Πανεπιστημιο Κρητης -- Τμημα Μαθηματικων & Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Αλγεβρα Ι

Ν.Γ. Τζανάκης

Εξεταστική Περίοδος Σεπτεμβρίου : 26/8/2016

Σειραϊκός Αριθμός : **497**

Απαντήσεις εδώ: 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8: 9: 10:

Όνομα, Α.Μ:

Ερώτηση 1: Ερώτηση: Η αντιστοιχία $\mathbb{Z}_m \ni [x]_m \stackrel{f}{\mapsto} [x]_n \in \mathbb{Z}_n$ είναι ομομορφισμός ομάδων όταν $m = 12$ και $n = 72$, ή όταν $m = 72$ και $n = 12$; Αποφασίστε ποια επιλογή είναι η σωστή (είναι ακριβώς μία από τις δύο), δίχως να τη γράψετε στο φύλλο απαντήσεων. Στη συνέχεια, έστω $\operatorname{Ker} f = \{[x_1]_m, [x_2]_m, \ldots\}$, όπου $0 \le x_i < m$ για $i = 1, 2, \ldots$. Τότε, το άθροισμα $x_1 + x_2 + \cdots$ ισούται με

A: 160 B: 180 C: 96 D: 90 E: 0 F: 144

Ερώτηση 2: Εξετάστε μία-μία τις προτάσεις: (a): Ο μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $3\mathbb{Z} \to 4\mathbb{Z}$ είναι ο μηδενικός, δηλαδή αυτός που στέλνει κάθε στοιχείο του $3\mathbb{Z}$ στο $0 \in 4\mathbb{Z}$. (b): Μπορούμε να βρούμε ομάδα G τάξεως 40 και μονομορφισμό ομάδων $f : \mathbb{Z}_{14} \to G$. ($c$): Η υποομάδα $\langle \zeta \rangle$ της ομάδας $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, όπου $\zeta = \cos\frac{2\pi}{14} + i \sin\frac{2\pi}{14}$ είναι ισόμορφη με την ομάδα $(\mathbb{Z}_{14}, +)$. (d): Η τάξη κάθε στοιχείου της ομάδας $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{14}$ είναι, το πολύ 42. (e): Η ομάδα $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{14}$ είναι κυκλική.

Για κάθε πρόταση $p \in \{a, b, c, d, e\}$, έστω $t(p) = 1$ αν η p είναι αληθής και $t(p) = -1$ αν η p είναι ψευδής. Τότε η τιμή της παράστασης $7t(a) - 9t(b) + 11t(c) - 31t(d) + 13t(e)$ είναι

A: 9 B: −17 C: 45 D: −35 E: −31 F: −39

Ερώτηση 3: Αναλύστε το $f(X) = X^4 + [3]X^3 + [4]X^2 + [4] \in \mathbb{Z}_5[X]$ σε γινόμενο ανάγωγων μονικών πολυωνύμων του $\mathbb{Z}_5[X]$ και έστω $g(X)$ το ανάγωγο με τον μεγαλύτερο βαθμό. Αν $g([1]) = [a]$ και $g([2]) = [b]$, όπου $0 \le a, b < 5$, τότε ο ακέραιος $7a - 13b$ ισούται με

A: 21 B: 1 C: −31 D: −12 E: −19 F: −32

Ερώτηση 4: Έστω $\pi = (6\ 7\ 5\ 2)(1\ 2\ 10\ 3)(1\ 9\ 5\ 4)(8\ 5\ 3\ 1) \in S_{10}$ και $\tau = (6\ 7\ 5\ 2)(1\ 2\ 10\ 3) \in S_{10}$. Υπολογίστε τους $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ ως εξής: $a = \textit{τάξη}\,((8\ 5\ 3\ 1)^{-1})$, $b = \textit{τάξη}\,(\tau)$, $c = \textit{τάξη}\,(\pi)$, $d = 2$ αν η π είναι άρτια και $d = 1$ αν η π είναι περιττή. Τότε η τιμή της παράστασης $47a - 41b + 31c + 13d$ είναι

A: 205 B: 175 C: 286 D: 299 E: 134 F: 216

Ερώτηση 5: Σ' αυτό το θέμα, R είναι η ομάδα των τετρανίων: $R = \langle r, s : r^4 = 1, s^2 = r^2 \neq 1, sr = r^3 s\rangle$ και θεωρήστε γνωστό ότι $R = \{1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2 s, r^3 s\}$. Εξετάστε μία-μία τις προτάσεις:

(a): $r^2 s = s^3 = sr^2$. (b): R είναι αβελιανή. (c): $R \cong \mathbb{Z}_8$. (d): $\langle r^2 \rangle \lhd R$. ($e$): $R \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$. ($f$): $|\langle rs \rangle| = 4$.

