ και $g(b_{n_j}) = j \cdot f(b_{n_j})$. Προφανώς τότε δεν υπάρχει σταθερά K έτσι ώστε

$$||x||_g \leq K \cdot ||x||_f, \;\; \text{για κάθε} \;\; x \in \mathcal{M}, \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

Πόρισμα 5.2.3 *Σε ένα διανυσματικό χώρο $\mathcal{M}$ με norm κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ είναι συνεχής, αν και μόνον αν είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη: Εάν ο χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε όπως είδαμε στα παραδείγματα των μετρικών χώρων, κάθε γραμμική είναι συνεχής. Για το αντίστροφο, δείχνουμε ότι σε απειροδιάστατους χώρους υπάρχει μια γραμμική που δεν είναι συνεχής. Πράγματι, με τους συμβολισμούς του προηγουμένου πορίσματος και για μια βάση $\{b_i, i \in I\}$ και ένα αριθμήσιμο υποσύνολό της $\mathcal{B}' = \{b_{n_j}\} \subset \mathcal{B}$, ορίζουμε την f να είναι $f(b_i) = b_i$ για κάθε $b_i \in \mathcal{B} - \mathcal{B}'$ και $f(b_{n_k}) = k \cdot b_{n_k}$ για $b_{n_k} \in \mathcal{B}'$. Βλέπουμε αμέσως ότι δεν υπάρχει σταθερά K έτσι ώστε $||f(x)|| \leq K \cdot ||x||$ για κάθε $x \in \mathcal{M}$, άρα η f δεν είναι συνεχής, ο.ε.δ.

Παραδείγματα

4. **Οι σφαίρες των άλλων norm του** $\mathbb{R}^n$. Οποιαδήποτε norm f, διαφορετική από την συνήθη $||.||$ του $\mathbb{R}^n$, είναι, όπως είδαμε παραπάνω, συνεχής συνάρτηση ως προς την συνήθη. Αυτό συνεπάγεται ότι η αντίστοιχη ″μοναδιαία σφαίρα″ S_f αυτής της norm, που ορίζεται από την εξίσωση $f(x) = 1$, είναι κλειστό σύνολο. Από το τελευταίο θεώρημα προκύπτει ότι είναι και φραγμένο, άρα η S_f είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

5. **Η norm του χώρου πινάκων** $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ο χώρος αυτός, των $m \times n$ πραγματικών πινάκων, είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^{mn}$ και θα μπορούσαμε να ορίσουμε σ' αυτόν οποιαδήποτε από τις norm των χώρων $\mathbb{R}^n$ θέλουμε. Υπάρχει, ωστόσο μία, που είναι στενά συνδεδεμένη με το ότι οι πίνακες παριστάνουν γραμμικές απεικονίσεις και ορίζεται με τον γενικό τρόπο του θεωρήματος 2.1.9. Θεωρώντας λοιπόν τον πίνακα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ως μία γραμμική απεικόνιση $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ορίζουμε, χρησιμοποιώντας τις συνήθεις norm,

$$||A|| = \sup\{||Ax||, x \in \mathbb{R}^m \;\; \text{με} \;\; ||x|| = 1\}. \tag{1}$$

Από τον τρόπο ορισμού της, η σταθερά $K = ||A||$ είναι ο ελάχιστος θετικός για τον οποίο

$$||Ax|| \leq K\,||x|| \ \text{ ισχύει για κάθε } \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι παίρνοντας $||A|| = K$, για το K όπως στην (2), ορίζεται μία norm στο $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Από αυτή την ιδιότητα ελαχίστου προκύπτει και η επόμενη χρήσιμη ιδιότητα αυτής της norm που σχετίζεται με τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, τότε το γινόμενο πινάκων είναι πίνακας $A \cdot B = C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ και είναι πάλι εύκολο να δούμε ότι ισχύει

$$||C|| = ||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||. \tag{3}$$

Η σταθερά K έχει και μια γεωμετρική ερμηνεία, που προκύπτει από το θεώρημα 5.2.10. Πράγματι, κατ' αυτό, για δοθέντα πίνακα A με $||A|| = K$, θα υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα x_0 έτσι ώστε $||Ax_0|| = K$. Παίρνουμε λοιπόν ένα διάνυσμα v επίσης μοναδιαίο και κάθετο στο x_0, $v \cdot x = 0$ και θεωρούμε την καμπύλη $g(t) = x_0\,\text{συν}(t) + v\,\text{ημ}(t) \in S^{n-1}$. Η συνάρτηση

$$||Ag(t)||^2 = (Ag(t)) \cdot (Ag(t))$$

θα έχει μέγιστο για $t = 0$ και παραγωγίζοντας έχουμε

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_0 (Ag(t)) \cdot (Ag(t)) = 2(Ax_0) \cdot (Av) = 2((A^t \cdot A)x_0) \cdot v,$$

όπου, στην τελευταία, το A^t συμβολίζει τον **ανάστροφο** $(n \times m)$ του πίνακα A $(m \times n)$. Η εξίσωση αυτή φανερώνει ότι ο $n \times n$ πίνακας $B = A^t \cdot A$, που είναι συμμετρικός, έχει το Bx_0 συγγραμμικό του x_0, άρα το x_0 είναι ιδιοδιάνυσμα του B και το $K^2 = ||Ax_0||^2$ είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του B.

6. **Η συνέχεια του πολλαπλασιασμού πινάκων**. Η προηγούμενη norm πινάκων, καθώς παρουσιάζει μια ιδιότητα ανάλογη της απόλυτης τιμής των πραγματικών αριθμών, επιτρέπει την μεταφορά της απόδειξης της συνέχειας της συνάρτησης $f(x, y) = x \cdot y$ στην περίπτωση που τα x, y είναι πίνακες. Βασική σ' αυτό είναι η ανισότητα

$$\begin{aligned} ||x \cdot y - x' \cdot y'|| &= ||x \cdot y - x \cdot y' + x \cdot y' - x' \cdot y'|| \\ &\leq ||x \cdot y - x \cdot y'|| + ||x \cdot y' - x' \cdot y'|| \\ &\leq ||x|| \cdot ||y - y'|| + ||y'|| \cdot ||x - x'||, \end{aligned}$$

που δείχνει ότι αν για τις ακολουθίες πινάκων $\lim\, x_n = x,\ \lim\, y_n = y$, τότε και $\lim\,(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

7. **Η γενική γραμμική ομάδα** $GL(n, \mathbb{R})$. Οι αντιστρέψιμοι πίνακες $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ αποτελούν μια ομάδα που είναι και ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, καθώς αυτό καθορίζεται ως αντίστροφη εικόνα $det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ του ανοικτού $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$ μέσω της απεικόνισης της ορίζουσας

$$det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Η ορίζουσα είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση στο $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$, άρα συνεχής. Η ομάδα αυτή των αντιστρεψίμων πινάκων συμβολίζεται με $GL(n, \mathbb{R})$ και αναφέρεται ως **γενική γραμμική ομάδα**. Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, το γινόμενο πινάκων είναι συνεχής απεικόνιση. Εύκολα βλέπουμε ότι και η αντιστροφή ενός πίνακα $f(A) = A^{-1}$ είναι μια συνεχής απεικόνιση

$$f : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}).$$

Αυτό προκύπτει από την παράσταση του αντίστροφου πίνακα μέσω των συμπαραγόντων του και της αντίστροφης της ορίζουσας ([Στρ12β, σελ.271]), που δίδει τα στοιχεία του αντιστρόφου πίνακα ως ρητές συναρτήσεις, που είδαμε πως είναι συνεχείς. Προκύπτει λοιπόν ότι η $GL(n, \mathbb{R})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και ταυτόχρονα μια ομάδα της οποίας η πράξη και η αντιστροφή ενός στοιχείου είναι συνεχείς απεικονίσεις. Τέτοιες ομάδες λέγονται **τοπολογικές ομάδες** και η $GL(n, \mathbb{R})$ είναι ένα από τα πιο σημαντικά παραδείγματά τους. Ας σημειώσουμε εδώ ότι η $GL(n, \mathbb{R})$ δεν είναι συνεκτική. Τα δύο ανοικτά που ορίζονται ως αντίστροφες εικόνες μέσω της ορίζουσας

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{R})_+ &= \{x \in GL(n,\mathbb{R}) : det(x) > 0\} \ \text{ και} \\ GL(n,\mathbb{R})_- &= \{x \in GL(n,\mathbb{R}) : det(x) < 0\} \end{aligned}$$

είναι μη κενά ανοικτά ξένα και η ένωσή τους είναι όλη η $GL(n, \mathbb{R})$. Πιο κάτω (Θεώρημα 5.2.16) θα δείξουμε ότι τα δύο αυτά σύνολα συμπίπτουν ακριβώς με τις συνεκτικές συνιστώσες της $GL(n, \mathbb{R})$. Σημειωτέον ότι η $GL(n, \mathbb{R})_+$ είναι (ανοικτή) υποομάδα της $GL(n, \mathbb{R})$ και ταυτόχρονα τοπολογική ομάδα ως προς την σχετική τοπολογία, λέμε σύντομα **τοπολογική υποομάδα**. Για $n = 1$ η $GL(n, \mathbb{R})$ συμπίπτει με την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{R} - \{0\}$ και η $GL(n, \mathbb{R})_+$ με την υποομάδα της $\mathbb{R}_+$, των θετικών αριθμών.

8. **Οι ομάδες** $SL(n, \mathbb{R})$ **και** $O(n)$. Οι πίνακες $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ με ορίζουσα $det(A) = 1$ αποτελούν μια κλειστή τοπολογική υποομάδα της $GL(n, \mathbb{R})_+$ που ονομάζεται **ειδική γραμμική ομάδα** και συμβολίζεται με $SL(n, \mathbb{R})$. Ορθογώνιοι $n \times n$ πίνακες λέγονται αυτοί των οποίων ο αντίστροφος υπάρχει και συμπίπτει με τον ανάστροφο $A^{-1} = A^t$ ([Στρ12β, σελ.193]). Και αυτοί αποτελούν τοπολογική υποομάδα της $GL(n, \mathbb{R})$ που ονομάζεται **Ορθογώνια ομάδα**. Πράγματι, η ομάδα αυτή μπορεί να ορισθεί ως αντίστροφη εικόνα, μέσω συνεχούς απεικόνισης, ενός (κλειστού) μονοσυνόλου $\{I\}$, όπου I ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας. Προς τούτο αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι συμμετρικοί $n \times n$ πίνακες αποτελούν έναν γραμμικό υπόχωρο $S_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \quad \text{με} \ \ f(A) = A^t \cdot A,$$

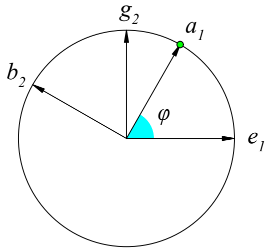
είναι συνεχής. Η ομάδα $O(n) = f^{-1}(\{I\})$ είναι συνεπώς κλειστό υποσύνολο της $GL(n, \mathbb{R})$. Επειδή κάθε ορθογώνιος πίνακας $A \in O(n)$ έχει ως στήλες ορθοκανονικά διανύσματα έπεται ότι η $O(n)$ είναι και φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$, συνεπώς είναι συμπαγές. Σημειωτέον εδώ ότι και η $O(n)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες: την $O(n)_+$, που αποτελείται από τους πίνακες $A \in O(n) : det(A) = 1$ και την $O(n)_-$ που αποτελείται από τους πίνακες $A \in O(n) : det(A) = -1$. Συνήθως για την $O(n)_+$, που αποτελεί υποομάδα της $O(n)$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $SO(n)$ και ονομάζεται **ειδική ορθογώνια ομάδα**. Είναι εύκολο να δούμε ότι για $n = 2$ η $SO(2)$ είναι ισόμορφη με τον μοναδιαίο κύκλο $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ του μιγαδικού επιπέδου, που είναι (τοπολογική) ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών. Από την συνεκτικότητα του S^1 συνάγεται λοιπόν η συνεκτικότητα της $SO(2)$ και, όπως θα δείξουμε παρακάτω (Θεώρημα 5.2.12), επαγωγικά, προκύπτει η συνεκτικότητα των $SO(3), SO(4), ...$ κτλ.

Θεώρημα 5.2.12 *Η ομάδα $SO(n)$ είναι κατά τόξα συνεκτική.*

Απόδειξη: Για ένα ορθογώνιο πίνακα $A \in SO(n)$ κατασκευάζουμε μια συνεχή καμπύλη $A_t \in SO(n)$, έτσι ώστε $A_0 = A$ και $A_1 \in SO(n-1)$. Ανάγουμε λοιπόν την συνεκτικότητα σε αυτήν της $SO(n-1)$ και επαγωγικά στην $SO(n-2), ..., SO(2) \approx S^1$. Το ότι $SO(n-1) \subset SO(n)$, φαίνεται ορίζοντας για κάθε ορθογώνιο πίνακα $B \in SO(n-1)$ τον πίνακα

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \quad \in SO(n).$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι πίνακες της παραπάνω μορφής B' χαρακτηρίζονται ως εκείνα τα στοιχεία $B' \in SO(n)$, για τα οποία $B' \cdot e_1 = e_1$, όπου το e_1 συμπίπτει με το πρώτο διάνυσμα-στήλη $e_1 = (1, 0, ..., 0)^t$ της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$. Ας θεωρήσουμε τις στήλες του πίνακα $A = (a_1, \dots, a_n)$ και ας υποθέσουμε ότι τα e_1, a_1 είναι ανεξάρτητα. Τα δύο αυτά διανύσματα ορίζουν ένα επίπεδο και σε αυτό το επίπεδο επιλέγουμε διάνυσμα g_2 κάθετο στο e_1 και $g_3, \dots, g_n$ ορθοκανονικά και κάθετα στα e_1, g_2.



Σχήμα 5.2.2: Αναγωγή στην $SO(n-1)$

Τότε το a_1 γράφεται

$$a_1 = \sigmaυν(\phi)e_1 + ημ(\phi)g_2, \quad \text{για κάποια γωνία } \ \phi \in (o,\pi) \cup (\pi, 2\pi).$$

Ορίζουμε τον πίνακα με στήλες $E = (e_1, g_2, \dots, g_n) \in SO(n-1)$ και τον $n \times n$ πίνακα του $SO(n)$ σε μπλοκ

$$R_s = \begin{pmatrix} C(s\phi) & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \text{ όπου } \quad C(s\phi) = \begin{pmatrix} συν(s\phi) & -ημ(s\phi) \\ ημ(s\phi) & συν(s\phi) \end{pmatrix}$$
$$\text{και } \quad I_{n-2} \ \text{ ο μοναδιαίος } (n-2) \times (n-2),$$

Βλέπουμε εύκολα ότι $E \cdot R_1(e_1) = a_1$ και ότι η συνεχής καμπύλη πινάκων $\alpha(s) = (R_s^t \cdot E^t \cdot A)$ ικανοποιεί $\alpha(1)(e_1) = e_1$, άρα $\alpha(1) \in SO(n-1)$ και $\alpha(0) = E^t \cdot A$. Επειδή ο $E \in SO(n-1)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει συνεχής καμπύλη $\beta(t) \in SO(n-1)$ έτσι ώστε $\beta(1) = E^t$ και $\beta(0) = I_{n-1} \in SO(n-1)$ ο ταυτοτικός. Τότε και η $\gamma(t) = \beta(t) \cdot A$ είναι συνεχής καμπύλη και ισχύει

$$\gamma(0) = A, \dots, \gamma(1) = (E^t \cdot A) = \alpha(0), \dots, \alpha(1) \in SO(n-1),$$

που δείχνει ότι υπάρχει συνεχής καμπύλη από το κατά τόξα συνεκτικό $SO(n-1)$ στον $A \in SO(n)$. Η περίπτωση κατά την οποία τα a_1, e_1 είναι γραμμικά εξαρτημένα είναι πολύ ευκολότερη, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.2.13 *Κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}$ σε ένα χώρο με norm $\mathcal{M}$ έχει τις ιδιότητες:*

1. *Είναι συνεχής.*
2. *Εάν είναι $1-1$, τότε υπάρχει $K > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n : ||f(x)|| \geq K||x||$.*
3. *Το $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Το (1) προκύπτει από τις ιδιότητες της norm διαλέγοντας μια βάση $\{e_i\}$ του $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} ||f(x)|| &= ||f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)|| \\ &\leq |x_1| \, ||f(e_1)|| + \cdots + |x_n| \, ||f(e_n)|| \\ &\leq (|x_1| + \cdots + |x_n|) \max_i (||f(e_i)||). \end{aligned}$$

Το (2) προκύπτει από το θεώρημα 5.2.10 και το ότι η $x \mapsto ||f(x)||$ είναι συνεχής, συνεπώς και ο περιορισμός της στην σφαίρα $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ θα είναι συνεχής. Έτσι κατά το προαναφερθέν θεώρημα θα υπάρχει $x_0 \in S^{n-1}$ για το οποίο το $||f(x)||$ θα είναι ελάχιστο και ίσο με $K \geq 0$. Το $K = 0$ αποκλείεται, διότι τότε θα είχαμε $f(x_0) = 0$, που λόγω της υπόθεσης αποκλείεται.

Το (3) προκύπτει κατ' αρχήν για $1-1$ απεικονίσεις, λόγω του (2). Πράγματι, αν η f είναι $1-1$, και $\{y_n = f(x_n)\}$ είναι ακολουθία που συγκλίνει στο $y_0 \in \overline{f(\mathbb{R}^n)}$, τότε, ως συγκλίνουσα, θα είναι Cauchy και συνεπώς, βάσει της (2)

$$||x_m - x_n|| \, K \leq ||f(x_m) - f(x_n)||$$

και η $\{x_n\}$ θα είναι επίσης Cauchy. Λόγω της πληρότητας του $\mathbb{R}^n$ η τελευταία θα συγκλίνει σε σημείο x_0 και, λόγω της συνέχειας της f, θα ισχύει $f(x_0) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = y_0$.

Εάν η f δεν είναι $1-1$, τότε παίρνουμε ένα συμπλήρωμα V του πυρήνα $Kern(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$. Και εφαρμόζομε το προηγούμενο συμπέρασμα στην επαγόμενη συνεχή απεικόνιση $f\Big|_V : V \to \mathcal{M}$, που είναι $1-1$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 5.2.4 *Κάθε υπόχωρος A πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου $\mathcal{M}$ με norm είναι κλειστός.*

Απόδειξη: Ως γνωστόν, ο διανυσματικός χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση, όταν υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος ανεξάρτητα διανύσματα $\{e_1, \dots, e_n\}$ που αποτελούν μια **βάση** ([Στρ12β, σελ.97]), έτσι ώστε κάθε διάνυσμα x του χώρου να γράφεται με μοναδικό τρόπο ως συνδυασμός $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Αν λοιπόν ο $A \subset \mathcal{M}$ έχει πεπερασμένη διάσταση n, τότε διαλέγοντας μια βάση του $\{e_i\}$, ορίζουμε την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}$ με $f(x_1, \dots, x_n) = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, για την οποία $f(\mathbb{R}^n) = A$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.2.14 *Η μοναδιαία σφαίρα $S = \{x \in \mathcal{M} : ||x|| = 1\}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{M}$ με norm είναι συμπαγής, τότε και μόνον τότε, όταν η διάσταση του $\mathcal{M}$ είναι πεπερασμένη.*

Απόδειξη: Είδαμε, στα προηγούμενα παραδείγματα, ότι οι μοναδιαίες σφαίρες σε τέτοιους χώρους είναι συμπαγείς. Αρκεί λοιπόν εδώ να δείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή ότι, εάν η μοναδιαία σφαίρα είναι συμπαγής, τότε ο χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση. Η απόδειξη ([Sim63, σ. 224]) γίνεται με αναγωγή σε άτοπο.

