Αλγεβρα Ι

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινὸ ἑξάμηνο 2015-2016

Βασικὴ περιγραφὴ τῶν θεμάτων ποὺ συζητήθηκαν τὴν 12^{η} ἑβδομάδα
(Δὲν πρόκειται γιὰ λεπτομερῆ περιγραφή.)

• **Πρόταση - Ὁρισμός 1.** *Ἔστω H ὑποομάδα τῆς ὁμάδας G. Τὸ σύνολο τῶν ἀριστερῶν κλάσεων ὡς πρὸς H εἶναι ἰσοπληθὲς μὲ τὸ σύνολο τῶν δεξιῶν κλάσεων ὡς πρὸς H. Ὁ κοινὸς πληθικὸς ἀριθμός τους λέγεται "δείκτης τῆς H" στὴ G καὶ συμβολίζεται $[G : H]$.*

• **Θεώρημα 2** (Lagrange)**.** *Ἂν ἡ H εἶναι ὑποομάδα τῆς πεπερασμένης ὁμάδας G, τότε $|G| = |H|[G : H]$. Εἰδικώτερα, αὐτὸ συνεπάγεται ὅτι ἡ τάξη κάθε ὑποομάδας τῆς G διαιρεῖ τὴν τάξη τῆς G.*

• **Ὁμομορφισμοὶ Ὁμάδων**. Εἰδικώτερα: Μονομορφισμοί, ἐπιμορφισμοί, ἰσομορφισμοί.

• **Πρόταση 3.** *Ἂν $\phi : G \to G'$ εἶναι ὁμομορφισμὸς ὁμάδων, τότε ἰσχύουν τὰ ἑξῆς (θεωροῦμε ὅτι οἱ πράξεις τῶν ὁμάδων συμβολίζονται μὲ πολλαπλασιασμό):*
(α΄) $\phi(1_G) = 1_{G'}$.
(β΄) $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$ *γιὰ κάθε* $a \in G$.
(γ΄) Ἂν $H \leq G$, τότε $\phi(H) \leq G'$. Εἰδικώτερα, γιὰ $H = G$ ἔχομε ὅτι $\mathrm{Im}\phi = \phi(G) \leq G'$.
(δ΄) Ἂν $H' \leq G'$, τότε $\phi^{-1}(H') \leq G$. Εἰδικώτερα, γιὰ $H' = \{1_{G'}\}$, ἔχομε ὅτι

$$\ker\phi = \{a \in G \,:\, \phi(a) = 1_{G'}\} = \phi^{-1}(1_{G'}) \leq G.$$

Ἡ ὑποομάδα $\ker\phi$ τῆς G λέγεται "πυρήνας τῆς ϕ".
(ε΄) $\ker\phi$ εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα τῆς G.

Συμβολισμός: Ἂν G, G' εἶναι ὁμάδες καὶ ὑπάρχει ἰσομορφισμὸς $\phi : G \to G'$, τότε γράφομε $G \cong G'$.

• **Πρόταση 4.** *(α΄) Ἂν $\phi : G \to G'$ καὶ $\psi : G' \to G''$ εἶναι ἰσομορφισμοὶ ὁμάδων, τότε $\psi \circ \phi : G \to G''$ εἶναι ἰσομορφισμὸς ὁμάδων.*
(β΄) Ἂν $\phi : G \to G'$ εἶναι ἰσομορφισμὸς ὁμάδων, τότε $\phi^{-1} : G' \to G$ εἶναι ἰσομορφισμὸς ὁμάδων.
(γ΄) Σ' ἕνα μὴ κενὸ σύνολο ὁμάδων, ἡ σχέση $\cong$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

• **Πρόταση 5.** *Ἔστω κυκλικὴ (πολλαπλασιαστικὴ) ὁμάδα* $G = \langle g \rangle$.
(α΄) Κάθε ὑποομάδα τῆς G *εἶναι κυκλική.*
(β΄) Ἂν $|G| = n$ *καὶ* d *εἶναι θετικὸς διαιρέτης τοῦ* n*, τότε, ἡ μία καὶ μοναδικὴ ὑποομάδα τῆς* G *τάξεως* d *εἶναι ἡ* $\langle g^{n/d} \rangle$.
(γ΄) Ἂν ἡ G *εἶναι ἄπειρη, τότε* $G \cong \mathbb{Z}$.
(δ΄) Ἂν $|G| = n$*, τότε* $G \cong \mathbb{Z}_n$.

Συνδυάζοντας τὶς Προτάσεις 4 (δ΄) καὶ 5 (δ΄), συμπεραίνομε:

• **Πόρισμα 6.** *Δύο κυκλικὲς ὁμάδες μὲ τὴν ἴδια τάξη εἶναι ἰσόμορφες.*

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ έκδοση, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.