Για κάθε πρόταση $p \in \{a, b, c, d, e, f\}$, έστω $t(p) = 1$ αν η p είναι αληθής και $t(p) = -1$ αν η p είναι ψευδής. Τότε η τιμή της παράστασης $17t(a) - 11t(b) + 13t(c) + 19t(d) + 41t(e) - 7t(f)$ είναι

A: 68 B: −14 C: 0 D: −36 E: −52 F: 12

Ερώτηση 6: Θεωρήστε τις ομάδες $(\mathbb{Z}_{50}^*, \cdot)$ και $(\mathbb{Z}_{90}, +)$. Για την πρώτη ομάδα δίδεται, επιπλέον, η πληροφορία ότι είναι κυκλική με γεννήτορα το $[3]_{50}$. Έστω $a = \textit{τάξη}\,([31]_{50})$ (υπόδειξη: εκφράστε το $[31]_{50}$ συναρτήσει του γεννήτορα της ομάδας) και $b = \textit{τάξη}\,([63]_{90})$. Τότε, η τιμή της παράστασης $23a - 19b$ είναι

A: −1105 B: −75 C: −1082 D: −98 E: 523 F: 155

Ερώτηση 7: Το υπόλοιπο της διαίρεσης του 163^{69} δια 160 ισούται με

A: 81 B: 62 C: 83 D: 107 E: 15 F: 9

Ερώτηση 8: Θεωρήστε τα πολυώνυμα του $\mathbb{Q}[X]$, $G_1(X) = \sum_{i=0}^{15}(2i)X^i = 0 + 2X + 4X^2 + 6X^3 + \cdots + 30X^{15}$ και $G_2(X) = \sum_{i=0}^{20} iX^i = 0 + X + 2X^2 + 3X^3 + \cdots + 20X^{20}$. Τότε, ο συντελεστής του X^7 στο πολυώνυμο $G_1(X)G_2(X)$ είναι
A: 24 *B*: 20 *C*: 44 *D*: 32 *E*: 168 *F*: 112

Ερώτηση 9: Σ' αυτό το θέμα, όλα τα γράμματα συμβολίζουν ακέραιους αριθμούς. Εξετάστε τις παρακάτω συνεπαγωγές: (1) $a^n|b^n$ & $n \geq 1 \Rightarrow a|b$. (2) $a|b^n$ & $n \geq 1 \Rightarrow a|b$. (3) p πρώτος & $p^3|a^2 \Rightarrow p^4|a^2$. (4) $a|c$ & $b|c \Rightarrow ab|c$. (5) $(a, b) = 1$ & $n, k \geq 1 \Rightarrow (a^n, b^k) = 1$.
Τρεις, ακριβώς, από αυτές είναι αληθείς. Αυτές είναι οι
A: (2),(3),(5). *B*: (1),(3),(4). *C*: (1),(3),(5). *D*: (1),(4),(5). *E*: (2),(4),(5). *F*: (1),(2),(4).

Ερώτηση 10: Εξετάστε μία-μία τις προτάσεις: (a): Το στοιχείο [121] του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{310}$ είναι μονάδα του δακτυλίου αυτού. (b): Το πλήθος των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{190}$ είναι διαιρέτης του 145. (c): Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_{61}$ είναι σώμα. (d): Υπάρχουν πολυώνυμα $f(X), g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ τέτοια ώστε $(X^3 - 2X + 6)f(X) + (X^2 + 5X - 10)g(X) = 1$. ($e$): Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_{2014}$ είναι ακέραια περιοχή. (f): Υπάρχει δευτεροβάθμιο πολυώνυμο στο $\mathbb{Z}_{21}[X]$ με τρεις τουλάχιστον ρίζες.
Για κάθε πρόταση $p \in \{a, b, c, d, e, f\}$, έστω $t(p) = 1$ αν η p είναι αληθής και $t(p) = -1$ αν η p είναι ψευδής. Τότε η τιμή της παράστασης $12t(a) - 13t(b) - 11t(c) + 43t(d) - 47t(e) + 53t(f)$ είναι
A: 51 *B*: 71 *C*: 63 *D*: 157 *E*: 131 *F*: 133

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες, με κλειστές σημειώσεις. Οι συνολικές μονάδες είναι 10, με άριστα το 10 και βάση το 5. Κάθε σωστή απάντηση παίρνει 1, καθόλου απάντηση παίρνει 0 και λανθασμένη απάντηση μετράει αρνητικά -0.2 Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. **Φύλλο με 5 θέματα σωστά και 2 θέματα λάθος θα βαθμολογηθεί με 5**. Καλή επιτυχία!