Πράγματι, αν ο $\mathcal{M}$ δεν είχε πεπερασμένη διάσταση, αλλά η μοναδιαία σφαίρα του S ήταν συμπαγής, αυτή θα εκαλύπτετο από πεπερασμένες το πλήθος μπάλες ακτίνας, ας πούμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ με κέντρα $e_1, \dots, e_n \in S$. Ο υπόχωρος V του $\mathcal{M}$ που παράγεται από τα διανύσματα $\{e_i\}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, άρα κλειστός. Ισχύει ότι $V = \mathcal{M}$. Πράγματι, αν υπήρχε $x \in \mathcal{M}$ με $x \notin V$, τότε, λόγω της κλειστότητας του V η απόσταση θα ήταν

$$\begin{aligned}
&d(x, V) = \delta > 0 \quad \Rightarrow \\
&\text{θα υπάρχει} \quad v \in V \quad \text{με} \quad \delta \le ||x - v|| \le \frac{3\delta}{2} \Rightarrow \\
&\text{για} \quad s \in S \text{ θα ισχύει: } ||\frac{x - v}{||x - v||} - s|| = \frac{1}{||x - v||}(||x - (v + ||x - v||s)||) \\
&\ge \frac{1}{||x - v||}\delta \ge \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα όμως αντιφάσκει στο ότι κάθε σημείο της σφαίρας S ευρίσκεται σε απόσταση $< \frac{1}{2}$ από κάποιο σημείο από τα $\{e_i\}$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 5.2.5 *Η κλειστή μπάλα $B = \{x \in \mathcal{M} : ||x|| \le 1\}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{M}$ με norm είναι συμπαγής, τότε και μόνον τότε, όταν η αντίστοιχη σφαίρα $S = \{x \in \mathcal{M} : ||x|| = 1\}$ είναι συμπαγής.*

Θεώρημα 5.2.15 *Ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι συμπαγής τότε και μόνον τότε, όταν κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Εάν ο χώρος είναι συμπαγής τότε, κατά το θεώρημα 5.2.10, η f θα είναι φραγμένη. Αντίστροφα, αν ισχύει η ιδιότητα του θεωρήματος και ο $\mathcal{M}$ δεν είναι συμπαγής, τότε θα υπάρχει μια ακολουθία $X = \{x_n\}$ χωρίς καμία συγκλίνουσα υπακολουθία. Το σύνολο X είναι κλειστό. Πράγματι, αν μια ακολουθία από αυτό το σύνολο συγκλίνει, αυτή θα πρέπει να είναι τελικά σταθερή, αφού το X δεν περιέχει συγκλίνουσες υπακολουθίες. Στο κλειστό λοιπον X, που είναι και διακριτός χώρος, ορίζεται η συνάρτηση f με $f(x_n) = n$, που είναι συνεχής. Κατά το θεώρημα του Tietze αυτή θα επεκτείνεται σε μια συνεχή $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένη, πράγμα άτοπο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 5.2.6 *Η γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ δεν είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση της ορίζουσας $det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένη, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.2.16 *Η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες. Το ίδιο ισχύει και για την γενική γραμμική ομάδα $GL(n,\mathbb{R})$.*

Απόδειξη: Το ότι η υποομάδα $SO(n) \subset O(n)$ των ορθογωνίων πινάκων με ορίζουσα $= 1$ είναι συνεκτική συνιστώσα της $O(n)$ το είδαμε στο θεώρημα 5.2.12. Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα με τον διαγώνιο $J = diag(-1, 1, \ldots, 1)$, που έχει όλα τα διαγώνια $= 1$ εκτός του πρώτου $= -1$, είναι ένας ομοιομορφισμός $f_J : O(n) \to O(n)$ με $(f_J)^{-1} = f_J$. Εάν ένας πίνακας $A \in O(n)$ έχει ορίζουσα $det(A) = -1$ τότε ο $J \cdot A$ έχει ορίζουσα $= +1$ και αντίστροφα. Επομένως ο f_J εναλλάσσει το $SO(n)$ με το συμπλήρωμά του $O(n)_- = O(n) - SO(n)$. Επειδή το $SO(n)$ είναι συνεκτικό, και το $O(n)_-$ θα είναι συνεκτικό και η $O(n)$ θα έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες: την $SO(n)$ και την $f_J(SO(n))$.

Η αντίστοιχη ιδιότητα για την $GL(n,\mathbb{R})$ προκύπτει από αυτήν της $O(n)$ και το γνωστό θεώρημα ορθοκανονικοποίησης ([Στρ12β, σελ.200]) μιας βάσης του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι κάθε $A \in GL(n,\mathbb{R}), A = (a_1, \ldots, a_n)$ ορίζει με τις στήλες του $\{a_i\}$ μια βάση. Η ορθοκανονικοποίηση ισοδυναμεί με την παραγοντοποίηση του πίνακα σε ένα γινόμενο

$$A = B \cdot T,$$

όπου ο $B \in O(n)$ και ο T είναι αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός. Είναι εύκολο να δούμε ότι για έναν τέτοιο T υπάρχει μια συνεχής καμπύλη $\gamma(t)$ από αντιστρέψιμους άνω τριγωνικούς με $\gamma(0) = T$ και $\gamma(1) = diag(sign(t_{11}), \ldots, sign(t_{nn})) = T_1 \in O(n)$, όπου $sign(t_{ii})$ συμβολίζει το πρόσημο ± 1 του διαγώνιου στοιχείου t_{ii} του πίνακα T. Προκύπτει ότι η συνεχής καμπύλη του $GL(n,\mathbb{R})$, $\beta(t) = B \cdot \gamma(t)$ συνδέει το $A = \beta(0)$ με ένα στοιχείο $A' = B \cdot T_1 = \beta(1) \in O(n)$, ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5.2.1 *Δείξε κάθε συμπαγές συνεκτικό υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$ συμπίπτει με ένα κλειστό διάστημα $[a,b], a, b \in \mathbb{R}$.*

Άσκηση 5.2.2 *Δείξε ότι η τομή $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a_n, b_n], a_n, b_n \in \mathbb{R}$ κλειστών διαστημάτων $\{I_1 \supset I_2 \supset \ldots\}$ είναι κλειστό διάστημα ή μονοσύνολο $\{x\} \subset \mathbb{R}$.*

Άσκηση 5.2.3 *Δείξε ότι αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και τα κλειστά διαστήματα $\{I_n = [a_n, b_n]\}$, με $\{a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ είναι κιβωτισμένα $\{I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots\}$ και έχουν τομή ένα μονοσύνολο $\cap_n I_n = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε και τα $\{J_n = f(I_n)\}$ είναι παρόμοια κιβωτισμένα $\{J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots\}$ και η τομή τους είναι το μονοσύνολο $\{f(x)\}$.*

Άσκηση 5.2.4 *Δείξε ότι η μοναδιαία σφαίρα $S^1 = \{x \in \ell^2 : ||x||_2 = 1\}$ του ℓ^2 δεν είναι ολικά φραγμένη.*

Άσκηση 5.2.5 *Δείξε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\overline{B_0(1)} = \{f \in C[0,1] : \sup\{|f(t)|\} \leq 1\}$ του $C[0,1]$ με την συνήθη του μετρική δεν είναι συμπαγής.*

Άσκηση 5.2.6 *Εάν το A είναι συμπαγές υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, δείξε ότι για κάθε σημείο x του $\mathcal{M}$, υπάρχει σημείο $x' \in A$ έτσι ώστε $d(x,x') = d(x,A)$. Δείξε επίσης ότι αν δ είναι η διάμετρος του A, τότε αυτή είναι πεπερασμένη και υπάρχουν δύο σημεία $x, y \in A$ έτσι ώστε $d(x,y) = \delta$.*

Άσκηση 5.2.7 *Δείξε, διαφορετικά από το θεώρημα 5.2.7, ότι ένας συμπαγής μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ είναι διαχωρίσιμος. (Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κατασκεύασε πεπερασμένα σύνολα σημείων $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ των οποίων οι μπάλες ακτίνας $\frac{1}{n}$ καλύπτουν το $\mathcal{M}$. Πάρε την ένωση.)*

Άσκηση 5.2.8 *Δείξε ότι μία ισομετρία f του συμπαγούς μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$ είναι πάντοτε επί. (Υπόδειξη: πάρε $x \notin f(\mathcal{M})$ και θεώρησε την ακολουθία $\{f(x), f^2(x), \ldots\}$.)*

Άσκηση 5.2.9 *Δείξε ότι για ένα πραγματικό αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα A, υπάρχει $k > 0$ έτσι ώστε, ως προς την συνήθη* norm *του $\mathbb{R}^n$ να ισχύει $||Ax|| \geq ||x||$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξε επίσης ότι το k^2 συμπίπτει με την ελάχιστη ιδιοτιμή του συμμετρικού πίνακα $B = A^t A$.*

5.3 Τοπική συμπάγεια, συμπαγοποίηση

Ορισμός 5.3.1 *Το υποσύνολο A του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ λέγεται* **σχετικά συμπαγές** *όταν η θήκη του $\overline{A}$ είναι συμπαγές σύνολο του $\mathcal{M}$. Ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ του Hausdorff λέγεται* **τοπικά συμπαγής**, *όταν για κάθε σημείο του x υπάρχει ανοικτή περιοχή $U_x \ni x$ που είναι σχετικά συμπαγής.*

Σχόλιο-1 Προφανώς οι χώροι $\mathbb{R}^n$ είναι τοπικά συμπαγείς. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι ομοιομορφισμοί διατηρούν την τοπική συμπάγεια, με την έννοια ότι αν f είναι ομοιοφορφισμός μεταξύ των τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ και ο $\mathcal{M}$ είναι τοπικά συμπαγής, τότε το ίδιο θα είναι και ο $\mathcal{M}'= f(\mathcal{M})$.

Χώροι $\mathcal{M}$, που παρουσιάζουν μία *ομογένεια*, με την έννοια ότι για κάθε δύο σημεία τους $x \neq y$ υπάρχει ομοιορφισμός f του χώρου στον εαυτό του με $f(x) = y$, γι να είναι τοπικα συμπαγείς, αρκεί να έχουν ένα σημείο x με ανοικτή περιοχή $x \in U_x$ και $\overline{U_x}$ συμπαγή. Τέτοιοι ομογενείς χώροι είναι οι διανυσματικοί χώροι με norm. Γι' αυτούς, κάθε ζεύγος σημείων (a, b) ορίζει μια *μεταφορά* $y = f(x) = x + (b - a)$, που είναι ομοιομορφισμός και απεικονίζει το a στο b. Ένα σημαντικό παράδειγμα χώρων που δεν είναι τοπικά συμπαγείς είναι οι απειροδιάστατοι χώροι Banach.

Θεώρημα 5.3.1 *Ένας απειροδιάστατος χώρος Banach $\mathcal{M}$ δεν είναι τοπικά συμπαγής.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι συνέπεια του πορίσματος 5.2.5, κατά το οποίο η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\overline{B_1}$ σε ένα τέτοιο χώρο δεν είναι συμπαγής. Αν ο χώρος είχε μια άλλη συμπαγή περιοχή V του 0, τότε αυτή θα περιείχε κάποια κλειστή μπάλα $\overline{B_r}$ ακτίνας $r < 1$ η οποία, ως κλειστό του συμπαγούς V, θα ήταν επίσης συμπαγής. Τότε η ομοιοθεσία του $\mathcal{M}$ με λόγο $\frac{1}{r}$, δηλαδή ο ομοιομορφισμός του $\mathcal{M}$ $f(x) = \frac{1}{r}x$ θα απεικόνιζε την $\overline{B_r}$ στην $\overline{B_1}$, που θα ήταν τότε επίσης συμπαγής, αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.3.2 *Ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο A του τοπικά συμπαγούς χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι τοπικά συμπαγής χώρος ως προς την σχετική τοπολογία.*

Απόδειξη: Έστω $x \in A$ και U_x σχετικά συμπαγής περιοχή του x στο $\mathcal{M}$. Τότε η $V_x = U_x \cap A$ είναι σχετικά συμπαγής περιοχή του x στο A. Πράγματι κατά το Θεώρημα 1.1.7 $(\overline{V_x})_A = \overline{U_x} \cap A$, το οποίο, ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς U_x, είναι συμπαγές, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.3.3 *Ένας τοπικά συμπαγής χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι κανονικός (T_3).*

Απόδειξη: Έστω $x \in \mathcal{M}$ και $A \subset \mathcal{M}$ κλειστό με $x \notin A$. Έστω U μια ανοικτή περιοχή του x με $\overline{U}$ συμπαγές. Βρίσκουμε ξένα ανοικτά $V \ni x$ και $W \supset A$ με την βοήθεια της U. Πράγματι τα $\{x\}, \overline{U} \cap A$ είναι κλειστά (συμπαγή) του $\overline{U}$ άρα (θεώρημα 5.1.7) διαχωρίζονται με ξένα ανοικτά $V' \cap \overline{U}$ και $W' \cap \overline{U}$, όπου V', W' ανοικτά του $\mathcal{M}$. Τότε τα $V = V' \cap U$ και $W = W' \cup (\overline{U})^c$ είναι ξένα ανοικτά που διαχωρίζουν τα $\{x\}$ και A, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.3.4 *Για κάθε σημείο x τοπικά συμπαγούς χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ και κάθε ανοικτό $A \ni x$, υπάρχει ανοικτό U με $x \in U \subset \overline{U} \subset A$ και $\overline{U}$ συμπαγές.*

Απόδειξη: Από την τοπική συμπάγεια συνάγεται η ύπαρξη ανοικτής περιοχής W του x με $\overline{W}$ συμπαγές. Τότε το $\overline{W}$ με την σχετική τοπολογία είναι φυσιολογικός χώρος (Θεώρημα 5.1.7). Συνεπώς υπάρχει ανοικτό U' του $\mathcal{M}$, έτσι ώστε $x \in \overline{W} \cap U' \subset \overline{W} \cap \overline{U'} \subset \overline{W} \cap A$ (Θεώρημα 3.2.1 και Θεώρημα 1.1.7). Αρκεί να πάρουμε $U = W \cap U'$, ο.ε.δ.

Ορισμός 5.3.2 **Συμπαγοποίηση** *του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ λέγεται ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$, για τον οποίο υπάρχει μια 1-1 συνεχής απεικόνιση $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ έτσι ώστε το $f(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}'$ να είναι πυκνό. Η f (ή/και ο $\mathcal{M}'$) λέγεται* **συμπαγοποίηση ενός σημείου**, *όταν το $\mathcal{M}' - f(\mathcal{M})$ περιέχει ένα ακριβώς σημείο.*

Θεώρημα 5.3.5 *Κάθε τοπικά συμπαγής χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, έχει συμπαγοποίηση ενός σημείου $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε το $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup \{x_0\}$, όπου $x_0 \notin \mathcal{M}$ αυθαίρετο σημείο. Την τοπολογία $\mathcal{T}'$ ορίζουμε να είναι

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \mathcal{S}, \text{ όπου } S = \{A^c \cup \{x_0\} : A \text{ συμπαγές του } \mathcal{M}\}.$$

Δείχνουμε εύκολα ότι το $\mathcal{T}'$ ικανοποιεί τα αξιώματα της τοπολογίας. Το ότι ο $\mathcal{M}'$ είναι Hausdorff έπεται άμεσα από το ότι δύο σημεία $x, y \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ διαχωρίζονται. Όμως και ένα $x \in \mathcal{M}$ και το x_0 διαχωρίζονται παίρνοντας μια ανοικτή περιοχή U_x του x με $\overline{U_x}$ συμπαγές και το $V = (\overline{U_x})^c$ ως περιοχή του x_0. Το $\mathcal{M}'$ είναι συμπαγές, διότι μια ανοικτή κάλυψη $\{A_i, i \in I\}$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Πράγματι, θα υπάρχει τότε ένα A_0 το οποίο θα είναι συμπλήρωμα συμπαγούς A_1 το οποίο θα καλύπτεται από πεπερασμένα εκ των A_i, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.3.6 *Δύο συμπαγοποιήσεις ενός σημείου $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ και $(\mathcal{M}'', \mathcal{T}'')$ του ιδίου χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι ομοιόμορφες.*

Απόδειξη: Ταυτίζοντας το $\mathcal{M}$ με το $f(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}'$ δείχνουμε ότι δύο συμπαγοποιήσεις $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup \{x_0\}$ και $\mathcal{M}'' = \mathcal{M} \cup \{x_1\}$ είναι ομοιόμορφες, μέσω της απεικόνισης

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{όταν } \quad x \in \mathcal{M}, \\ x_1, & \text{για } \quad x = x_0. \end{cases}$$

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι ανοικτή, πράγμα τετριμμένο, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.3.7 *Ένας τοπικά συμπαγής χώρος είναι χώρος του Baire.*

Απόδειξη: Δείχνουμε ότι κάθε ακολουθία ανοικτών πυκνών $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ υποσυνόλων του $\mathcal{M}$, έχει τομή $A = \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ πυκνό σύνολο του $\mathcal{M}$. Η απόδειξη είναι σχεδόν η ίδια με αυτήν του αντιστοίχου θεωρήματος 3.1.2 για πλήρεις μετρικούς χώρους. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ανοικτό U η τομή $U \cap A \neq \emptyset$. Ξεκινάμε από το ανοικτό $U \cap A_1 \neq \emptyset$ στο οποίο, εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.3.4, βρίσκουμε ανοικτό $B_1 : B_1 \subset \overline{B_1} \subset U \cap A_1$ και $\overline{B_1}$ συμπαγές. Το $B_1 \cap A_2$ θα είναι πάλι ανοικτό μη κενό και με το ίδιο επιχείρημα βρίσκουμε ανοικτό $B_2 : B_2 \subset \overline{B_2} \subset B_1 \cap A_2$ και $\overline{B_2}$ συμπαγές. Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε ακολουθία $\{B_i, i \in \mathbb{N}\}$ ανοικτών και *σχετικά συμπαγών*, με την ιδιότητα $B_n \subset \overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap A_n$ και

$$B_1 \supset \overline{B_2} \supset B_2 \supset \overline{B_3} \supset B_3 \supset \ldots$$

Κατά το πόρισμα 5.1.3, εφαρμοζόμενο στο συμπαγές $\overline{B_1}$, η τομή $\cap_{i \in \mathbb{N}} \overline{B_i} = B$ θα είναι μη κενό σύνολο περιεχόμενο στο $U \cap A$, ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5.3.1 *Δείξε ότι κάθε συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος είναι και τοπικά συμπαγής.*

Άσκηση 5.3.2 *Δείξε ότι η εικόνα $f(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}'$ ενός τοπικά συμπαγούς τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, μέσω της συνεχούς απεικόνισης $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ μπορεί να μην είναι τοπικά συμπαγής. Εάν όμως η f είναι ανοικτή, τότε ο $f(\mathcal{M})$ είναι τοπικά συμπαγής.*

Άσκηση 5.3.3 *Δείξε ότι αν ο χώρος $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ είναι Hausdorff και το υποσύνολό του A είναι πυκνό και τοπικά συμπαγής χώρος ως προς την σχετική τοπολογία, τότε το A είναι ανοικτό.*

Άσκηση 5.3.4 *Δείξε ότι αν η f είναι μια συνεχής επίρριψη του τοπικά συμπαγούς χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στον $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$, τότε, για κάθε συμπαγές B του $\mathcal{M}'$, υπάρχει συμπαγές A του $\mathcal{M}$, έτσι ώστε $f(A) = B$.*

Άσκηση 5.3.5 *Δείξε ότι ότι η συμπαγοποίηση ενός σημείου του $(0, 1)$ είναι ομοιόμορφη με τον μοναδιαίο κύκλο S^1.*

Άσκηση 5.3.6 *Δείξε ότι ότι η συμπαγοποίηση ενός σημείου του $\mathbb{C}$ είναι ομοιόμορφη με την μοναδιαία σφαίρα S^2 (Υπόδειξη: Παράδειγμα 3 της §2.2).*

Άσκηση 5.3.7 *Είναι το $[0,1]$ συμπαγοποίηση του $(0,1)$; Είναι η κλειστή μπάλα $\overline{B_1(0)}$ ενός διανυσματικού χώρου με* norm *συμπαγοποίηση της ανοικτής $B_1(0)$;*

Άσκηση 5.3.8 *Δείξε ότι η ομάδα $GL(n,\mathbb{R})$ είναι τοπικά συμπαγής.*

Άσκηση 5.3.9 *Δείξε ότι η ομάδα $SL(n,\mathbb{R})$ είναι τοπικά συμπαγής. (Υπόδειξη: χρήση της προηγούμενης άσκησης και του θεωρήματος 5.3.2.)*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συμπληρωματικά θέματα

6.1 Η τοπολογία ταύτισης

Ορισμός 6.1.1 1. *Για δοθείσα επίρριψη $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ ενός τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, στο μη-κενό σύνολο $\mathcal{M}'$, ονομάζουμε* **τοπολογία ταύτισης** *την τοπολογία $\mathcal{T}_f$, που ορίζεται στο $\mathcal{M}'$ και έχει ως ανοικτά εκείνα τα υποσύνολα $A \subset \mathcal{M}'$ για τα οποία οι αντίστροφες εικόνες τους $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτά του $\mathcal{M}$.*

$$\mathcal{T}_f = \{A \subset \mathcal{M}' : f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}.$$

2. *Μια επίρρηψη f του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στον $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$, λέγεται* **απεικόνιση ταύτισης**, *όταν η τοπολογία $\mathcal{T}'$ είναι ακριβώς η τοπολογία ταύτισης $\mathcal{T}_f$ της f.*

Σχόλιο-1 Ο ορισμός (1) περιέχει και έναν ισχυρισμό που θέλει απόδειξη. Δηλαδή το ότι το σύνολο $\mathcal{T}_f$, που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο, ικανοποιεί, όντως, τα αξιώματα της τοπολογίας. Αυτό όμως είναι μια τετριμμένη άσκηση.

Σχόλιο-2 Επειδή για κάθε υποσύνολο $A \subset \mathcal{M}'$ ισχύει $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$, έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα ενός κλειστού είναι κλειστό, αν και μόνον αν, η αντίστροφη εικόνα ενός ανοικτού είναι ανοικτό. Αυτό σημαίνει ότι στην τοπολογία ταύτισης το σύνολο $B \subset \mathcal{M}'$ είναι κλειστό, αν και μόνον αν, το $f^{-1}(B)$ είναι κλειστό του $\mathcal{M}$.

Σχόλιο-3 Η τοπολογία ταύτισης είναι η μεγαλύτερη τοπολογία που μπορεί να ορισθεί στο $\mathcal{M}'$, για την οποία η $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ είναι συνεχής. Πράγματι αν A είναι ανοικτό μιας τέτοιας τοπολογίας $\mathcal{T}'$, τότε το $f^{-1}(A)$ θα είναι ανοικτό της $\mathcal{T}$ και συνεπώς $A \in \mathcal{T}_f$, πράγμα που δείχνει ότι $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_f$.

Θεώρημα 6.1.1 *Μια συνεχής ανοικτή ή κλειστή επίρριψη f του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στον $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ είναι μια ταύτιση.*

Απόδειξη: Πρέπει να δείξουμε ότι $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_f$. Το ότι $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_f$ σχολιάσθηκε παραπάνω. Το ότι $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}'$, προκύπτει πάλι αμέσως από το ότι $f(f^{-1}(A)) = A$ γιά κάθε σύνολο $A \subset \mathcal{M}'$. Έτσι, αν λ.χ. το $A \in \mathcal{T}_f$, τότε το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό και αν η f είναι ανοικτή, τότε και το $f(f^{-1}(A)) = A$ θα είναι ανοικτό. Ανάλογη είναι η απόδειξη και για κλειστή f, ο.ε.δ.

Σχόλιο-4 Από το θεώρημα προκύπτει ότι σε ένα γινόμενο τοπολογικών χώρων $\mathcal{M}$= $\mathcal{M}_1 \times ... \times \mathcal{M}_n$ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο, κάθε μία από τις προβολές $p_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_i$ είναι μια ταύτιση (σχόλιο 1.2, §1.2).

Θεώρημα 6.1.2 *Μια συνεχής επίρριψη* $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ *είναι ταύτιση, αν και μόνον αν, για κάθε τοπολογικό χώρο* $(\mathcal{N}, \mathcal{S})$ *και απεικόνιση* $g : \mathcal{M}' \to \mathcal{N}$ *η συνέχεια της* $g \circ f$ *συνεπάγεται την συνέχεια της* g.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gof"'] & M' \arrow[d, "g"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Σχήμα 6.1.1: f ταύτιση: συνέχεια της $g \circ f \Rightarrow\ g$ συνεχής

Απόδειξη: Πράγματι, αν η f είναι ταύτιση και η $g \circ f$ είναι συνεχής, τότε για $A \subset \mathcal{N}$ ανοικτό το $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ θα είναι ανοικτό, άρα, λόγω της ταύτισης f, και το $g^{-1}(A)$ θα είναι ανοικτό, πράγμα που δείχνει ότι η g είναι συνεχής.

Για το αντίστροφο, παίρνουμε σαν $\mathcal{N}$ το ίδιο το $\mathcal{M}'$ με την τοπολογία ταύτισης $\mathcal{T}_f$. Έστω $Id : \mathcal{M}' \to \mathcal{N}$ η ταυτοτική και $f' = Id \circ f$. Η συνέχεια της f' συνεπάγεται, κατά την υπόθεση την συνέχεια της Id. Και κατά το πρώτο μέρος η συνέχεια της $Id^{-1} \circ f' = f$, επειδή η f' εκ κατασκευής είναι ταύτιση, συνεπάγεται ότι η Id^{-1} είναι συνεχής. Προκύπτει ότι η Id είναι ομοιομορφισμός, άρα η f είναι ταύτιση, ο.ε.δ.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M' \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "f_*"] & N' \end{tikzcd}$$

Σχήμα 6.1.2: $f : f(g^{-1}(n)) \subset h^{-1}(n')$ για κάποιο $n' \in \mathcal{N}'$

Θεώρημα 6.1.3 *Έστω ότι* $g : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *και* $h : \mathcal{M}' \to \mathcal{N}'$ *είναι δύο ταυτίσεις και* $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ *είναι μια συνεχής απεικόνιση που τις "σέβεται", με την έννοια ότι, για κάθε* $n \in \mathcal{N}$ *το* $f(g^{-1}(n))$ *είναι υποσύνολο του* $h^{-1}(n')$ *για κάποιο* $n' \in \mathcal{N}'$. *Τότε ορίζεται συνεχής* $f_* : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, *που κάνει το διάγραμμα 6.1.2 μεταθετικό.*

Απόδειξη: Βάσει της υπόθεσης, η f_* είναι μονοσήμαντα και καλώς ορισμένη. Το $f_*(n)$ προσδιορίζεται παίρνοντας το $f_*(n) = h(f(m))$ για ένα οποιοδήποτε $m \in g^{-1}(n)$. Από τον ορισμό της η f_* κάνει το διάγραμμα μεταθετικό, δηλαδή ικανοποιεί την $f_* \circ g = h \circ f$. Αν το $U \subset \mathcal{N}'$ είναι ανοικτό, τότε το $h^{-1}(U)$ είναι ανοικτό του $\mathcal{M}'$ και λόγω της συνέχειας της f το

$$f^{-1}(h^{-1}(U)) = g^{-1}(f_*^{-1}(U))$$

είναι ανοικτό του $\mathcal{M}$. Επειδή η g είναι ταύτιση, αυτό σημαίνει ότι το $f_*^{-1}(U)$ είναι ανοικτό του $\mathcal{N}$, άρα η f_* είναι συνεχής, ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 6.1.1 *Έστω* f *μια συνεχής επίρριψη του χώρου* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ *στον* $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$. *Δείξε ότι αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση* g *του* $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$ *στον* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, *έτσι ώστε* $f \circ g = I_{\mathcal{M}'}$, *όπου η* $I_{\mathcal{M}'}$ *είναι η ταυτοτική του* $\mathcal{M}'$, *τότε η* f *είναι ταύτιση.*

Άσκηση 6.1.2 *Έστω* f *μια συνεχής ανοικτή επίρριψη του χώρου* $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ *στον* $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$. *Υπέθεσε και ότι για κάθε* $x \in \mathcal{M}'$ *το* $f^{-1}(x) \subset \mathcal{M}$ *είναι συνεκτικό. Δείξε ότι τότε το υποσύνολο* $A' \subset \mathcal{M}'$ *είναι συνεκτικό αν και μόνον αν το* $A = f^{-1}(A') \subset \mathcal{M}$ *είναι συνεκτικό.*

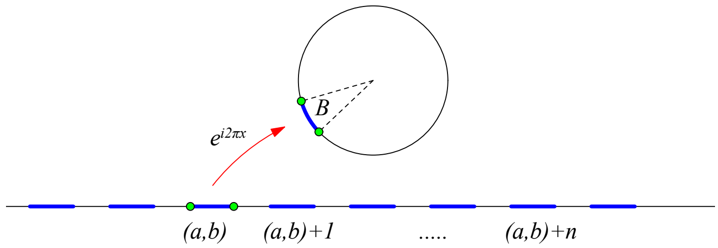
6.2 Η τοπολογία πηλίκον

Η σημαντικότερη εφαρμογή της τοπολογίας ταύτισης είναι αυτή της **τοπολογίας πηλίκον**. Αυτή ορίζεται από μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ σ' ένα τοπολογικό χώρο $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$. Πράγματι μια σχέση ισοδυναμίας, χωρίζει το $\mathcal{M}$ σε ξένα υποσύνολα, τις **κλάσεις ισοδυναμίας**, το σύνολο των οποίων ονομάζεται **χώρος πηλίκον** του $\mathcal{M}$ ως προς την σχέση $\sim$, που συμβολίζεται με $\mathcal{M}' = \mathcal{M}/\sim$. Ορίζεται αμέσως και η (φυσική) **προβολή** $p : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, που αντιστοιχεί σε κάθε $x \in\mathcal{M}$, την κλάση του $p(x) = [x]$.

Ορισμός 6.2.1 Τοπολογία πηλίκον *του χώρου πηλίκον $\mathcal{M}' = \mathcal{M}/\sim$ ονομάζεται η τοπολογία ταύτισης της p, κατά την οποία το $A \subset \mathcal{M}'$ είναι ανοικτό, αν και μόνον αν, το $p^{-1}(A)$ είναι ανοικτό του$\mathcal{M}$.*

Παραδείγματα

1. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Στο $\mathbb{R}$, με την συνήθη τοπολογία, ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 6.2.1: $e^{i2\pi x}$ και p ανοικτές απεικονίσεις

Το σύνολο πηλίκον $\mathbb{R}/\sim$ συμβολίζουμε με $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και είναι ομοιόμορφο με τον μοναδιαίο κύκλο $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Πράγματι, όλα τα στοιχεία μιας κλάσης $[x] = p(x) = \{x + n : n \in \mathbb{Z}\}$ απεικονίζονται μέσω της απεικόνισης

$$h(x) = e^{i2\pi x} = (\text{συν}(2\pi x) + i\,\text{ημ}(2\pi x)),$$

στο ίδιο σημείο του κύκλου. Ορίζεται λοιπόν μια απεικόνιση

$$g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1 \quad g([x]) = h(x), \quad \text{για την οποία εξ ορισμού} \ \ g \circ p = h.$$

Λόγω της συνέχειας της h έπεται η συνέχεια της g (θεώρημα 6.1.2). Το σχήμα 6.2.1 δείχνει την αιτία για την οποία η g είναι και ανοικτή, άρα ομοιομορφισμός, αφού είναι και $1-1$ και επί. Πράγματι, βλέπουμε εύκολα ότι h είναι ανοικτή, καθώς απεικονίζει ένα διάστημα $I = (a, b)$ εύρους μικρότερου του 1 σε ένα αντίστοιχο ανοικτό τόξο B του κύκλου. Από την άλλη μεριά το $I' = p^{-1}(p(I))$ είναι ένωση των διαστημάτων που συμβολικά μπορούμε να γράψουμε $\{(a, b) + n, n \in \mathbb{Z}\}$ και είναι οι μεταφορές του (a, b) κατά n. Το I' λοιπόν είναι ανοικτό, άρα και το $p(I)$ θα είναι ανοικτό. Η g συνεπώς απεικονίζει κάθε τέτοιο ανοικτό $p(I)$ σε ένα ανοικτό B του κύκλου.

2. **Οι χώροι** $\mathcal{M}/A$. Γιά κάθε μη-κενό υποσύνολο A, ενός τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, ορίζεται ένας χώρος πηλίκον, μιας σχέσης ισοδυναμίας που έχει ως κλάσεις (α) τα μονοσύνολα $\{x\}$, αν $x \notin A$ και (β) το ίδιο το A. Στον χώρο πηλίκον λοιπόν έχουμε τα ίδια σημεία με τον $\mathcal{M}$, εκτός του A που έχουμε ταυτίσει με ένα σημείο. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις που το A είναι ανοικτό/κλειστό, καθώς τότε η αντίστοιχη προβολή

$$p : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/A$$

αποδεικνύεται αντίστοιχα ανοικτή/κλειστή απεικόνιση. Πράγματι, αν λ.χ. το A είναι ανοικτό και B είναι άλλο ανοικτό του $\mathcal{M}$, τότε το $p^{-1}(p(B))$ θα είναι ή το ίδιο το B αν $A \cap B = \emptyset$ ή το $A \cup B$ αν το $B \cap A \neq \emptyset$. Αυτό δείχνει ότι η απεικόνιση προβολής p είναι ανοικτή. Ανάλογα δείχνουμε ότι είναι κλειστή αν το A είναι κλειστό.

Ως παράδειγμα μιας τέτοιας κατάστασης, ας δούμε το πηλίκον

$$I' = [0, 1]/\{0, 1\}$$

όπου ταυτίζουμε τα δύο άκρα του διαστήματος $[0,1]$. Εάν με $p' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ συμβολίσουμε την προβολή του προηγουμένου παραδείγματος, με $p : [0,1] \to [0,1]/\{0,1\}$ την προβολή σε

$$\begin{tikzcd}
[0,1] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "p'oi"] & R \arrow[d, "p'"] \\
{[0,1]/\{0,1\}} \arrow[r, "i^*"] & R/Z
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 6.2.2: Μεταθετικό διάγραμμα

αυτό το πηλίκον και με $i : [0,1] \to \mathbb{R}$ την ταυτοτική ένριψη, τότε στο διάγραμμα ορίζεται ένας ομοιομορφισμός i^* (σχήμα 6.2.2), που δείχνει ότι το $[0,1]/\{0,1\}$ είναι ομοιόμορφο του κύκλου, καθώς η i^* αποδεικνύεται εύκολα συνεχής, κλειστή και $1-1$.

3. **Οι χώροι** $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Οι χώροι αυτοί αποτελούν γενίκευση του πρώτου παραδείγματος. Δύο διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ θεωρούνται ισοδύναμα αν διαφέρουν κατά διάνυσμα με ακέραιες συντεταγμένες

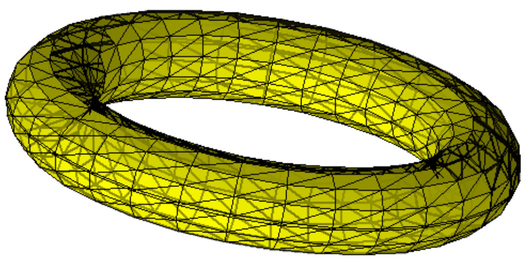
$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}^n.$$

Με τρόπο ανάλογο προς το πρώτο παράδειγμα μπορούμε να δείξουμε ότι ο χώρος πηλίκον είναι ομοιόμορφος με το καρτεσιανό γινόμενο $S^1 \times \cdots \times S^1$ (n φορές). Το σχήμα 6.2.3 δείχνει ένα

$$\begin{tikzcd}
Rx...xR \arrow[r, "i"] \arrow[d, "px...xp"'] \arrow[dr] & Rx...xR \arrow[d, "p'"] \\
(R/Z)x...x(R/Z) \arrow[r, "i^*"] & R^n/Z^n
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 6.2.3: Μεταθετικό διάγραμμα II

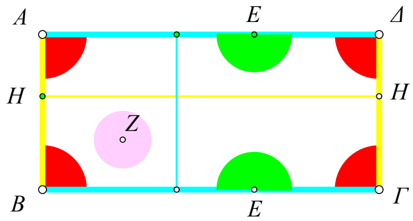
μεταθετικό διάγραμμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη αυτού του ομοιομορφισμού. Οι απεικονίσεις p, p' είναι οι αντίστοιχες προβολές σε χώρους πηλίκα. Η i είναι η ταυτοτική και ο i^* είναι ο ομοιομορφισμός που ορίζεται έτσι ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό. Το σχήμα



Σχήμα 6.2.4: Σπείρα

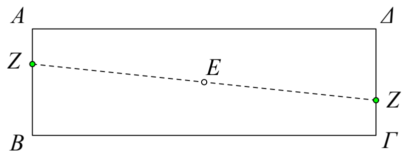
6.2.4 δείχνει την **σπείρα** μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ ομοιόμορφη του χώρου πηλίκου $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ που με τη σειρά του είναι ομοιόμορφος του $S^1 \times S^1$.

Ομοιόμορφος χώρος πηλίκον με τον προηγούμενο προκύπτει και από μια άλλη ταύτιση που απεικονίζεται στο σχήμα 6.2.5. Στα σημεία του (κλειστού) παραλληλογράμμου ορίζεται μία σχέση ισοδυναμίας ως εξής: (α) όλα τα εσωτερικά σημεία έχουν κλάσεις μονοσύνολα, δηλαδή είναι ισοδύναμα μόνο με τον εαυτό τους, (β) δύο απέναντι σημεία των πλευρών $AB, \Gamma\Delta$ είναι ισοδύναμα, (γ) δύο απέναντι σημεία των πλευρών $B\Gamma, \Delta A$ είναι ισοδύναμα, (δ) οι τέσσερις κορυφές είναι ισοδύναμες. Στο σχήμα φαίνονται οι αντίστροφες εικόνες $p^{-1}(U_y)$ περιοχών U_y ορισμένων σημείων $y = p(x) \in \mathcal{M}/\sim$.



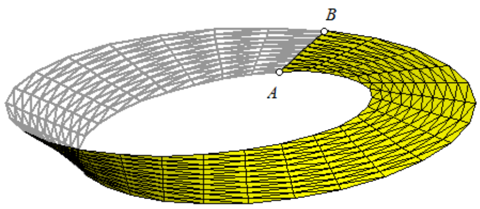
Σχήμα 6.2.5: Σπείρα ΙΙ

4. **Η ταινία του Moebius**. Πρόκειται εδώ για τον χώρο πηλίκον που προκύπτει από ένα παραλληλόγραμμο του $\mathbb{R}^2$ στο οποίο ταυτίζουμε δύο απέναντι πλευρές του με έναν ειδικό τρόπο. Ο τρόπος



Σχήμα 6.2.6: Ταινία του Moebius

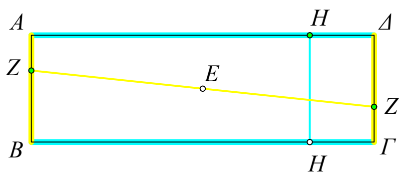
αυτός φαίνεται στο σχήμα 6.2.6. Επιλέγουμε δύο απέναντι πλευρές (εδώ τις $AB, \Gamma\Delta$ και ταυτίζουμε τα σημεία που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο συμμετρίας του παραλληλογράμμου. Ο χώρος πηλίκον που προκύπτει λέγεται ταινία του Moebius. Έχει την ιδιότητα της μη-προσανατολισμένης



Σχήμα 6.2.7: Ταινία του Moebius ΙΙ

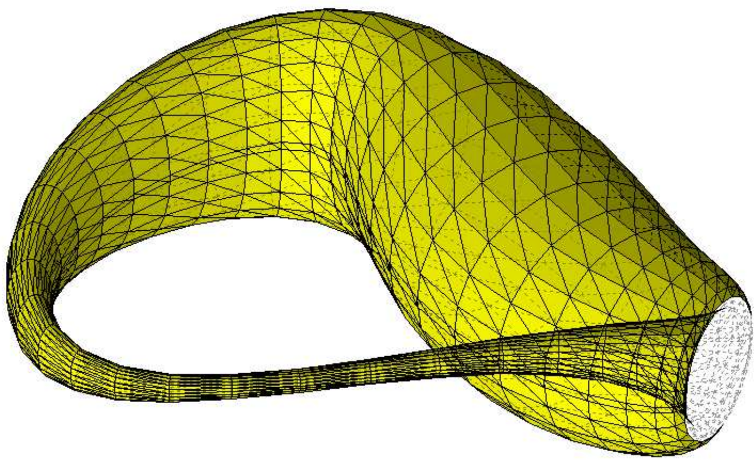
επιφάνειας ή και μονόπλευρης επιφάνειας. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 6.2.7, όπου είναι φανερό ότι αρχίζοντας τον χρωματισμό της ταινίας από μία πλευρά της επιφάνειας φτάνουμε με συνεχή τρόπο στον χρωματισμό και της άλλης πλευράς.

5. **Η μποτίλια του Klein**. Και εδώ πρόκειται για τον χώρο πηλίκον που προκύπτει από ένα παραλληλόγραμμο του $\mathbb{R}^2$ στο οποίο ταυτίζουμε τις απέναντι πλευρές του με τρόπο διαφορετικό από αυτόν που παράγει την σπείρα (παράδειγμα 3). Το σχήμα δείχνει τον τρόπο της ταύτισης των σημείων των



Σχήμα 6.2.8: Μποτίλια του Klein

πλευρών $AB, \Gamma\Delta$ και $B\Gamma, \Delta A$. Προκύπτει ένας τοπολογικός χώρος πηλίκον (επιφάνεια) που δεν μπορεί να απεικονισθεί στον $\mathbb{R}^3$ σαν λεία επιφάνεια, χωρίς αυτοτομές. Υπάρχει ωστόσο μια ένριψη αυτού του χώρου σε μια επιφάνεια με αυτοτομές που λέγεται **μποτίλια του Klein** και απεικονίζεται



Σχήμα 6.2.9: Μποτίλια του Klein II

στο σχήμα 6.2.9.

6. **Οι προβολικοί χώροι** $P\mathbb{R}^n$. Αυτοί οι τοπολογικοί χώροι προκύπτουν από το $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, ως χώροι πηλίκα για την σχέση ισοδυναμίας

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει } \; k \neq 0 : y = k\,x \quad \text{για} \quad x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}.$$

Ανάμεσα στις ιδιότητές τους είναι και η συμπάγεια, που αποδεικνύεται εύκολα από την συμπάγεια της μοναδιαίας σφαίρας $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Πράγματι, η απεικόνιση της προβολής

$$p : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P\mathbb{R}^n$$

είναι συνεχής και η σφαίρα είναι συμπαγής. Συνάγεται ότι και η εικόνα της $p(S^n) \subset P\mathbb{R}^n$ θα είναι συμπαγές σύνολο. Εύκολα όμως βλέπουμε ότι $p(S^n) = P\mathbb{R}^n$, απ' όπου και το συμπέρασμα.

Το $P\mathbb{R}^n$ μπορεί να ορισθεί και ως χώρος πηλίκον της σφαίρας S^n, ταυτίζοντας αντιποδικά σημεία, δηλαδή θεωρώντας δύο σημεία της σφαίρας ισοδύναμα όταν

$$S^n \ni x, y, \quad x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad y = -x.$$

Η ομοιομορφία f των δύο χώρων πηλίκων $X = (S^n/\sim)$ και $Y = ((\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim)$ αποδεικνύεται

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr] & R^{n+1}\text{-}\{0\} \arrow[d, "p'"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
S^n \arrow[d, "p"'] & R^{n+1}\text{-}\{0\} \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "p'"] \arrow[dl] \\
X & Y \arrow[l, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 6.2.10: Διαγράμματα για τον προβολικό χώρο

εύκολα χρησιμοποιώντας τα μεταθετικά διαγράμματα του προηγουμένου σχήματος 6.2.10, όπου Id είναι η ταυτοτική ένριψη της σφαίρας στον περιβάλλοντα χώρο και $g(x) = \frac{x}{||x||}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 6.2.1 *Έστω $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στον τοπολογικό χώρο $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$. Για κάθε υποσύνολο A του $\mathcal{M}$ όρισε το σύνολο*

$$C(A) = \{x \in \mathcal{M} : x \sim a, \text{ για κάποιο στοιχείο } a \in A\}.$$

Εαν $p : \mathcal{M} \to (\mathcal{M}/\sim)$ η προβολή στο πηλίκον, δείξε ότι το $p(A)$ είναι ανοικτό τότε και μόνον τότε, όταν το $C(A)$ είναι ανοικτό.

Άσκηση 6.2.2 *Έστω f μια συνεχής άπεικόνιση του χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ στον $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$. Δείξε ότι η σχέση $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, ορίζει σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{M}$. Δείξε επίσης ότι ορίζεται συνεχής απεικόνιση f' από το χώρο πηλίκον $(\mathcal{M}/\sim)$ στο $\mathcal{M}'$, έτσι ώστε $f = p \circ f'$, όπου $p : \mathcal{M} \to (\mathcal{M}/\sim)$ η προβολή στο χώρο πηλίκον.*

6.3 Ισοσυνεχείς οικογένειες συναρτήσεων

Ορισμός 6.3.1 *Μια οικογένεια $\mathcal{F}$ συναρτήσεων από τον μετρικό χώρο $(\mathcal{M}, d)$ στον $(\mathcal{M}', d')$, λέγεται* **ισοσυνεχής**, *όταν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε*

$$d(x, y) < \delta \quad \text{να συνεπάγεται} \quad d'(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Σχόλιο-1 Προφανώς κάθε μέλος $f \in \mathcal{F}$ μιας ισοσυνεχούς οικογένειας είναι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι μια ισοσυνεχής οικογένεια. Μια άλλη κατηγορία παραδειγμάτων προκύπτει από συναρτήσεις Lipschitz ως προς την ίδια σταθερά K, δηλαδή οικογένειες συναρτήσεων $\mathcal{F}$ για τις οποίες υπάρχει $K > 0$ έτσι ώστε, για κάθε μέλος $f \in \mathcal{F}$ να ισχύει

$$d'(f(x), f(y)) \leq K d(x, y), \quad \text{για κάθε } \ x, y \in \mathcal{M}.$$

Μια ειδική περίπτωση τέτοιας οικογένειας είναι λ.χ. μια οικογένεια $\mathcal{F}$ διαφορίσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, των οποίων η παράγωγος $f'(x)$ είναι φραγμένη $||f'(x)|| < K$ από μία, κοινή για όλες τις $f \in \mathcal{F}$, σταθερά K. Πράγματι, λόγω του θεωρήματος της μέσης τιμής ([Ack09, σ. 181]), θα ισχύει τότε ότι

$$||f(x) - f(y)|| \leq K \cdot ||x - y||.$$

Θεώρημα 6.3.1 *Εάν $\mathcal{F} \subset C(\mathcal{M})$ είναι ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων του μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, τότε και η $\overline{\mathcal{F}} \subset C(\mathcal{M})$ είναι ισοσυνεχής.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon' = 3\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η (1) για τις $f \in \mathcal{F}$. Αν $f \in \overline{\mathcal{F}}$, τότε θα υπάρχει $g \in \mathcal{F}$ με $||f - g|| < \varepsilon$. Τότε για κάθε $x, y \in \mathcal{M}$ με $d(x, y) < \delta$ θα ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(y)| < 3\varepsilon = \varepsilon'.$$

Καθώς αυτή ισχύει και για όλες τις $g \in \mathcal{F}$, ισχύει για κάθε $f \in \overline{\mathcal{F}}$, ο.ε.δ.

Μια από τις πιο χρήσιμες ιδιότητες των ισοσυνεχών συναρτήσεων είναι ότι χαρακτηρίζουν τα συμπαγή υποσύνολα του $C(\mathcal{M})$ ενός συμπαγούς μετρικού χώρου $\mathcal{M}$.

Θεώρημα 6.3.2 *(Θεώρημα των Arzela, Ascoli) Έστω $(\mathcal{M}, d)$ συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{F} \subset C(\mathcal{M})$, τότε το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές, αν και μόνον αν είναι φραγμένο, κλειστό και ισοσυνεχές.*

Απόδειξη: Εάν το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές, τότε είναι κλειστό και και ολικά φραγμένο, αφού το $C(\mathcal{M})$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (Θεώρημα 2.2.2). Δείχνουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής. Πράγματι, λόγω της συμπάγειάς της, για δοθέν $\varepsilon > 0$, θα υπάρχουν πεπερασμένα $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathcal{F}$ έτσι ώστε $\mathcal{F} \subset B_\varepsilon(f_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(f_n)$. Επειδή ο $\mathcal{M}$ είναι συμπαγής, κάθε μία από τις f_i είναι ομοιόμορφα συνεχής

(Θεώρημα 5.2.9), άρα για αυτό το ε θα υπάρχει αντίστοιχο δ_i έτσι ώστε $d(x,y) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι το $\delta = \min\{\delta_i\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (1) της ισοσυνέχειας για τις $f \in \mathcal{F}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η $\mathcal{F} \subset C(\mathcal{M})$ είναι μια φραγμένη, κλειστή και ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές του $C(\mathcal{M})$, αποδεικνύοντας ότι τότε είναι και ολικά φραγμένο (Θεώρημα 5.2.3). Πράγματι, κατά την υπόθεση, θα υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $|f(x)| < M$ για κάθε $x \in \mathcal{M}$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$. Για δοθέν $\varepsilon' = 4\varepsilon > 0$, λόγω της υπόθεσης της ισοσυνέχειας της $\mathcal{F}$, θα υπάρχει $\delta > 0$ που ικανοποιεί την (1). Επίσης, από την συμπάγεια του $\mathcal{M}$, έπεται ότι υπάρχουν πεπερασμένα $\{x_1, \ldots, x_m\}$ του $\mathcal{M}$ έτσι ώστε $\mathcal{M} = B_\delta(x_1) \cup \cdots \cup B_\delta(x_m)$. Από την άλλη μεριά, το $[-M, M]$ είναι συμπαγές, άρα υπάρχουν πεπερασμένα στοιχεία του $\{y_1, \ldots, y_n\}$, έτσι ώστε $[-M, M] \subset B_\varepsilon(y_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(y_n)$.

Για κάθε μία από τις n^m το πλήθος δυνατές απεικονίσεις

$$\alpha : \{x_1, \ldots, x_m\} \longrightarrow \{y_1, \ldots, y_n\} \tag{2}$$

ορίζεται ένα υποσύνολο $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}_\alpha = \{f \in \mathcal{F} : |f(x_i) - y_{\alpha(i)}| < \varepsilon\}. \tag{3}$$

Τα n^m σύνολα $\mathcal{F}_\alpha$ καλύπτουν το $\mathcal{F}$ και η διάμετρος του καθενός είναι μικρότερη του 4ε. Πράγματι, για $f, g \in \mathcal{F}_\alpha$ και $x \in \mathcal{M}$ θα ισχύει $x \in B_\delta(x_i)$ για κάποιο x_i και επομένως

$$\begin{aligned}|f(x) - g(x) \leq |f(x) - f(x_i)| &+ |f(x_i) - y_{\alpha(i)}| \\ &+ |y_{\alpha(i)} - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \leq 4 \cdot \varepsilon = \varepsilon'.\end{aligned}$$

Συνάγεται (Θεώρημα 5.2.1) ότι το $\mathcal{F}$ είναι ολικά φραγμένο, συνεπώς (Θεώρημα 5.2.3) συμπαγές του $C(\mathcal{M})$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 6.3.1 *Μία φραγμένη ακολουθία ισοσυνεχών συναρτήσεων $\{f_n\} \subset C(\mathcal{M})$ του συμπαγούς μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα στο $\overline{\mathcal{F}}$, όπου $\mathcal{F} = \{f_n\}$. Το $\overline{\mathcal{F}}$ είναι επίσης κλειστό, ισοσυνεχές (Θεώρημα 6.3.1) και φραγμένο. Πράγματι, έστω ότι $|f_i(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathcal{M}$ και κάθε i. Τότε, αν $g \in \overline{\mathcal{F}}$ και $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει $f_i \in \mathcal{F}$ με $||g - f_i|| < \varepsilon$. Τότε

$$||g|| \leq ||f_i|| + ||g - f_i|| < M + \varepsilon,$$

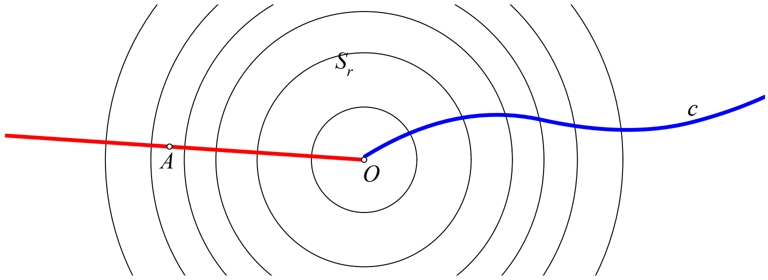
και επειδή αυτό ισχύει για κάθε ε, θα πρέπει $||g|| \leq M$, ο.ε.δ.

6.4 Απειρογινόμενα

Με τον όρο απειρογινόμενα εννοούμε καρτεσιανά γινόμενα με άπειρο πλήθος παραγόντων. Στα συνήθη (πεπερασμένα) καρτεσιανά γινόμενα $\mathcal{M}$= $\mathcal{M}_1 \times ... \times \mathcal{M}_n$, τα στοιχεία x του $\mathcal{M}$ είναι διατεταγμένες $n-$άδες $\{x_1, \ldots, x_n\}$ που φτιάχνουμε επιλέγοντας ένα στοιχείο από κάθε $\mathcal{M}_i$. Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε το απειρογινόμενο με ένα αριθμήσιμο πλήθος παραγόντων $\{\mathcal{M}_i, i \in \mathbb{N}\}$, ως το σύνολο των ακολουθιών $\{x_n\}$, όπου $x_i \in \mathcal{M}_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Είναι φανερό ότι ο περιορισμός στο $\mathbb{N}$ είναι τεχνητός και ότι το $\mathbb{N}$ θα μπορούσε να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε απειροσύνολο, το οποίο να χρησιμεύει για την δεικτοδότηση των χώρων. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε τους κύκλους S_r του επιπέδου, με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα r και να ορίσουμε το απειρογινόμενο της **οικογένειας** αυτών των κύκλων

$$\Sigma = \prod_{r>0} S_r,$$

το οποίο να αποτελείται από όλες τις οικογένειες στοιχείων $\{x_r : x_r \in S_r \ \forall r > 0\}$. Κάθε καμπύλη c που ξεκινάει από το $O = (0,0)$ και πάει στο άπειρο συναντώντας κάθε S_r μία ακριβώς φορά θα όριζε τότε



Σχήμα 6.4.1: Στοιχεία ενός απειρογινομένου

ένα στοιχείο του Σ, όπως λ.χ. και μια ημιευθεία που ξεκινά από το O. Το Σ, ωστόσο, περιέχει πολύ περισσότερα στοιχεία, εκτός αυτών των καμπυλών.

Φτάνουμε λοιπόν στον γενικό ορισμό, όπου τα δεδομένα είναι μια οικογένεια $\{\mathcal{M}_i, i \in I\}$, μη-κενών συνόλων, που δεικτοδοτείται από ένα οποιοδήποτε σύνολο I. Το **καρτεσιανό γινόμενο** αυτών των συνόλων συμβολίζουμε με

$$\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$$

και αποτελείται από όλες τις οικογένειες $\{x_i : x_i \in \mathcal{M}_i \ \forall i \in I\}$.

Ο ορισμός είναι γενικός και συμπεριλαμβάνει πολλά πράγματα. Για παράδειγμα, μία συνάρτηση $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ είναι στοιχείο του απειρογινομένου που συμβολίζουμε με

$$\mathcal{M}'^{\mathcal{M}} = \prod_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{M}'_x$$

και αποτελείται από αντίγραφα του $\mathcal{M}'$, ένα για κάθε $x \in \mathcal{M}$. Μια συνάρτηση f, όπως η παραπάνω, ορίζει ένα στοιχείο αυτού του καρτεσιανού γινομένου, αφού για κάθε $x \in \mathcal{M}$ μπορούμε να θεωρήσουμε το $f(x) \in \mathcal{M}'_x = \mathcal{M}'$. Προφανώς το $\mathcal{M}'^{\mathcal{M}}$ αποτελείται ακριβώς από όλες αυτές τις συναρτήσεις.

Εάν για τυχόν σύνολο X, θεωρήσουμε όλες τις απεικονίσεις του στο δισύνολο $\Delta = \{0, 1\}$, τότε το αντίστοιχο απειρογινόμενο Δ^X ταυτίζεται με το σύνολο των υποσυνόλων του, αφού κάθε τέτοια απεικόνιση f ορίζει ένα υποσύνολο $A \subset X$ όπου $f\big|_A = 1$ και τούμπαλιν.

Αν τα $\mathcal{M}_i$ έχουν τοπολογική δομή, τότε μπορούμε να ορίσουμε και στο απειρογινόμενό τους τοπολογική δομή με τον ίδιο τρόπο που την ορίσαμε για πεπερασμένα γινόμενα (Ορισμός 1.1.8).

Ορισμός 6.4.1 *Έστω οικογένεια τοπολογικών χώρων $\mathcal{M}_i$, για $i \in I$. Η* **τοπολογία γινόμενο** *του $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$ ορίζεται ως η τοπολογία η παραγόμενη από τις* **φέτες** *$\langle A_i \rangle = p_i^{-1}(A_i)$, όπου A_i ανοικτό του $\mathcal{M}_i$ και $p_i(\{x_k\}) = x_i$ η προβολή του $\mathcal{M}$ στο $\mathcal{M}_i$.*

Σχόλιο-1 Από τον ορισμό της παραγόμενης τοπολογίας προκύπτει ότι μια βάση της τοπολογίας του απειρογινομένου θα αποτελείται ακριβώς από τις πεπερασμένες τομές φετών

$$\langle A_{i_1} \dots A_{i_n} \rangle = p_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap p_{i_n}^{-1}(A_{i_n}), \qquad (1)$$
$$\text{όπου} \quad i_k \in I, \ A_{i_k} \subset \mathcal{M}_{i_k} \ \text{ανοικτό.}$$

Σχόλιο-2 Από το προηγούμενο σχόλιο συνάγεται, ότι στην περίπτωση απειρογινομένου, και κατ' αντίθεση με τα πεπερασμένα γινόμενα, αν διαλέξουμε ένα μη-κενό ανοικτό $A_i \neq \mathcal{M}_i$ από κάθε $\mathcal{M}_i$, το γινόμενο $A = \prod_{i \in I} A_i$ δεν είναι **ποτέ** ανοικτό του απειρογινομένου. Αν ήταν, θα έπρεπε να υπάρχει βασικό σύνολο της μορφής (1) περιεχόμενο στο A, κάτι που είναι αδύνατον αν $A_i \neq \mathcal{M}_i$ για άπειρα $i \in I$. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει για τα κλειστά.

Σχόλιο-3 Από τον ορισμό συνάγεται ότι κάθε προβολή $p_i : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε ανοικτό $A_i \subset \mathcal{M}_i$ το $\langle A_i \rangle = p_i^{-1}(A_i)$ είναι ανοικτό του γινομένου.

Σχόλιο-4 Από τον ορισμό συνάγεται επίσης ότι κάθε προβολή $p_i : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_i$ είναι ανοικτή, αφού κάθε ανοικτό της βάσης της μορφής $\langle A_{i_1} \dots A_{i_n} \rangle$ θα προβάλλεται στο $\mathcal{M}_i$ μέσω της p_i ή στο ίδιο το $\mathcal{M}_i$, αν το i δεν είναι μεταξύ των $\{i_1, \dots, i_n\}$ ή σε κάποιο ανοικτό A_i αν το i είναι ένα από αυτά τα i_k.

Θεώρημα 6.4.1 *Για κάθε οικογένεια υποσυνόλων $B_i \subset \mathcal{M}_i$ ισχύει ως προς την τοπολογία γινόμενο*

$$\overline{\prod_{i \in I} B_i} = \prod_{i \in I} \overline{B_i}.$$

Απόδειξη: Έστω $x = \{x_i\} \in \overline{\prod_{i \in I} B_i} = B$. Τότε κάθε περιοχή $\langle A_i \rangle = p_i^{-1}(A_i)$ του x με $p_i(x) = x_i \in A_i$ θα τέμνει το B, άρα και το A_i θα τέμνει το B_i. Αυτό δείχνει ότι το $x_i \in \overline{B_i}$.

Αντίστροφα, αν για κάθε i το $x_i \in \overline{B_i}$, τότε το $x = \{x_i\} \in \overline{\prod_{i \in I} B_i} = B$, διότι κάθε περιοχή $\langle A_{i_1} \dots A_{i_n} \rangle$ που περιέχει το x θα τέμνει το B, ο.ε.δ.

Θεώρημα 6.4.2 *Για κάθε σημείο $x = \{x_i\}$ του απειρογινομένου $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$ το σύνολο D_x των σημείων y του $\mathcal{M}$, των οποίων οι συνιστώσες τους y_i διαφέρουν μόνο για πεπερασμένα $i \in I$ από τις αντίστοιχες του x είναι πυκνό στο $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Το τυχόν στοιχείο $\langle A_{i_1} \dots A_{i_n} \rangle$ της βάσης του $\mathcal{M}$ περιέχει $y \in \mathcal{M}$, που διαφέρουν το πολύ κατά τις συνιστώσες με δείκτες από το $\{i_1, ..., i_n\}$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 6.4.3 *Μια απεικόνιση f του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ σε ένα απειρογινόμενο $\mathcal{M}' = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο, είναι συνεχής, αν και μόνον αν, κάθε σύνθεση $p_i \circ f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_i$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Αν η f είναι συνεχής, τότε και η $p_i \circ f$ ως σύνθεση συνεχών, θα είναι συνεχής απεικόνιση.

Για το αντίστροφο, αν υποθέσουμε ότι η σύνθεση $p_i \circ f$ είναι συνεχής για κάθε i και $\langle A_{i_1} \dots A_{i_n} \rangle$ βασικό σύνολο του γινομένου, τότε το

$$(f)^{-1}(\langle A_{i_1} \dots A_{i_n} \rangle) = (f^{-1}(\cap_k p_{i_k}^{-1}(A_{i_k})) =$$
$$\cap_k f^{-1}(p_{i_k}^{-1}(A_{i_k})) = \cap_k (p_{i_k} \circ f)^{-1}(A_{i_k}),$$

είναι ανοικτό, ως τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών, ο.ε.δ.

Θεώρημα 6.4.4 *Το απειρογινόμενο $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$ τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}_i, \mathcal{T}_i)$ είναι συνεκτικό ως προς την τοπολογία γινόμενο, τότε και μόνον τότε, όταν κάθε $\mathcal{M}_i$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη: Αν το $\mathcal{M}$ είναι συνεκτικό, τότε επειδή κάθε προβολή p_i είναι συνεχής επίρηψη επί του $\mathcal{M}_i$, και αυτό θα είναι συνεκτικό.

Για το αντίστροφο η μέθοδος απόδειξης είναι, στην ουσία αυτή της περίπτωσης για πεπερασμένα γινόμενα, του θεωρήματος 4.1.9. Η υπόθεση εδώ είναι ότι κάθε $\mathcal{M}_i$ ένιναι συνεκτικό.

Σε ένα πρώτο βήμα δείχνουμε, ότι αν τα σημεία $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ του $\mathcal{M}$ διαφέρουν μόνο σε πεπερασμένες συνιστώσες, ως προς τους δείκτες $\{i_1, \dots, i_k\}$, τότε περιέχονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $\mathcal{M}$. Πράγματι, τότε τα δύο σημεία θα περιέχονται στο $M(i_1, ..., i_k) \subset \mathcal{M}$, που αποτελείται από όλα τα $\{x_n\}$, τα οποία έχουν σταθερές όλες τις άλλες πλην των $i_1, ..., i_k$ συντεταγμένων. Όμως το σύνολο $M(i_1, ..., i_k)$ είναι ομοιόμορφο του καρτεσιανού γινομένου πεπερασμένου πλήθους παραγόντων $M_{i_1} \times \dots \times M_{i_k}$, που κατά το θεώρημα 4.1.9 είναι συνεκτικό.

Στο δεύτερο βήμα διαλέγουμε ένα σταθερό σημείο $a = \{a_n\}$ του γινομένου και θεωρούμε το σύνολο D_a όλων των άλλων σημείων $x = \{x_n\}$, που διαφέρουν από το a, το πολύ, σε πεπερασμένο πλήθος συντεταγμένων. Κατά το προηγούμενο βήμα το D_a είναι συνεκτικό (θεώρημα 4.1.7), αφού κάθε στοιχείο του x και το a περιέχονται σε συνεκτικό σύνολο, περιεχόμενο με την σειρά του στο D_a. Κατά το θεώρημα 6.4.2, το D_a είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{M}$, άρα το $\mathcal{M} = \overline{D_n}$ θα είναι επίσης συνεκτικό (θεώρημα 4.1.4), ο.ε.δ.

Θεώρημα 6.4.5 *Το απειρογινόμενο $D = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ ενός αριθμήσιμου πλήθους παραγόντων, καθένας από τους οποίους ταυτίζεται με το $\Delta = \{0, 2\}$ με την διακριτή τοπολογία, είναι ομοιόμορφο του συνόλου Cantor $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη: ([Dug66, σ. 104]) Εννοείται εδώ ότι το D έχει την τοπολογία γινόμενο. Θα δείξουμε ότι η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση που ορίσθηκε στο θεώρημα 1.1.10 και αντιστοιχίζει στην ακολουθία $x = \{x_n\} \in D$ το στοιχείο

$$f(x) = x_1\frac{1}{3} + x_2\frac{1}{3^2} + ... + x_n\frac{1}{3^n} + ... \in \mathcal{C}$$

είναι ομοιομορφισμός. Για την συνέχεια της f θα δείξουμε ότι, για $\varepsilon > 0$, υπάρχει περιοχή $U_x \subset D$, έτσι ώστε

$$y \in U_x \quad \Rightarrow \quad f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon).$$

Πράγματι αν διαλέξουμε αρκετά μεγάλο N, έτσι ώστε το $''$υπόλοιπο$''$ της συγκλίνουσας σειράς

$$\sum_{i=N}^{\infty} 2\frac{1}{3^i} < \varepsilon,$$

και $y \in D$ ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής $U_x = \langle x_1 ... x_N \rangle$ του x, τότε βλέπουμε αμέσως ότι

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{i=N}^{\infty} 2\frac{1}{3^i} < \varepsilon.$$

Εδώ ας σημειώσουμε ότι το Δ θεωρείται με την διακριτή τοπολογία, στην οποία τα μονοσύνολα είναι ανοικτά. Έτσι, αντί να γράφουμε για τα ανοικτά του απειρογινομένου $\langle \{x_1\} \ldots \{x_n\} \rangle$ παραλείπουμε τις αγκύλες και γράφουμε $\langle x_1 ... x_n \rangle$.

Για το ότι η f είναι ανοικτή, δείχνουμε ότι κάθε περιοχή της μορφής $\langle x_{i_1} ... x_{i_n} \rangle$ έχει εικόνα $f(\langle x_{i_1} ... x_{i_n} \rangle)$ ανοικτό σύνολο του $\mathcal{C}$. Πράγματι, αν πάρουμε σαν $N = \max_k(i_k)$ και $\varepsilon = \frac{1}{3^{N+1}}$, τότε για κάθε $x \in f(\langle x_{i_1} ... x_{i_n} \rangle)$ και την μπάλα $B = B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}$ και κάθε $y \in \mathcal{C} \cap B$ θα ισχύει ότι τα x, y διαφέρουν σε συνιστώσες με δείκτη μεγαλύτερο του N, άρα $y \in f(\langle x_{i_1} ... x_{i_n} \rangle)$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 6.4.6 *Έστω $\{(\mathcal{M}_i, d_i), i \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία μετρικών χώρων των οποίων η διάμετρος σχηματίζει μια μηδενική ακολουθία: $\delta_i = \delta(\mathcal{M}_i) \to 0$. Τότε η*

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_k \{d_k(x_k, y_k)\}, \quad \textit{για} \;\; \{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{M} = \prod_i \mathcal{M}_i,$$

ορίζει μία μετρική στο απειρογινόμενο $\mathcal{M} = \prod_i \mathcal{M}_i$, της οποίας η τοπολογία συμπίπτει με την τοπολογία γινόμενο των μετρικών χώρων.

Απόδειξη: ([Dug66, σ. 190]) Το ότι η d που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής είναι τετριμμένο. Δείχνουμε στη συνέχεια ότι η τοπολογία $\mathcal{T}_d$ αυτής της μετρικής και η τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}$ συμπίπτουν.

Η σχέση για τις κανονικές προβολές $p_k(\{x_n\}) = x_k$:

$$d_k(p_k(\{x_n\}), p_k(\{y_n\})) = d_k(x_k, y_k) \leq d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_k \{d_k(x_k, y_k)\},$$

συνεπάγεται ότι αυτές είναι συνεχείς συναρτήσεις, άρα η τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}$, που παράγεται από τα $\langle A_k \rangle = p_k^{-1}(A_k), A_k \in \mathcal{T}_k$, περιέχεται στην τοπολογία $\mathcal{T}_d$ της μετρικής d.

Δείχνουμε ότι και $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι για μια $d-$μπάλα $B_\varepsilon(x)$ ενός $x = \{x_n\} \in \mathcal{M}$ υπάρχει ανοικτό $A = \langle A_{i_1} \ldots A_{i_n} \rangle$ της βάσης της $\mathcal{T}$ με $x \in A \subset B_\varepsilon(x)$. Πράγματι, από το ότι η ακολουθία των δ_n είναι μηδενική, συνάγεται ότι υπάρχει N, έτσι ώστε $n > N \Rightarrow \delta_n < \varepsilon$. Προκύπτει τότε ότι για τις d_i-μπάλες $B_\varepsilon^i(x_i) \subset \mathcal{M}_i$ ισχύει

$$\langle B_\varepsilon^1(x_1) \ldots B_\varepsilon^N(x_N) \rangle \subset B_\varepsilon(x), \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

Πόρισμα 6.4.1 *Το απειρογινόμενο $\mathcal{M} = \prod_i \mathcal{M}_i$ των $\{(\mathcal{M}_i, d_i), i \in \mathbb{N}\}$ είναι μετρικοποιήσιμο.*

Απόδειξη: Πρέπει να δείξουμε ότι ορίζεται μια μετρική d στο $\mathcal{M}$, έτσι ώστε η τοπολογία της να συμπίπτει με την τοπολογία γινόμενο. Προς τούτο τροποποιούμε τις μετρικές των $\mathcal{M}_i$, έτσι ώστε οι νέες μετρικές να ορίζουν την ίδια τοπολογία αλλά να ικανοποιούν και την $\delta_i \to 0$ του προηγουμένου θεωρήματος. Πράγματι, μια γενική μη-φραγμένη μετρική d_i μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με τη φραγμένη $d'_i(x,y) = \frac{d_i(x,y)}{1+d_i(x,y)}$, που, κατά το παράδειγμα-2 §2.1, θα ορίζει τα ίδια ανοικτά με την αρχική μετρική. Αυτήν επίσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε με ένα πολλαπλάσιό της, όπως το $d''_i(x,y) = \frac{1}{n}d'_i(x,y)$, που επίσης ορίζει την ίδια τοπολογία με την προηγούμενη. Το πόρισμα προκύπτει πλέον εφαρμόζοντας το θεώρημα για τις νέες αυτές μετρικές των $\mathcal{M}_i$, ο.ε.δ.

Ορισμός 6.4.2 *Ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}$ ορίζεται ως το υποσύνολο των ακολουθιών $\{x_n\} \in \ell^2$ για τις οποίες ισχύει $|x_n| \le \frac{1}{n}$, εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία από το ℓ^2.*

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ο κύβος του Hilbert είναι ομοιόμορφος με το απειρογινόμενο

$$I^\infty = \prod_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \text{όπου για κάθε } k \text{ το } \; I_k = I = [-1,1].$$

Θεώρημα 6.4.7 *Ο κύβος του Hilbert είναι ομοιόμορφος με το I^∞ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο.*

Απόδειξη: Δείχνουμε ότι η απεικόνιση

$$f : \mathcal{H} \longrightarrow I^\infty, \quad \text{με} \quad f(\{x_n\}) = \{n\, x_n\},$$

είναι ομοιομορφισμός. Το ότι είναι $1-1$ και επί είναι προφανές. Επίσης η συνέχεια της f έπεται από την συνέχεια των $p_i \circ f$ (θεώρημα 6.4.3), όπου $p_i : \mathcal{H} \to, p_i(\{x_n\}) = x_i$ η κανονική προβολή. Η συνέχεια των $p_i \circ f$ προκύπτει από την

$$|p_k(\{x_n\}) - p_k(\{y_n\})| = k\,|x_k - y_k| \le k\,||\{x_n\} - \{y_n\}||_2.$$

Η συνέχεια της αντίστροφης $g = f^{-1}, g(\{x_n\}) = \{\frac{x_n}{n}\}$ προκύπτει θεωρώντας ότι η τοπολογία του I^∞ ορίζεται από την μετρική $d = \sup_k\{d_k(x_k,y_k)\}$ του προηγουμένου θεωρήματος, που προκύπτει από τις μετρικές στα $I_k = I = [-1,1]$

$$d_k(x_k,y_k) = \frac{|x_k - y_k|}{n^{\frac{1}{4}}}.$$

Πράγματι, αν $\delta = \sup_k\{d_k(x_k,y_k)\}$ισχύει

$$\|g(\{x_n\}) - g(\{y_n\})\|_2 = \left\|\left\{\frac{x_n}{n}\right\} - \left\{\frac{y_n}{n}\right\}\right\|_2 =$$

$$\sqrt{\sum_n \left(\frac{|x_n - y_n|^2}{n^2}\right)} = \sqrt{\sum_n \left(\frac{|x_n - y_n|}{n^{\frac{1}{4}}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} \le$$

$$\sqrt{\sum_n \delta^2 \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \delta\sqrt{\sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} \Rightarrow$$

$$\|g(\{x_n\}) - g(\{y_n\})\|_2 \le d(\{x_n\},(\{y_n\})\sqrt{K},$$

όπου K το όριο της σειράς $\sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, που συγκλίνει ([Σπί04, σελ.398]), ο.ε.δ.

Σχόλιο-5 Μία από τις θεμελιώδεις ιδιότητες του απειρογινομένου είναι αυτή της συμπάγειας και της σχέσης της με τις τοπολογίες των παραγόντων. Το αντίστοιχο θεώρημα (του Tychonoff, [Μήτ06, σελ.41], [Loo53, σ. 11], [Dug66, σ. 224]) αποδεικνύεται ισοδύναμο με το αξίωμα επιλογής, που ανήκει στις θεμελιώδεις μαθηματικές αρχές.

Θεώρημα 6.4.8 *Το απειρογινόμενο $\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i$ τοπολογικών χώρων $(\mathcal{M}_i, \mathcal{T}_i)$ είναι συμπαγές ως προς την τοπολογία γινόμενο, τότε και μόνον τότε, όταν κάθε $\mathcal{M}_i$ είναι συμπαγής χώρος.*

Σχόλιο-6 Βάσει αυτού του θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}$ είναι συμπαγής, αφού είναι ομοιόμορφος προς απειρογινόμενο διαστημάτων, καθένα από τα οποία είναι συμπαγές. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η συμπάγεια μπορεί να αποδειχθεί πιό άμεσα με ένα διαγώνιο επιχείρημα επιλογής υπακολουθίας, που περιγράφεται στο [Ste70, σ. 65]. Τέλος, η συμπάγεια μπορεί να αποδειχθεί και από το ότι ο $\mathcal{H}$ είναι κλειστό και ολικά φραγμένο υποσύνολο του πλήρους μετρικού χώρου ℓ^2.

Θεώρημα 6.4.9 *Ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}$ είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ^2.*

Απόδειξη: Ένα σημείο του συμπληρώματος $x = \{x_i\} \in \mathcal{H}^c$, θα έχει ένα τουλάχιστον $x_n \notin [0, \frac{1}{n}]$. Τότε θα υπάρχει διάστημα $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$, που δεν τέμνει το $[0, \frac{1}{n}]$. Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $y = \{y_i\}$ από την μπάλα $B_\varepsilon(x)$, θα έχουμε επίσης $y_n \notin [0, \frac{1}{n}]$, άρα $y \in \mathcal{H}^c$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 6.4.10 *Ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}$ είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του ℓ^2.*

Απόδειξη: ([KF70, σ. 99]) Για δοθέν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε πεπερασμένο πλήθος από μπάλες $\{B_\varepsilon(z_i)\}$ που καλύπτουν το $\mathcal{H}$. Προς τούτο διαλέγουμε πρώτα ένα $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Επίσης για κάθε σημείο $x = \{x_i\} \in \mathcal{H}$ ορίζουμε την προβολή του $x' = p_n(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \in \mathcal{H}$, με όλες τις συντεταγμένες $x_k = 0$ για $k > n$. Ισχύει

$$d(x, x') = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Το σύνολο $\mathcal{H}' = p_n(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ είναι ολικά φραγμένο, ως ισομετρικό με ολικά φραγμένο του $\mathbb{R}^n$. Λόγω των (1) και (2), αν το $\mathcal{H}'$ καλύπτεται από πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i), i = 1, \dots, m\}$, τότε το $\mathcal{H}$ θα καλύπτεται από τις $\{B_\varepsilon(z_i)\}$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 6.4.11 *Ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H} \subset \ell^2$ έχει κενό εσωτερικό $\mathcal{H}^o = \emptyset$, συνεπώς το συμπλήρωμά του είναι πυκνό στο ℓ^2.*

Απόδειξη: Έστω $x = \{x_i\}$ τυχόν στοιχείο του $\mathcal{H}$. Όλα τα σημεία $\{y_n = (x_1, \dots, x_n + \varepsilon, \dots)\}$ περιέχονται στην μπάλα $B_{2\varepsilon}(x)$. Αυτή όμως δεν μπορεί να περιέχεται στο $\mathcal{H}$, αφού, αν περιεχόταν, τότε θα έπρεπε $|x_n + \varepsilon| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, που είναι αδύνατον για $\varepsilon > 0$, ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 6.4.1 *Έστω p_i η προβολή του απειρογινομένου $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$ στο $(\mathcal{M}_i, \mathcal{T}_i)$. Δείξε ότι η τοπολογία $\mathcal{T}_i$ συμπίπτει με την τοπολογία ταύτισης $\mathcal{T}_{p_i}$ της p_i.*

Άσκηση 6.4.2 *Έστω p_i η προβολή του απειρογινομένου $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$ στο $(\mathcal{M}_i, \mathcal{T}_i)$. Δείξε ότι για κάθε ανοικτό A του $\mathcal{M}$, το $p_i(A) = \mathcal{M}_i$ γιά όλα τα i εκτός πεπερασμένων τινών.*

Άσκηση 6.4.3 *Έστω για κάθε $i \in I$ το υποσύνολο $A_i \subset \mathcal{M}_i$ του τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$. Δείξε ότι το απειρογινόμενο $A = \prod_{i \in I} A_i$ ως προς την σχετική τοπολογία των A_i έχει την ίδια τοπολογία με την σχετική ως υποσύνολο του $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$.*

Άσκηση 6.4.4 *Έστω ότι για κάθε $i \in I$ ορίζεται απεικόνιση $f_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{N}_i$ από τον τοπολογικό χώρο $(\mathcal{M}_i, \mathcal{T}_i)$ στον $(\mathcal{N}_i, \mathcal{S}_i)$. Ορίζεται τότε και απεικόνιση*

$$f = \prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{N}_i, \quad \text{με} \quad f(\{x_i\}) = \{f_i(x_i)\}.$$

Δείξε ότι αν κάθε f_i είναι συνεχής, τότε και η f είναι συνεχής. Δείξε επίσης ότι αν κάθε f_i είναι ανοικτή επίρριψη, τότε και η f είναι ανοικτή επίρριψη. Συμπέρανε ότι αν κάθε f_i είναι ομοιομορφισμός, τότε και η f είναι ομοιομορφισμός.

Άσκηση 6.4.5 *Έστω το απειρογινόμενο* $D = \prod_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ *ενός αριθμήσιμου πλήθους παραγόντων, καθένας από τους οποίους ταυτίζεται με το* $\Delta = \{0, 2\}$ *εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία. Δείξε ότι το* D *είναι ομοιόμορφο με το* $D \times D$*. Συμπέρανε ότι και το σύνολο του Cantor* $\mathcal{C}$ *είναι ομοιόμορφο με το* $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$*.*

Άσκηση 6.4.6 *Με τους συμβολισμούς της προηγούμενης άσκησης, όρισε την απεικόνιση* $f : D \longrightarrow [0, 1]$ *με* $f(\{x_i\}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{x_i}{2^i}$*. Δείξε ότι η* f *είναι μια συνεχής επίρριψη (Υπόδειξη: παρόμοια με το θεώρημα 6.4.5.) Συμπέρανε ότι υπάρχει συνεχής επίρριψη* $f' : \mathcal{C} \to [0, 1]$*, του συνόλου του Cantor* $\mathcal{C}$ *στο* $[0, 1]$*.*

Άσκηση 6.4.7 *Χρησιμοποιώντας τις δύο προηγούμενες ασκήσεις, κατασκεύασε μια συνεχή επίρριψη* $f : \mathcal{C} \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$*. Χρησιμοποιώντας κατόπιν την άσκηση 1.2.13, δείξε ότι υπάρχει συνεχής (καμπύλη)* $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$*. Τέτοιες καμπύλες, που η εικόνα τους γεμίζει το τετράγωνο* $[0, 1] \times [0, 1]$*, λέγονται καμπύλες του Peano. Παρόμοια κατασκευάζονται συνεχείς καμπύλες* $\mathcal{C} \to [0, 1]^n$ *[Dug66, σ. 105], [Sag91].*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Μερικά αξιοσημείωτα θεωρήματα

7.1 Το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας

Το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας διατείνεται την ύπαρξη μιας **ρίζας** για κάθε μιγαδικό πολυώνυμο

$$f(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0, \quad \text{με} \;\; a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

δηλαδή ενός μιγαδικού z_0 για τον οποίο $f(z_0) = 0$. Συνέπεια αυτού, είναι ότι το πρωτοβάθμιο πολυώνυμο $z - z_0$ διαιρεί το $f(z)$, το οποίο τότε γράφεται

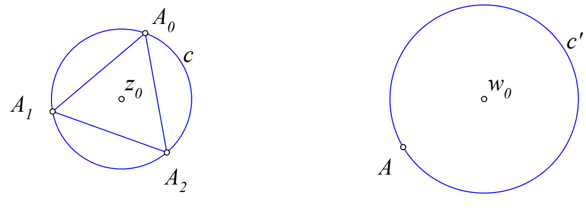
$$f(z) = (z - z_0)\, g(z), \tag{2}$$

όπου $g(z)$ ένα πολυώνυμο $n-1$ βαθμού. Εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα, αυτή τη φορά στο $g(z)$ βρίσκουμε μια ρίζα αυτού z_1, η οποία, λόγω της (2) είναι και ρίζα του $f(z)$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην παραγοντοποίηση του πολυωνύμου σε γραμμικούς παράγοντες

$$f(z) = a_n\,(z - z_0)\,(z - z_1)\ldots(z - z_{n-1}), \tag{3}$$

όπου τα $\{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$ είναι οι n ρίζες του πολυωνύμου, μερικές από τις οποίες μπορεί να ταυτίζονται. Αυτό, από την σκοπιά της άλγεβρας, δείχνει, όπως λέγεται, ότι το *σώμα των μιγαδικών αριθμών είναι αλγεβρικά κλειστό*.

Στην απόδειξη που θα δώσουμε θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση του $\mathbb{C}$ στον εαυτό του που ορίζει ένα πολυώνυμο $f(z)$ που συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Η τοπολογική δομή του $\mathbb{C}$ είναι η συνήθης, που προκύπτει από την ταύτισή του με το $\mathbb{R}^2$. Χρησιμοποιούμε επίσης το γεγονός, ότι για



Σχήμα 7.1.1: Συμπεριφορά της $w = w_0 + k\,(z - z_0)^3$

σταθερούς μιγαδικούς αριθμούς z_0, w_0, k, με $k \neq 0$, η απλούστατη μιγαδική απεικόνιση

$$w = w_0 + k\,(z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

απεικονίζει το σύνολο των κύκλων c με κέντρο το z_0 στο σύνολο των κύκλων c' με κέντρο το w_0. Κάθε σημείο w σε ένα τέτοιο κύκλο c' είναι εικόνα n ακριβώς σημείων του κύκλου c που αποτελούν τις κορυφές ενός κανονικού $n-$γώνου, εγγεγραμμένου στον κύκλο. Το σχήμα 7.1.1 δείχνει την εικόνα A των τριών κορυφών ενός ισοπλεύρου τριγώνου στην περίπτωση μιας τέτοιας απεικόνισης για $n = 3$. Η απόδειξη στηρίζεται σε δύο λήμματα.

Λήμμα 7.1.1 *Για κάθε μιγαδικό πολυώνυμο $f(z)$ υπάρχει σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$, στο οποίο η συνάρτηση $|f(z)|$ παίρνει ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη: Πράγματι, αν $z_1 \in \mathbb{C}$ είναι τυχόν σημείο και $K = |f(z_1)|$, τότε θεώρησε μια μεγάλη συμπαγή μπάλα $B = \overline{B_r(0)}$ που περιέχει το z_1, στην οποία η $h(z) = |f(z)|$, λόγω συνέχειας παίρνει ελάχιστη τιμή m σ' ένα σημείο z_0. Επειδή το όριο

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty,$$

η μπάλα μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε εκτός αυτής η συνάρτηση να έχει $|f(z)| > K$, οπότε το ελάχιστο m εντός της B, θα είναι και ελάχιστο συνολικά, ο.ε.δ.

Λήμμα 7.1.2 *Για κάθε πολυώνυμο $f(z)$ η ελάχιστη τιμή της $|f(z)|$ για $z \in \mathbb{C}$ είναι το 0.*

Απόδειξη: ([Tri12]) Δείχνουμε ότι αν η ελάχιστη τιμή m, που κατά το προηγούμενο λήμμα λαμβάνεται σε κάποιο σημείο z_0 του $\mathbb{C}$, είναι $m > 0$, τότε προκύπτει άτοπο.

Πράγματι, τότε η f, διαιρώντας με το $(z - z_0)$ θα γράφεται

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^k\, g(z), \tag{4}$$

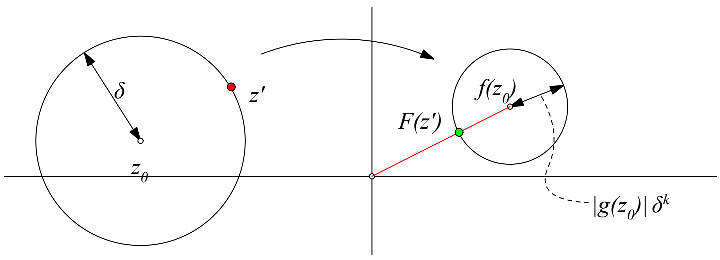
όπου το $g(z)$ είναι μικρότερου βαθμού από αυτόν του f και $g(z_0) \neq 0$. Ορίζουμε τότε την συνάρτηση

$$F(z) = f(z_0) + g(z_0)\,(z - z_0)^k, \tag{5}$$

και βρίσκουμε $1 > \delta > 0$ έτσι ώστε

$$|z - z_0| = \delta \quad \Rightarrow \quad |g(z) - g(z_0)| < |g(z_0)|, \tag{5}$$

πράγμα που είναι δυνατόν λόγω της συνέχειας της $g(z)$. Η F απεικονίζει τον κύκλο $c = \{z : |z - z_0| = \delta\}$



Σχήμα 7.1.2: Απεικόνιση κύκλου σε κύκλο

ακτίνας δ στον κύκλο c' με κέντρο $f(z_0)$ και ακτίνα $r = |g(z_0)|\delta^n$. Διαλέγουμε $z' \in c$, έτσι ώστε το $F(z') \in c'$ να περιέχεται και στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ του 0 και του $f(z_0)$ (σχήμα 7.1.2), οπότε ισχύει

$$|F(z')| = |f(z_0)| - r.$$

Επίσης έχουμε ότι

$$|f(z') - F(z')| = |g(z') - g(z_0)||z' - z_0|^k < |g(z_0)|\delta^k = r.$$

Συμπεραίνουμε το άτοπο από την συνεπαγόμενη ανισότητα

$$|f(z')| \leq |F(z')| + |f(z') - F(z')| < |f(z_0)| - r + r = |f(z_0)|,$$

που αντιφάσκει στο ότι το $|f(z_0)| = m$ είναι η ελάχιστη τιμή της $|f(z)|$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 7.1.1 *(Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας) Κάθε πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει μία τουλάχιστον ρίζα.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του προηγουμένου λήμματος, αφού, αν $f(z)$ είναι το πολυώνυμο, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $h(z) = |f(z)|$ στο $\mathcal{C}$ θα είναι το 0 και θα λαμβάνεται σε σημείο $z_0 \in \mathcal{C}$, στο οποίο $h(z_0) = |f(z_0)| = 0 \Rightarrow f(z_0) = 0$, ο.ε.δ.

7.2 Το θεώρημα των Stone, Weierstrass

Το θεώρημα των Stone και Weierstrass είναι στην ρίζα πολλών προσεγγιστικών μεθόδων συναρτήσεων από οικογένειες άλλων, κατά κάποιο τρόπο *απλούστερων*. Το τυπικό παράδειγμα είναι αυτό της προσέγγισης μιας συνεχούς συνάρτησης μέσω πολυωνυμικών συναρτήσεων. Υποθέτουμε εδώ ότι ο τοπολογικός χώρος είναι ένα κλειστό (συμπαγές) διάστημα $\mathcal{M} = [a, b]$ και συμβολίζουμε με $C[a, b]$ τον διανυσματικό χώρο όλων των συνεχών στο $[a, b]$ συναρτήσεων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Η αρχική μορφή του θεωρήματος, διατυπωμένη από τον Weierstrass λέει ότι γιά κάθε συνεχή συνάρτηση $f \in C[a, b]$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πολυώνυμο $p_n(x) = a_n x^n + ... + a_0$ έτσι ώστε

$$||f - p_n||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} (|f(x) - p_n(x)|) < \varepsilon.$$

Το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων εκτός του ότι ορίζει έναν διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{A}$ του $C[a, b]$, έχει μια πρόσθετη δομή που οφείλεται στο ότι το γινόμενο πολυωνύμων είναι πάλι πολυώνυμο. Η δομή αυτή είναι μιάς *άλγεβρας* συναρτήσεων και τυποποιείται από τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 7.2.1 *Δοθέντος συμπαγούς τοπολογικού χώρου $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$, θεωρούμε τον χώρο Banach των συνεχών συναρτήσεων*

$$C(\mathcal{M}) = \{f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ συνεχής } \}$$

εφοδιασμένο με την norm $||f|| = \sup_{x\in\mathcal{M}}(|f(x)|)$.

1. *Ένας διανυσματικός υπόχωρος $\mathcal{A} \subset C(\mathcal{M})$ λέγεται* **άλγεβρα** *συναρτήσεων όταν είναι κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό:*
$$f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow fg \in \mathcal{A}.$$
2. *Λέμε ότι η $\mathcal{A}$* **περιέχει την μονάδα***, όταν αυτή περιέχει την σταθερή συνάρτηση: $1_M \in \mathcal{A}$.*
3. *Λέμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}$* **διαχωρίζει σημεία***, αν για κάθε $x \neq y \in \mathcal{M}$, υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε $f(x) \neq f(y)$.*
4. *Λέμε* **υποάλγεβρα** *της $\mathcal{A}$ ένα διανυσματικό υπόχωρο της $\mathcal{A}$ που είναι κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό.*

Σχόλιο-1 Το ίδιο το $C(\mathcal{M})$ είναι η ″μέγιστη″ άλγεβρα συναρτήσεων του $\mathcal{M}$. Όλες οι άλλες άλγεβρες συναρτήσεων $\mathcal{A}$, που θα θεωρήσουμε παρακάτω, είναι υποάλγεβρες αυτής της μέγιστης. Σύμφωνα με τον ορισμό μας, μια άλγεβρα/υποάλγεβρα μπορεί να περιέχει ή και να μην περιέχει την σταθερή συνάρτηση 1_M. Αυτό προφανώς είναι ισοδύναμο με το ότι η άλγεβρα/υποάλγεβρα περιέχει/δεν-περιέχει όλες τις σταθερές συναρτήσεις. Παραδείγματα αλγεβρών και υποαλγεβρών συναρτήσεων μπορούμε να κατασκευάσουμε εύκολα λ.χ. θεωρώντας για μια συνάρτηση $f \in C(\mathcal{M})$ τα πολλαπλάσια $f^n(x) = f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)$ (n φορές). Έτσι, παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από τέτοια πολλαπλάσια μιας συνάρτησης f

$$\mathcal{A}(f) = \{\lambda_{n_1} f^{n_1} + \cdots + \lambda_{n_k} f^{n_k}, n_i \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

είναι μια υποάλγεβρα της $C(\mathcal{M})$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το γεγονός, που αποδεικνύεται εύκολα βάσει της άσκησης 2.1.12 και της ″καλής″ συμπεριφοράς της norm του $C(\mathcal{M})$ ως προς το γινόμενο

$$||f \cdot g|| \leq ||f|| \cdot ||g||, \quad \text{για κάθε} \quad f, g \in C(\mathcal{M}), \qquad (*)$$

ότι αν $\mathcal{A} \subset C(\mathcal{M})$ είναι μία υποάλγεβρα, τότε και η θήκη της $\overline{\mathcal{A}}$ είναι υποάλγεβρα της $C(\mathcal{M})$.

Θεώρημα 7.2.1 *(Stone, Weierstrass) Δοθείσης μιάς άλγεβρας $\mathcal{A} \subset C(\mathcal{M})$ συναρτήσεων του συμπαγούς τοπολογικού χώρου $\mathcal{M}$ που περιέχει την μονάδα και διαχωρίζει σημεία, συνάρτησης $f \in C(\mathcal{M})$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει στοιχείο $h \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε*

$$||f - h|| < \varepsilon.$$

Με άλλα λόγια, η $\mathcal{A}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $C(\mathcal{M})$, ισοδύναμα, $\overline{\mathcal{A}} = C(\mathcal{M})$.

Σχόλιο-2 Η απόδειξη ([Goe90, $\sigma.$ 21]), χρησιμοποιεί σε καίριο σημείο το θεώρημα (2.2.7) σταθερού σημείου του Banach. Προτάσσουμε μερικά λήμματα που δείχνουν ότι η θήκη $\overline{\mathcal{A}}$ ορισμένων αλγεβρών περιέχει κάποια χρήσιμα στοιχεία (συναρτήσεις) που παίζουν κεντρικό ρόλο στο θεώρημα.

Λήμμα 7.2.1 *Για κάθε στοιχείο $f \in C(\mathcal{M})$ με $||f|| < 1$ υπάρχει ένα και μοναδικό στοιχείο $g \in \overline{\mathcal{A}(f)}$ με $||g|| < 1$ έτσι ώστε*

$$g^2 - 2g + f = 0.$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη εφαρμόζουμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach στην κλειστή μπάλα $\overline{B_r(0)} \subset \overline{\mathcal{A}(f)}$, όπου $r > 0$ με $||f|| < r < 1$. Ορίζουμε προς τούτο την απεικόνιση

$$T(g) = \frac{1}{2}(g^2 + f), \quad \text{για} \quad g \in \overline{B_r(0)} \subset \overline{\mathcal{A}(f)}.$$

Λόγω της

$$||T(g)|| \leq \frac{1}{2}(||g||^2 + ||f||) \leq \frac{1}{2}(r^2 + r) < r \quad \Rightarrow \quad T(\overline{B_r(0)}) \subset B_r(0).$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} ||T(g) - T(h)|| &= \frac{1}{2}||g^2 - h^2|| = \frac{1}{2}||(g-h)(g+h)|| \\ &\leq \frac{1}{2}(||g|| + ||h||)(||g - h||) \\ &\leq r||g - h||. \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι η T είναι απεικόνιση συστολής και συνεπώς έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο g στον (πλήρη) χώρο $\overline{B_r(0)}$. Επειδή το $r < 1$ μπορεί να επιλεγεί οσοδήποτε κοντά στο 1, το g είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της T περιεχόμενο στην ανοικτή μπάλα $B_1(0)$, ο.ε.δ.

Λήμμα 7.2.2 *Για κάθε $f \in B_1(0) \subset C(\mathcal{M})$ η εξίσωση*

$$g^2 = 1_M - f$$

έχει μία μοναδική λύση της μορφής $g = 1_M - h$ με $h \in \overline{\mathcal{A}(f)}$ και $||h|| < 1$.

Απόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα γράφοντας

$$(1_M - h)^2 = 1_M - f \quad \Leftrightarrow \quad h^2 - 2h + f = 0, \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

Λήμμα 7.2.3 *Εάν $\mathcal{A} \subset C(\mathcal{M})$ είναι μια κλειστή άλγεβρα συναρτήσεων που περιέχει την 1_M και $f \in \mathcal{A}$ είναι μη αρνητική, τότε υπάρχει $g \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε $g^2 = f$ (η τετραγωνική ρίζα της f).*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι $||f|| < 1$. Τότε, κατά το προηγούμενο λήμμα, θα υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης $g^2 = 1_M - f$, της μορφής $g = 1_M - h$ με $h \in \overline{\mathcal{A}(f)}$ και $||h|| < 1$. Τότε θα ισχύει $f = 1_M - g^2$ και ξαναεφαρμόζοντας το λήμμα στην g^2 βρίσκουμε συνάρτηση $k \in \overline{\mathcal{A}(f)}$ έτσι ώστε $1_M - g^2 = k^2 \ \Rightarrow \ f = k^2$.

Στην περίπτωση που $||f|| \geq 1$ θεωρούμε την συνάρτηση $f' = \frac{f}{4||f||^2}$, για την οποία $||f'|| < 1$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο συμπέρασμα, βρίσκουμε $g \in \overline{\mathcal{A}(f)}$ έτσι ώστε $f' = g^2 \ \Rightarrow \ f = (2||f||g)^2$ ο.ε.δ.

Πόρισμα 7.2.1 *Εάν $\mathcal{A} \subset C(\mathcal{M})$ είναι μια κλειστή άλγεβρα συναρτήσεων που περιέχει την 1_M καθώς και τις συναρτήσεις f, g, τότε η $\mathcal{A}$ περιέχει και τις συναρτήσεις*

$$(1)\ \ |f| = (f^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$(2)\ \ \max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$
$$(3)\ \ \min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

Απόδειξη: Θεωρήματος Stone, Weierstrass Υποθέτουμε εδώ ότι η $\mathcal{A} \subset C(\mathcal{M})$ είναι μια άλγεβρα που ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 7.2.1. Ας υποθέσουμε επίσης προς στιγμήν το $x \in \mathcal{M}$ σταθερό. Τότε, για δοθείσα $f \in C(\mathcal{M})$ και κάθε άλλο σημείο $y \neq x$ υπάρχει συνάρτηση $g_y \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε $g_y(x) = f(x)$ και $g_y(y) = f(y)$. Αυτό προκύπτει από το ότι η $\mathcal{A}$ διαχωρίζει σημεία, οπότε υπάρχει μια $g \in \mathcal{A}$ με $g(x) \neq g(y)$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε

$$g_y(t) = f(x) + (f(y) - f(x))\frac{g(t)-g(x)}{g(y)-g(x)}.$$

Για δοθέν $\varepsilon > 0$, λόγω της συνέχειας της g_y, θα υπάρχει ανοικτή περιοχή U_y του y έτσι ώστε

$$t \in U_y \quad \Rightarrow \quad g_y(t) < f(t) + \varepsilon.$$

Τα ανοικτά $\{U_y\}$ καλύπτουν το συμπαγές $\mathcal{M}$, άρα υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $\{y_1, \ldots, y_n\}$ έτσι ώστε $\mathcal{M} \subset \cup_{i=1}^n U_{y_i}$. Ορίζουμε λοιπόν την συνάρτηση

$$h_x(t) = \min\{g_{y_1}(t), \ldots, g_{y_n}(t)\} \in \overline{\mathcal{A}},$$

για την οποία ισχύει $h_x(t) < f(t) + \varepsilon$ για κάθε $t \in \mathcal{M}$.

Τώρα, από την συνέχεια της $h_x(t)$, συνάγεται ότι υπάρχει περιοχή V_x του x, έτσι ώστε

$$t \in V_x \quad \Rightarrow \quad h_x(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Όπως και προηγουμένως, από την συμπάγεια του $\mathcal{M}$, συνάγεται ότι υπάρχουν πεπερασμένα $\{x_1, \ldots, x_m\}$ έτσι ώστε $\mathcal{M} \subset \cup_{i=1}^m V_{x_i}$. Ορίζουμε πάλι την

$$h(t) = \max\{h_{x_1}(t), \ldots, h_{x_m}(t)\} \in \overline{\mathcal{A}},$$

για την οποία ισχύει $||f - h|| < \varepsilon$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 7.2.2 *Για κάθε συμπαγή χώρο μετρικό χώρο $(\mathcal{M}, d)$, ο χώρος $C(\mathcal{M})$ είναι διαχωρίσιμος.*

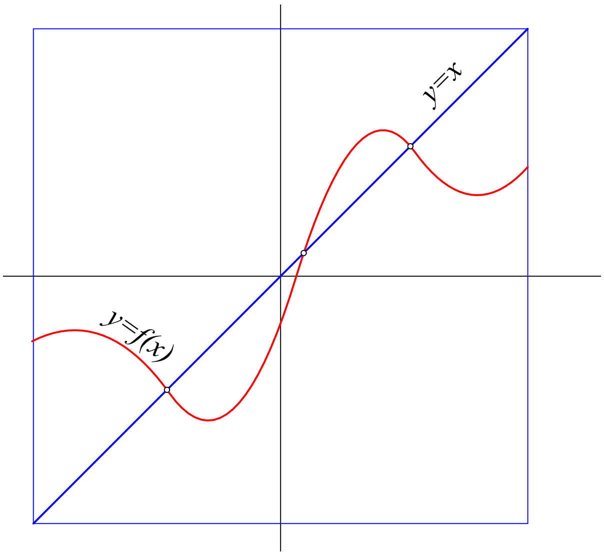
Απόδειξη: Ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι διαχωρίσιμος (θεώρημα 5.2.7, Άσκηση 5.2.7). Έστω λοιπόν $\{x_i\}$ μια ακολουθία, το σύνολο των σημείων της οποίας είναι πυκνό στο $\mathcal{M}$. Θεώρησε τις συναρτήσεις

$$\{g_i(x) = d(x, x_i), i \in \mathbb{N}\}$$

και την άλγεβρα $\mathcal{A} \subset C(\mathcal{M})$ που παράγεται από τα πεπερασμένα γινόμενα αυτών των συναρτήσεων και την 1_M.

$$\mathcal{A} = \{\lambda + \Sigma\lambda_{i_1\ldots i_k} g_{i_1} \cdot \cdots \cdot g_{i_k}.\}$$

Η άλγεβρα αυτή διαχωρίζει τα σημεία. Πράγματι άν $x \neq y$ με $3\varepsilon = d(x,y)$ και $\frac{1}{n} < \varepsilon$, τότε υπάρχει $x_i : d(x_i, x) < \varepsilon \Rightarrow g_i(x) < \varepsilon$. Επίσης είναι $d(x_i, y) = g_i(y) > \varepsilon$, διότι αν ήταν $d(x_i, y) \leq \varepsilon$, τότε θα ήταν $d(x,y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y) \leq 2\varepsilon$, που είναι άτοπο. Συνάγεται ότι $\overline{\mathcal{A}} = C(\mathcal{M})$. Αρκεί να θεωρήσουμε το αριθμήσιμο υποσύνολο της $\mathcal{A}$ που αποτελείται τις συναρτήσεις της με ρητά λ και $\lambda_{i_1\ldots i_k}$, ο.ε.δ.



Σχήμα 7.3.1: Το θεώρημα Brouwer για διάσταση $n = 1$

7.3 Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer

Το θεώρημα του Brouwer, γενικεύει την απλή ιδιότητα που περιγράφει το σχήμα 7.3.1: Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ έχει ένα σταθερό σημείο, δηλαδή ένα σημείο $x \in [-1, 1]$ για το οποίο ισχύει $f(x) = x$. Ισοδύναμα, το γράφημα G_f της f τέμνει την διαγώνιο του τετραγώνου που είναι το γράφημα της συνάρτησης $y = x$. Η απόδειξη που θα δώσουμε απαιτεί μια εξοικείωση με τον διανυσματικό λογισμό και κυρίως με δύο από τα βασικά του θεωρήματα, που είναι το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης ([Τρό12α, σελ.240], [Σπί94, σελ.36]) και το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής σε πολλαπλά ολοκληρώματα ([Τρό12α, σελ.313], [Σπί94, σελ.66]).

Θεώρημα 7.3.1 *(Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer) Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : \overline{B^n} \longrightarrow \overline{B^n}$ έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο.*

Εδώ με $\overline{B^n}$ συμβολίζουμε την κλειστή (συμπαγή) μπάλα του $\mathbb{R}^n$

$$\overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\},$$

της οποίας το σύνορο είναι η μοναδιαία σφαίρα

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}.$$

Της απόδειξης ([How95]) θα προτάξουμε ένα λήμμα που αφορά απεικονίσεις της C^1 κατηγορίας, δηλαδή απεικονίσεις που έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο. Το θέμα, όπως είπαμε, απαιτεί μια εξοικείωση με την ανάλυση πολλών μεταβλητών. Επίσης η παράγωγος μιάς απεικόνισης

$$f : \overline{B^n} \longrightarrow S^{n-1},$$

όπως αυτή που θα μας απασχολήσει παρακάτω, ορίζεται μέσω της δομής διαφορίσιμης πολλαπλότητας της S^{n-1} ([FB70]), που μέσω σύνθεσης με στερεογραφικές προβολές της σφαίρας ανάγεται σε διαφορίσιμες απεικονίσεις του τύπου

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1},$$

και τελικά στην ύπαρξη και συνέχεια των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ για συστήματα συναρτήσεων της μορφής

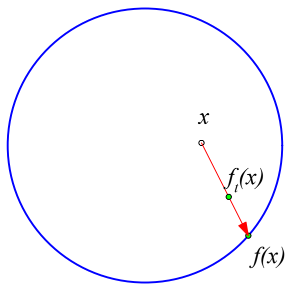
$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots \\ y_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Λήμμα 7.3.1 *Δεν υπάρχει C^1 διαφορίσιμη απεικόνιση*

$$f : \overline{B^n} \longrightarrow S^{n-1},$$

έτσι ώστε $f(x) = x$ για κάθε $x \in S^{n-1} \subset \overline{B^n}$.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει τέτοια f. Τότε για $t \in [0, 1]$ ορίζουμε τη συνάρτηση



Σχήμα 7.3.2: Συνάρτηση f_t οριζόμενη από την f

$$f_t(x) = (1-t)\,x + t\,f(x) = x + t\,g(x), \quad \text{όπου} \quad g(x) = f(x) - x. \tag{1}$$

Η f_t είναι επίσης C^1 διαφορίσιμη, και απεικονίζει την μπάλα στον εαυτό της, αφού

$$||f_t(x)|| \leq (1-t)||x|| + t||f(x)|| = (1-t) + t = 1. \tag{2}$$

Μάλιστα έχει την ίδια ιδιότητα με την f, να αφήνει τα σημεία της S^{n-1} σταθερά αφού

$$\text{για κάθε} \quad x \in S^{n-1} \quad \Rightarrow \quad f_t(x) = (1-t)\,x + t\,x = x.$$

Από το ότι η f είναι C^1 διαφορίσιμη έπεται ότι η g είναι επίσης διαφορίσιμη και συνεπώς, λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής ([Ack09, $\sigma.$ 181]) και της συμπάγειας της $\overline{B^n}$, θα είναι Lipschitz, δηλαδή θα υπάρχει σταθερά K έτσι ώστε

$$\text{για κάθε} \quad x_1, x_2 \in \overline{B^n} : ||g(x_1) - g(x_2)|| \leq K\,||x_1 - x_2||. \tag{3}$$

Ας δούμε για ποιά t η f_t είναι και $1-1$. Έστω λοιπόν

$$\begin{aligned} & x_1 \neq x_2 \in \overline{B^n}, \quad \text{με} \quad f_t(x_1) = f_t(x_2) \quad \Rightarrow \\ & x_2 - x_1 = t\,(g(x_1) - g(x_2)) \quad \Rightarrow \\ & ||x_2 - x_1|| = t\,||(g(x_1) - g(x_2))|| \leq K\,t\,||x_2 - x_1|| \quad \Rightarrow \\ & 1 < K\,t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{K} \leq t \quad \Rightarrow \\ & \text{για κάθε} \quad t < \frac{1}{K} \quad \text{η} \quad f_t : \overline{B^n} \longrightarrow \overline{B^n} \text{ είναι 1-1.} \end{aligned} \tag{4}$$

Ορίζουμε τα σύνολα $G_t = f_t(B^n)$. Επειδή η παράγωγος της f_t είναι ίση με την γραμμική απεικόνιση

$$f_t' = I + t\,g'$$

(I συμβολίζει την ταυτοτική απεικόνιση) και η g είναι C^1 διαφορίσιμη, η ορίζουσα $det(f_t')$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση και $det(f_0') = 1$ για κάθε $x \in \overline{B^n}$, θα υπάρχει $t_0 \neq 0$ έτσι ώστε

$$det(f_t'(x)) > 0 \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0, t_0] \;\; \text{και κάθε} \quad x \in B^n. \tag{5}$$

Παίρνοντας, στην ανάγκη, ένα μικρότερο του t_0, μπορούμε, λόγω της (4), να υποθέσουμε ότι η

$$f_t : B^n \longrightarrow G_t \quad \text{είναι 1-1 για} \quad t \in [0, t_0].$$

Δείχνουμε ότι

$$G_t = f_t(B^n) = B^n \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0, t_0].$$

Πράγματι, έστω ότι αυτό δεν ισχύει και η $G_t \subset B^n$ είναι γνήσια. Τότε το σύνορο $\partial G_t \cap B^n \neq \emptyset$ και έστω $y_0 \in \partial G_t \cap B^n$. Τότε η $y_0 \in \partial G_t = \partial(f_t(B^n))$ συνεπάγεται την ύπαρξη ακολουθίας $\{x_k\} \subset B^n$ με

$$\lim f_t(x_k) = y_0.$$

Λόγω της συμπάγειας της $\overline{B^n}$ θα υπάρχει υπακολουθία $\{x_k\}$ με $\lim x_k = x_0 \in \overline{B^n}$ και λόγω της συνέχειας της f_t θα ισχύει $f_t(x_0) = y_0$. Όμως, λόγω της τοπικής αντιστρεψιμότητας της f_t, το G_t είναι ανοικτό και επομένως η τομή του με το σύνορό του $G_t \cap \partial G_t = \emptyset$. Αυτό συνεπάγεται ότι το $y_0 \notin G_t = f_t(B^n)$ άρα το $x_0 \in \overline{B^n} - B^n = S^{n-1}$. Όμως για $x \in S^{n-1}$ ισχύει $f_t(x) = x$, άρα $y_0 = f_t(x_0) = x_0$ και το y_0 θα περιέχεται στο S^{n-1} και όχι στο B^n, αντίθετα με την υπόθεση. Είναι λοιπόν η

$$f_t : \overline{B^n} \longrightarrow \overline{B^n} \quad 1-1 \text{ και επί}. \tag{6}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\begin{aligned} &F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ &F(t) = \int_{\overline{B^n}} det(f_t'(x))dx = \int_{\overline{B^n}} det(I + t\, g'(x))dx, \end{aligned}$$

που, ως προς t, είναι ένα πολυώνυμο. Για $t \in [0, t_0]$ η $f_t : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ είναι 1-1 και επί, συνεπώς κατά τον τύπο αλλαγής μεταβλητής της ολοκλήρωσης, το $F(t)$ θα παριστάνει τον $n-$ διάστατο όγκο της εικόνας $f_t(\overline{B^n}) = \overline{B^n}$. Η $F(t)$ συνεπώς, θα είναι μία σταθερά $K_n = vol(B^n)$ για κάθε $t \in [0, t_0]$. Όμως ένα πολυώνυμο που είναι σταθερό στα σημεία ενός διαστήματος $[0, t_0]$ είναι παντού σταθερό και συνεπώς

$$F(1) = K_n > 0. \tag{7}$$

Αυτό οδηγεί στην επιθυμητή αντίφαση ως εξής.

$$\begin{aligned} &f_1(x) = f(x) \in S^{n-1} \;\; \text{για κάθε} \;\; x \in \overline{B^n} \quad \Rightarrow \\ &f_1(x) \cdot f_1(x) = ||f_1(x)||^2 = 1 \quad \Rightarrow \\ &2\, f_1'(x)(v) \cdot f_1(x) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f_1(x+tv) \cdot f_1(x+tv) = 0 \quad \Rightarrow \\ &Im(f_1'(x)) \subset f(x)^\perp \quad \Rightarrow \\ &\text{τάξη}(f_1'(x)) \leq n-1 \;\; \forall\, x \in \overline{B^n} \quad \Rightarrow \\ &det(f_1'(x)) = 0 \;\; \text{για κάθε} \quad x \in \overline{B^n} \quad \Rightarrow \\ &F(1) = \int_{\overline{B^n}} det(f_1'(x))dx = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Το τελευταίο συμπέρασμα αντιφάσκει στην (7) και αποδεικνύει το λήμμα, ο.ε.δ.

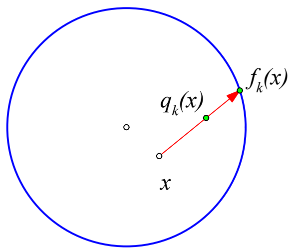
Απόδειξη: (του θεωρήματος του Brouwer) Την συνεχή $f : \overline{B^n} \longrightarrow \overline{B^n}$ της υπόθεσης του θεωρήματος, προσεγγίζουμε με πολυώνυμικές συναρτήσεις κατά το θεώρημα Stone Weierstrass. Κατ' αυτό το θεώρημα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση (δηλαδή συνάρτηση $p(x) = (p_1(x), \ldots, p_n(x))$, όπου οι $p_i(x) = p_i(x_1, \ldots, x_n)$ είναι πολυώνυμα n μεταβλητών)

$$p^{(k)} : \overline{B^n} \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ έτσι ώστε } ||f(x) - p^{(k)}(x)|| \leq \frac{1}{k} \text{ για κάθε } \quad x \in \overline{B^n} \Rightarrow \tag{9}$$
$$||p^{(k)}(x)|| \leq ||f(x)|| + ||p^{(k)}(x) - f(x)|| \leq 1 + \frac{1}{k}.$$

Άρα παίρνοντας

$$q_k = \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} p^{(k)},$$

έχουμε ακολουθία πολυωνυμικών συναρτήσεων $\{q_k : \overline{B^n} \to \overline{B^n}\}$ που συγκλίνουν ομοιόμορφα στην συνάρτηση f.



Σχήμα 7.3.3: Συνάρτηση f_k οριζόμενη από την q_k

Δείχνουμε ότι κάθε q_k έχει ένα σταθερό σημείο $x_k \in \overline{B^n}$. Πράγματι, αν ήταν $q_k(x) \neq x$ για κάθε $x \in \overline{B^n}$, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση $f_k(x), f_k : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$, παίρνοντας ως $f_k(x)$ το σημείο στο οποίο η ημιευθεία $[x, q_k(x)]$ τέμνει την S^{n-1} (σχήμα 7.3.3). Η συνάρτηση αυτή είναι C^1 διαφορίσιμη και έχει $f_k(x) = x$ γιά κάθε $x \in S^{n-1}$, σε αντίφαση με το λήμμα. Κατασκευάζουμε λοιπόν μια ακολουθία $\{x_k\}$ από τα σταθερά σημεία x_k των q_k. Λόγω της συμπάγειας της $\overline{B^n}$ υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lim x_k = x_0 \in \overline{B^n}$. Επειδή η ακολουθία των συναρτήσεων q_k συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $\overline{B^n}$, έπεται

$$f(x_0) = \lim q_k(x_k) = \lim x_k = x_0, \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

Πόρισμα 7.3.1 *Δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : \overline{B^n} \longrightarrow S^{n-1}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in S^{n-1}$.*

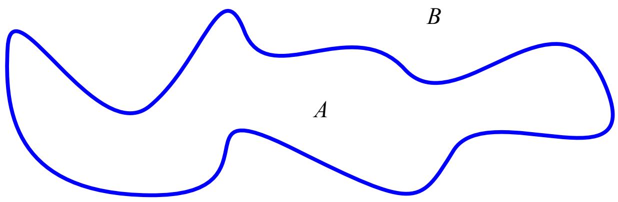
Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει συνεχής τέτοια απεικόνιση. Τότε η $g(x) = -f(x)$ είναι επίσης απεικόνιση όπως η f της $\overline{B^n}$ στην S^{n-1}. Αν $g(x) = x$ τότε το $x \in S^{n-1}$. Όμως για $x \in S^{n-1}$ ισχύει $g(x) = -f(x) = -x \neq x$. Άρα η g δεν μπορεί να έχει σταθερά σημεία, κατ' αντίφαση προς το θεώρημα του Brouwer, ο.ε.δ.

7.4 Το θεώρημα του Jordan

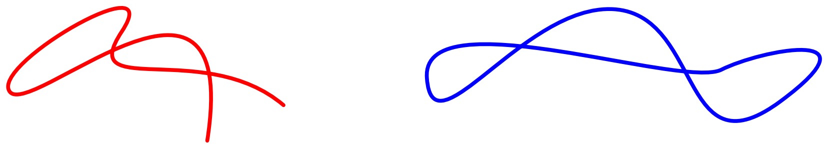
Το θεώρημα του Jordan εκφράζει μια ιδιότητα που έχει μια απλή κλειστή καμπύλη c του επιπέδου, όπως ο κύκλος: χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη, ένα φραγμένο A και ένα μη φραγμένο B (σχήμα 7.4.1).

Ορισμός 7.4.1 **Απλό τόξο** *ονομάζουμε ένα υποσύνολο $K \subset \mathbb{R}^2$, για το οποίο υπάρχει ομοιομορφισμός $f : I = [0,1] \longrightarrow K$ στο K με την σχετική τοπολογία.*

Καμπύλη του Jordan *ονομάζουμε ένα υποσύνολο $K \subset \mathbb{R}^2$, για το οποίο υπάρχειο ομοιομορφισμός του μοναδιαίου κύκλου $f : S^1 \longrightarrow K$ στο K με την σχετική τοπολογία.*



Σχήμα 7.4.1: Θεώρημα του Jordan



Σχήμα 7.4.2: Αυτοτεμνόμενες καμπύλες, ανοικτή και κλειστή

Σχόλιο-1 Καμιά φορά θα χρησιμοποιούμε τους όρους τόξο, καμπύλη και για την συνάρτηση f μέσω της οποίας ορίζονται αυτά τα σύνολα. Το νόημα θα βγαίνει από τα συμφραζόμενα. Συνήθως η f ονομάζεται **παραμέτριση** του τόξου και της καμπύλης αντίστοιχα. Ο τρόπος που ορίσαμε αυτές τις έννοιες αποκλείει τις περιπτώσεις **αυτοτομών**, όπως αυτές του σχήματος 7.4.2, οι οποίες εντάσσονται στον γενικότερο ορισμό των καμπυλών του επιπέδου (ορισμός 4.2.1).

Θεώρημα 7.4.1 *(Θεώρημα του Jordan) Κάθε κλειστή καμπύλη K του Jordan χωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε δύο συνεκτικές συνιστώσες, μία φραγμένη και μία μη-φραγμένη, με κοινό σύνορο το K.*

Απόδειξη: Την απόδειξη του θεωρήματος ([Mae84]) θα δώσουμε με την βοήθεια μερικών λημμάτων.

Λήμμα 7.4.1 *Γιά κάθε καμπύλη του Jordan K ισχύει:*

1. *Κάθε συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 - K$ είναι κατά τόξα συνεκτική και ανοικτή.*
2. *Το σύνολο $\mathbb{R}^2 - K$ έχει μία μόνο μη φραγμένη συνιστώσα.*

Απόδειξη: Το K είναι εξ ορισμού συμπαγές, άρα το συμπλήρωμα ανοικτό. Το (1) προκύπτει από τα θεωρήματα 4.2.3, 4.2.1. Το (2) είναι συνέπεια της συμπάγειας του K, ο.ε.δ.

Λήμμα 7.4.2 *Εάν το $\mathbb{R}^2 - K$ είναι μη συνεκτικό, τότε κάθε συνεκτική συνιστώσα του έχει το K ως σύνορο.*

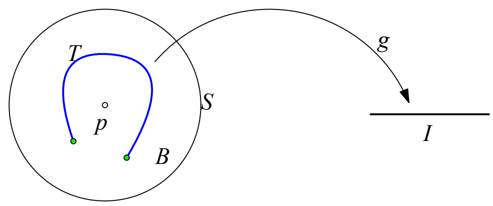
Απόδειξη: Από την υπόθεση το $\mathbb{R}^2 - K$ έχει δύο τουλάχιστον συνεκτικές συνιστώσες. Έστω U μία εξ αυτών. Κάθε άλλη συνιστώσα U' είναι επίσης ανοικτό σύνολο ξένο προς το U, άρα δεν έχει κοινό σημείο με το σύνορο

$$\partial U = \overline{U} \cap U^c \quad \Rightarrow \quad \partial U \subset K.$$

Θα δείξουμε ότι $\partial U \neq K$ οδηγεί σε άτοπο. Πράγματι, αν συμβαίνει αυτό, τότε θα υπάρχει ένα τόξο $T \subset K$ που θα περιέχει το σύνορο

$$\partial U = \overline{U} \cap U^c \subset T. \tag{1}$$

Κατά το προηγούμενο λήμμα και την υπόθεση, θα υπάρχει μία τουλάχιστον φραγμένη συνιστώσα, που μπορεί να είναι η U. Παίρνουμε σ' αυτήν ένα σημείο p και μια αρκετά μεγάλη μπάλα $B = B_r(p)$ που να περιέχει την καμπύλη K στο εσωτερικό της, οπότε η σφαίρα $S = S_r(p)$, σύνορο της μπάλας, περιέχεται στην μη-φραγμένη συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 - K$. Επειδή το τόξο T είναι ομοιόμορφο με το $[0,1]$, η ταυτοτική $Id : T \to T$ επεκτείνεται κατά Tietze σε μία συνεχή $I : \overline{B} \to T$. Αν λ.χ. $g = f^{-1} : T \to [0,1]$ η αντίστροφη της f που ορίζει το τόξο ως $T = f([0,1])$, επέκτεινε την g κατά Tietze (θεώρημα 3.2.4) σε μιά $G : \overline{B} \to I$ και πάρε την $I = f \circ G$. Ορίζουμε την απεικόνιση



Σχήμα 7.4.3: Εφαρμογή θεωρήματος Tietze

$$q : \overline{B} \longrightarrow \overline{B} - \{p\} \quad \text{με}$$

$$q(x) = \begin{cases} I(x) & x \in \overline{U} \\ x & x \in U^c \end{cases} \quad \text{ή} \quad q(x) = \begin{cases} x & x \in \overline{U} \\ I(x) & x \in U^c. \end{cases} \tag{2}$$

Τον πρώτο τύπο χρησιμοποιώντας αν η U είναι φραγμένη και τον δεύτερο στην αντίθετη περίπτωση. Λόγω της (1) η τομή των δύο κλειστών $\overline{U}$ και U^c περιέχεται στο τόξο T, όπου η I είναι η ταυτοτική. Είναι συνεπώς η q καλώς ορισμένη και συνεχής. Επίσης, από τον τρόπο που ορίσθηκε ισχύει ότι

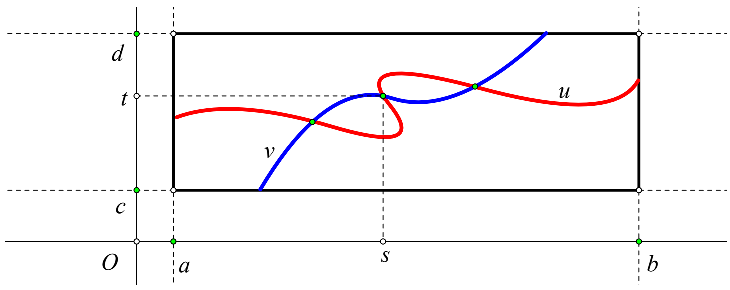
$$q(x) = x \quad \text{για} \quad x \in S. \tag{3}$$

Έστω $h : \overline{B} \to S$ η ακτινική προβολή από το κέντρο της μπάλας πάνω στην σφαίρα και $a : S \to S$ η αντιποδική απεικόνιση της σφαίρας. Η σύνθεση

$$b = a \circ h \circ q : \overline{B} \longrightarrow S \subset \overline{B},$$

δεν έχει σταθερό σημείο. Διότι αν είχε, τότε το $x \in S$, όπου $q(x) = x, h(x) = x, a(x) = -x$, άρα $b(x) = -x \to 2x = 0$, που είναι αδύνατον. Όμως το ότι η b δεν έχει σταθερό σημείο αντιφάσκει στο θεώρημα του Brouwer, που είναι άτοπο και αποδεικνύει το λήμμα, ο.ε.δ.

Στο επόμενο λήμμα θεωρούμε καμπύλες, δηλαδή συνεχείς απεικονίσεις $u, v : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ που διατρέ-



Σχήμα 7.4.4: Διασταυρούμενες καμπύλες

χουν το παραλληλόγραμμο, δηλαδή κάθε σημείο τους περιέχεται στο κλειστό παραλληλόγραμμο (σχήμα 7.4.4):

$$P[(a,b),(c,d)] = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [c,d]\}.$$

Λέμε ότι οι καμπύλες u, v ενώνουν τις απέναντι πλευρές αυτού του τετραπλεύρου, όταν ισχύει

$$u_x(-1) = a, \quad u_x(1) = b, \quad v_y(-1) = c, \quad v_y(1) = d. \tag{3}$$

Λήμμα 7.4.3 *Έστω ότι οι καμπύλες u, v ενώνουν τις απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $P[(a,b),(c,d)]$, τότε υπάρχει σημείο τομής τους, δηλαδή υπάρχουν $s, t \in [-1,1] : u(s) = v(t)$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η υπόθεση $u(s) \neq v(t)$ για κάθε $s, t \in [-1,1]$ οδηγεί σε άτοπο. Προς τούτο, θεώρησε την συνάρτηση (norm)

$$N(s,t) = \max\{|u_x(s) - v_x(t)|, |u_y(s) - v_y(t)|\},$$

$$\text{για την οποία} \quad N(s,t) \neq 0 \ \ \forall\, (s,t) \in [-1,1]^2.$$

Μέσω αυτής ορίζεται μια απεικόνιση f του $[-1,1]^2$ στον εαυτό του

$$f(s,t) = \left(\frac{v_x(t) - u_x(s)}{N(s,t)}, \frac{u_y(s) - v_y(t)}{N(s,t)} \right),$$

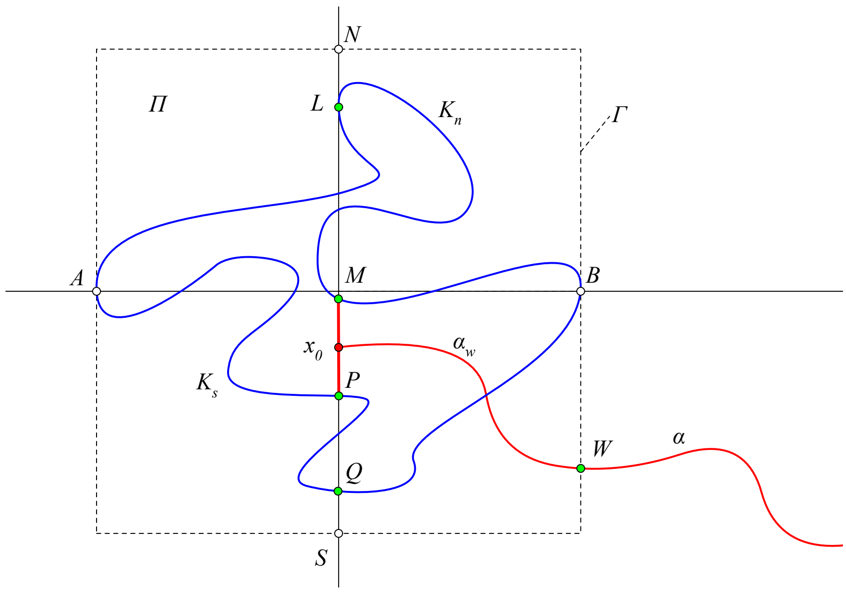
η οποία, σημειωτέον, απεικονίζει το $[-1,1]^2$ στο σύνορό του (*).

Η f δεν μπορεί να έχει σταθερό σημείο. Πράγματι, αν είχε ένα τέτοιο $f(s_0,t_0) = (s_0,t_0)$, τότε θα έπρεπε, σύμφωνα με την (*) ή $|s_0| = 1$ ή $|t_0| = 1$. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάτι τέτοιο οδηγεί σε άτοπο. Αν λ.χ. ήταν $s_0 = -1$, τότε θα είχαμε

$$\begin{aligned}(-1,t_0) = f(-1,t_0) &= \left(\frac{v_x(t_0) - u_x(-1)}{N(-1,t_0)}, \frac{u_y(-1) - v_y(t_0)}{N(s,t)} \right) \\ &= \left(\frac{v_x(t_0) - a}{N(-1,t_0)}, \frac{u_y(-1) - v_y(t_0)}{N(s,t)} \right),\end{aligned}$$

που είναι άτοπο, αφού $v_x(t_0) - a \geq 0$. Συνάγεται ότι η f δεν έχει σταθερό σημείο, πράγμα που αντιφάσκει στο θεώρημα του Brouwer, εφαρμοζόμενο στο $[-1,1]^2$, που είναι ομοιόμορφο της μπάλας $\overline{B_1(O)}$, ο.ε.δ.

Απόδειξη: (του θεωρήματος Jordan) Κατά το λήμμα 7.4.2, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}^2 - K$ έχει μία ακριβώς φραγμένη συνεκτική συνιστώσα. Η απόδειξη γίνεται σε τρία βήματα. Στο πρώτο ορίζουμε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^2 - K$. Στο δεύτερο δείχνουμε ότι αυτό το σημείο περιέχεται σε φραγμένη συνεκτική συνιστώσα U. Στο τρίτο βήμα δείχνουμε ότι δεν υπάρχει άλλη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα εκτός της U.



Σχήμα 7.4.5: Κατασκευή του x_0

Πρώτο βήμα: το σημείο x_0. Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχουν σημεία του $A, B \in K$ για τα οποία η απόσταση $||A - B||$ είναι μέγιστη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A = (-1,0), B = (1,0)$ (με μια αλλαγή συντεταγμένων ακολουθούμενη από ομοιοθεσία). Τότε το παραλληλόγραμμο $\Pi = [-1,1] \times [-2,2]$[1] θα περιέχει το K και το σύνορο $\Gamma = \partial \Pi$ του παραλληλογράμμου θα συναντά το K στα δύο ακριβώς σημεία A, B. (Αν υπήρχαν και άλλα στο σύνορο, τότε η μέγιστη απόσταση θα ήταν μεγαλύτερη της $||A - B||$.) Το ευθύγραμμο τμήμα NS που ενώνει τα μέσα των πάνω και κάτω πλευρών του Π, κατά το λήμμα 7.4.3 τέμνει την K. Εστω $L(x,y) \in K \cap NS$ το σημείο τομής με το μέγιστο y. Τα A, B χωρίζουν την K σε δύο τόξα, τα οποία συμβολίζουμε με K_n, K_s, όπου K_n αυτό που περιέχει το L. Έστω

[1] Σημειωτέον ότι το σχήμα 7.4.5 θα έπρεπε κανονικά να έχει διπλάσιο ύψος. Ωστόσο σχεδιάστηκε έτσι για εξοικονόμηση χώρου.

$M(x,y) \in K_n \cap NS$ το σημείο με το ελάχιστο y (το M μπορεί να συμπίπτει με το L). Το ευθύγραμμο τμήμα MS τέμνει το τόξο K_s. Διαφορετικά η καμπύλη που προκύπτει ενώνοντας τα τόξα

$$NL + \widetilde{LM} + MS,$$

όπου $\widetilde{LM}$ συμβολίζει το τόξο της K_n με άκρα L και M, δεν θα έτεμνε την K_s, κατ' αντίφαση προς το λήμμα 7.4.3. Έστω ότι $P, Q \in K_s \cap MS$ είναι τα σημεία τομής με μέγιστο, αντίστοιχα ελάχιστο y. Ορίζουμε το x_0 να είναι το μέσον του τμήματος MP.

Δεύτερο βήμα: η συνεκτική συνιστώσα U του x_0 είναι φραγμένη. Πράγματι, αν ήταν μη-φραγμένη, τότε, λόγω της κατά τόξα συνεκτικότητας της U, θα υπήρχει συνεχής καμπύλη α από το x_0 προς άλλο σημείο της συνιστώσας εκτός του Π. Έστω W το πρώτο σημείο τομής αυτής της καμπύλης με το σύνορο Γ του Π, και α_w το τμήμα της καμπύλης μεταξύ του x_0 και του W. Εάν το W είναι στο κάτω μισό του Γ, τότε μπορούμε να βρούμε τόξο $\widetilde{WS} \subset \Gamma$ που δεν διέρχεται από τα A, B. Τότε η συνεχής καμπύλη που συντίθεται από τα τμήματα

$$NL + \widetilde{LM} + Mx_0 + \alpha_w + \widetilde{WS},$$

δεν συναντά το τόξο K_s, κατ' αντίφαση προς το λήμμα 7.4.3. Παρόμοια, αν το W είναι στο πάνω μέρος του Γ, τότε η καμπύλη που συντίθεται από τα μέρη

$$Sx_0 + \alpha_w + \widetilde{WN},$$

όπου $\widetilde{WN} \subset \Gamma$ το μικρότερο τμήμα μέσα στο Γ από το W στο N, δεν συναντά το K_n, κατ' αντίφαση προς το λήμμα 7.4.3. Οι αντιφάσεις αυτές δείχνουν ότι το U είναι φραγμένη συνιστώσα.

Τρίτο βήμα: μοναδικότητα της φραγμένης συνιστώσας U. Έστω ότι υπάρχει μια άλλη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα $U' \neq U$ του $\mathbb{R}^2 - K$. Έστω τότε η καμπύλη β που συντίθεται από τα τμήματα

$$NL + \widetilde{LM} + MP + \widetilde{PQ} + QS,$$

όπου $\widetilde{PQ}$ το τόξο της K_s από το P στο Q. Αυτή η καμπύλη β δεν έχει κοινά σημεία με την U', αφού διέρχεται από το x_0 που περιέχεται στην άλλη συνιστώσα U. Επειδή τα σημεία A, B δεν περιέχονται στην β, θα υπάρχουν περιοχές τους V_A, V_B αντίστοιχα, οι οποίες επίσης δεν περιέχουν σημεία της β. Επιπρόσθετα, καθώς, κατά το λήμμα 7.4.2, τα $A, B \in \overline{U'}$, θα υπάρχουν σημεία $A' \in U' \cap V_A$ και $B' \in U' \cap V_B$. Έστω $\widetilde{A'B'}$ μια συνεχής καμπύλη στο U', από το A' στο B'. Τότε η συνεχής καμπύλη που συντίθεται από τα

$$AA' + \widetilde{A'B'} + B'B$$

δεν συναντά την καμπύλη β, κατ' αντίφαση προς το λήμμα 7.4.3, ο.ε.δ.

Βιβλιογραφία

[Σπί94] Σπίβακ, Μιχαήλ: *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

[Σπί04] Σπίβακ, Μιχαήλ: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2004.

[Μήτ06] Μήτσης, Θέμης: *Σημειώσεις Γενικής Τοπολογίας*. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιστοσελίδα Θέμη Μήτση, 2006.

[Τρό12α] Τρόμπα, Μάρσντεν και: *Διανυσματικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2012.

[Στρ12β] Στρανγκ, Γκίλμπερτ: *Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2012.

[Ack09] Ackoglu, Mustafa: *Analysis in vector spaces*. Wiley, New York, 2009.

[Ahl79] Ahlfors, Lars: *Complex Analysis*. McGraw-Hill Inc., New York, 1979.

[Arm83] Armstrong, A. M.: *Basic Topology*. Springer, Berlin, 1983.

[Boo05] Boocher, Adam: *A Proof of Tietze Extension Theorem using Urysohn's Lemma*. math.berkeley.edu/ aboocher/math/tietze.pdf, 2005.

[Car11] Cardoso, Joao: *Iteration functions for pth roots of complex numbers*. Numerical Algorithms, 57:329 – 356, 2011.

[Dug66] Dugundji, James: *Topology*. Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1966.

[Edg08] Edgar, Gerald: *Measure Topology and Fractal Geometry*. Springer, Berlin, 2008.

[Enf73] Enflo, Per: *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*. Acta Mathematica, 130:309 – 317, 1973.

[Fal90] Falconer, Kenneth: *Fractal Geometry*. John Wiley, New York, 1990.

[FB70] F. Brickell, R. Clark: *Differentiable manifolds*. Van Nostrand, London, 1970.

[Goe90] Goebel, Kazimierz: *Topics in metric fixed point theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Hat02] Hatcher, Allen: *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[How95] Howard, Ralph: *The Milnor-Rogers proof of the Brouwer fixed point theorem*. www.math.sc.edu/ howard/Notes/brouwer.pdf, 1995.

[KF70] Kolmogorov, A. and S. Fomin: *Introductory Real Analysis*. Dover, New York, 1970.

[Kin93] Kinsey, Christine: *Topology of Surfaces*. Springer, New York, 1993.

[Lax97] Lax, Peter: *Linear Algebra*. John Wiley, New York, 1997.

[Loo53] Loomis, Lynn: *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*. Van Nostrand, Inc, New York, 1953.

[Mae84] Maehara, Ryuji: *The jordan curve theorem via the brouwer fixed point theorem*. American Mathematical Monthly, 91:641 – 643, 1984.

[Man89] Mandelbrot, Benoit: *Fractal geometry: what is it, and what does it do?* Proceedings of the Royal Society of London, 423:3–16, 1989.

[Mar66] Marden, Moris: *Geometry of polynomials*. American Mathematical Society, Providence, 1966.

[Mil06] Milnor, John: *Dynamics in one complex variable*. Annals of mathematical studies nr. 160, Princeton, 2006.

[Mun75] Munkres, James: *Topology*. Prentic Hall, Englewood Cliffs N.J., 1975.

[Sag91] Sagan, Hans: *Space-Filling curves*. Springer, Berlin, 1991.

[Shi00] Shirali, Satish: *Metric Spaces*. Springer Verlag, Heidelberg, 2000.

[Sim63] Simmons, George: *Topology and modern analysis*. McGraw-Hill Inc. New York, 1963.

[Spr57] Springer, George: *Introduction to Riemann Surfaces*. Addison Wesley, Reading, 1957.

[Ste70] Steen, Lynn: *Counterexamples in topology*. Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1970.

[Tri12] Trimble, Todd: *ncatlab.org*. internet site, 2012.

Ευρετήριο

T_2 χώρος (Hausdorff, 33
T_3 (κανονικός) χώρος, 49
T_4 (φυσιολογικός) χώρος, 49
Άλγεβρα συναρτήσεων, 95
Άλγεβρας θεμελιώδες θεώρημα, 94
Arzela, Ascoli θεώρημα των, 85
Baire θεώρημα κατηγορίας, 47
Banach χώρος, 38
Bolzano-Weierstrass ιδιότητα, 65
Brouwer θεώρημα του, 98
Cantor θεώρημα του, 44
Cantor σύνολο, 10
Cantor σύνολο του, 9
Cauchy ακολουθίες, 37
Gerschgorin δίσκοι, 23
Hamel βάση, 48
Hausdorff χώρος του, 33
Hilbert κύβος του, 90
Jordan θεώρημα του, 101
Jordan καμπύλη του, 101
Klein μποτίλια του, 83
Lipschitz απεικόνιση, 31
Lipschitz σταθερά του, 13
Minkowski ανισότητα, 27
Moebius ταινία του, 83
Norm πινάκων, 69
Peano, καμπύλες του, 92
Schauder βάση, 49
Stone, Weierstrass θεώρημα των, 95
Tietze θεώρημα του, 51
Tychonoff θεώρημα του, 90
Urysohn Θεώρημα του, 50
1-αριθμήσιμος χώρος, 33
1ης κατηγορίας χώρος, 7
2-αριθμήσιμος χώρος, 33
2ης κατηγορίας χώρος, 7

Ανοικτή μπάλα, 2

Ακολουθίες Cauchy, 37
Ακολουθιακά συμπαγής χώρος, 65
Αλγεβρα συναρτήσεων, 95
Αλγεβρική τοπολογία, 19
Ανισότητα του Minkowski, 27
Ανοικτή απεικόνιση, 18
Ανοικτή μπάλα, 25
Ανοικτό σύνολο, 1
Απόσταση από σύνολο, 35
Απόσταση δύο σημείων, 25
Απεικόνιση Lipschitz, 31
Απεικόνιση εκτίμησης, 32
Απειρογινόμενο, 87
Απλό τόξο, 101
Αραιό υποσύνολο, 7
Αριθμός Lebesque κάλυψης, 65

Βάση Schauder, 49
Βάση διανυσματικού χώρου, 48, 73
Βάση τοπολογίας, 3

Διάμετρος μετρικού χώρου, 25
Διάμετρος συνόλου, 65
Διάσταση διανυσματικού χώρου, 73
Διακριτή τοπολογία, 1
Διανυσματικός χώρος με norm, 26
Διαχωρίσιμος χώρος, 67
Διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος, 5
Διαχωρίζει σημεία, άλγεβρα, 95
Διαστήματα του $\mathbb{R}$, 54
Δυαδικό σύστημα, 10, 30

Ειδική γραμμική ομάδα, 71
Ειδική ορθογώνια ομάδα, 71
Εισαγόμενη ή σχετική τοπολογία, 2
Επιφάνειες Riemann, 19
Εσωτερικό συνόλου, 4
Ευθύγραμμο τμήμα, 17, 58

Φραγμένη μετρική, 25, 27
Φραγμένο σύνολο, 25, 65
Φυσιολογικός (T_4) χώρος, 49

Γενική γραμμική ομάδα, 70
Γινόμενο μιγαδικών, 3
Γινόμενο, τοπολογία, 8
Γραμμική απεικόνιση, 32

Ιδιοδιάνυσμα, 69
Ιδιοτιμές πίνακα, 23
Ισοδύναμες norm, 38, 69
Ισοδύναμες μετρικές, 27, 38, 69
Ισομετρία (απεικόνιση), 31
Ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων, 85

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής, 98
Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, 23, 98
Θεώρημα σταθερού σημείου (Banach), 42
Θεώρημα του Baire, 47
Θεώρημα του Brouwer, 98
Θεώρημα του Cantor, 44
Θεώρημα του Jordan, 22, 101
Θεώρημα του Tietze, 51
Θεώρημα του Tychonoff, 90
Θεώρημα του Urysohn, 50
Θεώρημα των Arzela, Ascoli, 85
Θεώρημα των Stone, Weierstrass, 95
Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, 94

Κάλυψη συνόλου, 61
Κύβος του Hilbert, 90
Καμύλη του Peano, 92
Καμπύλες, 17
Καμπύλη σύνθετη, 17
Καμπύλη του Jordan, 101
Κανονικός (T_3) χώρος, 49
Κατά τόξα συνεκτικός χώρος, 59
Κλειστή απεικόνιση, 18
Κλειστή θήκη συνόλου, 5
Κλειστή μπάλα, 25
Κλειστό σύνολο, 4
Κοίλη συνάρτηση, 28
Κουτιά του $\mathbb{R}^n$, 56
Κυλινδρική περιοχή, 63
Κυρτό σύνολο, 58

Μεμονωμένο σημείο συνόλου, 7
Μετρική, 25
Μετρική της norm, 26
Μετρικός χώρος, 25
Μετρικοποιήσιμος χώρος, 26, 89
Μιγαδικές πολυωνυμικές συναρτήσεις, 16
Μιγαδικοί αριθμοί, 3
Μοναδιαία σφαίρα, 21
Μπάλα ανοικτή, 25
Μπάλα κλειστή, 25
Μποτίλια του Klein, 83

Ολικά φραγμένος χώρος, 65
Ολικά μη-συνεκτικός χώρος, 56
Ομάδα ειδική ορθογώνια, 71
Ομάδα ορθογώνια, 71
Ομάδα τοπολογική, 70
Ομοιόμορφα συνεχής απεικόνιση, 65, 68
Ομοιότητα (απεικόνιση), 31
Ομοιομορφισμός, 12, 62
Ομοιομορφισμός τοπικός, 12
Ομοπαραλληλία, 22
Ορθογώνια ομάδα, 71

Παραμέτρηση καμπύλης, 17
Περιοχή ενός σημείου, 5
Πηλίκον τοπολογία, 81
Πισωτράβηγμα μετρικής, 32
Πλήρης μετρικός χώρος, 38
Πλήρωση μετρικού χώρου, 41
Πολυγωνική γραμμή, 17
Πολυωνυμικές συναρτήσεις, 16
Προβολές τους καρτεσιανού γινομένου, 13
Προβολικός χώρος, 84
Πρωτοβάθμια πολυώνυμα, 13
Πυκνό υποσύνολο τοπολογικού χώρου, 5

Χώρος Banach, 38
Χώρος Hausdorff, 50
Χώρος των φραγμένων συναρτήσεων, 29

Ρίζες πολυωνύμων, 23
Ρητές συναρτήσεις, 17

Σύνθετη καμπύλη, 17
Σύνορο συνόλου, 6
Σφαίρα μετρικού χώρου, 25
Σπείρα, 82
Σχετικά συμπαγές σύνολο, 75
Σχετική ή εισαγόμενη τοπολογία , 2
Σχετική τοπολογία, 2
Σταθερά Lipschitz, 31
Στερεογραφική προβολή, 20
Συμπαγές σύνολο, 61
Συμπαγής τοπικά χώρος, 75
Συμπαγοποίηση, 75
Συμπαγοποίηση ενός σημείου, 75
Συμπαγοποίηση μιγαδικού επιπέδου, 38
Συνήθης τοπολογία του $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$, 2
Συνεκτικές συνιστώσες, 56
Συνεκτική συνιστώσα, 59
Συνεκτικός χώρος, 53
Συνεκτικότητα κατά τόξα, 59
Συνεχής απεικόνιση, 12
Συνιστώσες συνεκτικές, 56
Συστολή (απεικόνιση), 31
Συζυγής μιγαδικού αριθμού, 3

Τέλειο υποσύνολο, 7
Τόξο ή δρόμος, 59
Ταύτισης τοπολογία, 79
Ταινία του Moebius, 83
Ταυτοτική απεικόνιση, 13
Τεθλασμένη γραμμή, 17
Τετριμμένη τοπολογία, 1
Τοπικά σταθερή συνάρτηση, 53
Τοπικά συμπαγής, 48
Τοπικά συμπαγής χώρος, 75
Τοπικός ομοιομορφισμός, 12, 22
Τοπολογία γινόμενο, 8, 56, 79
Τοπολογία παραγόμενη από υποσύνολα, 3
Τοπολογία πηλίκον, 81
Τοπολογία ταύτισης, 79
Τοπολογική αναλλοίωτος, 12
Τοπολογική ομάδα, 70
Τοπολογική υποομάδα, 71
Τοπολογικός χώρος, 1
Τριαδικό σύστημα, 10
Τριγωνική ανισότητα, 25

Υπερμετρική, 31, 45
Υποάλγεβρα συναρτήσεων, 95
Υποβάση τοπολογίας, 3
Υποκάλυψη κάλυψης, 61
Υποομάδα τοπολογική, 71