Αλγεβρα I

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινὸ ἑξάμηνο 2015-2016

Βασικὴ περιγραφὴ τῶν θεμάτων ποὺ συζητήθηκαν τὴν 6^{η} ἑβδομάδα

(Δὲν πρόκειται γιὰ λεπτομερῆ περιγραφή.)

• **Ὁρισμοὶ-Συμβολισμοί**: Ἂν ὁ R εἶναι δακτύλιος μὲ μοναδιαῖο, ἔστω 1_R, τότε τὸ σύνολο τῶν ἀντιστρέψιμων στοιχείων τοῦ R συμβολίζεται μὲ R^*. Τὰ ἀντιστρέψιμα στοιχεῖα τοῦ R (δηλαδή, τὰ στοιχεῖα τοῦ R^*) λέγονται καὶ *μονάδες* τοῦ R. Ἄρα, τὸ νὰ ποῦμε ὅτι τὸ $a \in R$ εἶναι μονάδα τοῦ R ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ ποῦμε ὅτι τὸ a εἶναι ἀντιστρέψιμο στοιχεῖο τοῦ R. Προσοχή! Τὸ μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ R εἶναι μονάδα, ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφο δὲν ἰσχύει, ἐν γένει. Γιὰ παράδειγμα, στὸν δακτύλιο $\mathbb{Z}_{12}$, τὸ μοναδιαῖο στοιχεῖο εἶναι τὸ $[1]$, ἀλλὰ τὸ σύνολο τῶν μονάδων (= το σύνολο τῶν ἀντιστρέψιμων στοιχείων) εἶναι τὸ $\mathbb{Z}_{12}^* = \{[1], [5], [7], [11]\}$. Ἂν $a \in R^*$, τὸ ἀντίστροφό του συμβολίζεται a^{-1} καί, προφανῶς, $a^{-1} \in R^*$.

• **Ὑποδακτύλιος**. Ἔστω R δακτύλιος καὶ $\emptyset \neq S \subseteq R$. Τὸ S εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ R ἂν, ἐφοδιασμένο μὲ τὶς πράξεις τοῦ R, εἶναι καὶ αὐτὸ δακτύλιος.

• **Πρόταση 1** (Κριτήριο ὑποδακτυλίου). *Ἔστω δακτύλιος R καὶ $\emptyset \neq S \subseteq R$. Τὸ S (μὲ τὶς πράξεις τοῦ R) εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ R ἂν καὶ μόνο ἂν ἰσχύουν οἱ ἑξῆς δύο συνθῆκες γιὰ τὸ S: (α΄) Γιὰ ὅλα τὰ $a, b \in S$ εἶναι καὶ $a - b \in S$. (β΄) Γιὰ ὅλα τὰ $a, b \in S$ εἶναι καὶ $a \cdot b \in S$.*

• **Προσθετικὴ καὶ πολλαπλασιαστικὴ ἐπανάληψη στοιχείου**: Ἔστω δακτύλιος R. Γιὰ $a \in R$ καὶ $m \in \mathbb{Z}$ ὁρίζομε:

$$ma = \begin{cases} \underbrace{a + \cdots + a}_{m} & \text{ἂν } m > 0 \\ 0_R & \text{ἂν } m = 0 \\ \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{|m|} & \text{ἂν } m < 0 \end{cases}$$

Ἂν $m > 0$, ὁρίζομε ἐπίσης

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m}.$$

Ἂν ὁ R ἔχει μοναδιαῖο, ἔστω 1_R, τότε ὁ ἀμέσως παραπάνω ὁρισμὸς ἐπεκτείνεται καὶ στὸν ἐκθέτη 0, δηλαδή, $a^0 = 1_R$.

• **Πρόταση 2.** *Ἔστω δακτύλιος R, $a, b \in R$ καὶ $m, n \in \mathbb{Z}$. Τότε ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:*

- $(m + n)a = ma + na$.
- $m(a + b) = ma + mb$.
- $(ma) \cdot (nb) = (mn)(a \cdot b)$.
- $m(a \cdot b) = (ma) \cdot b = a \cdot (mb)$.
- $(-m)a = m(-a) = -(ma)$.
- *Ἂν* $m, n \geq 1$, *τότε* $(a^m)^n = a^{mn}$ *καὶ* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

• ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

• **Θεώρημα 3.** *Ἔστω δακτύλιος R μὲ μοναδιαῖο. Ὑπάρχει δακτύλιος P μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:*

1. *R εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ P.*
2. *Τὸ μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ R εἶναι καὶ μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ P.*
3. *Ὑπάρχει στοιχεῖο $X \in P$ μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:*
   - *(α΄)* $r \cdot X = X \cdot r$ *γιὰ κάθε* $r \in R$.
   - *(β΄) Γιὰ κάθε στοιχεῖο $p \in P$ ὑπάρχει ἀκέραιος $n \geq 0$ καὶ $r_0, \ldots, r_n \in R$ τέτοια ὥστε $p = r_0 + r_1 \cdot X + \cdots + r_n \cdot X^n$. Γιὰ ἁπλούστευση τοῦ συμβολισμοῦ γράφομε πιὸ ἁπλᾶ: $p = r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n$*
   - *(γ΄) Ἂν $r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n = s_0 + s_1X + \cdots + s_mX^m$, ὅπου τὰ r_i καὶ τὰ s_j ἀνήκουν στὸ R καὶ $r_n \neq 0$, $s_m \neq 0$, τότε $n = m$ καὶ $s_i = r_i$ γιὰ κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$.*

• **Ὁρισμοὶ-Συμβολισμοί**:

- Τὸ στοιχεῖο $X \in P$ ὀνομάζεται *μεταβλητή*, τὰ στοιχεῖα τοῦ P λέγονται *πολυώνυμα πάνω ἀπὸ τὸν R μεταβλητῆς X* καὶ ὁ δακτύλιος P ὀνομάζεται δακτύλιος τῶν *πολυωνύμων πάνω ἀπὸ τὸν R μεταβλητῆς X* καὶ συμβολίζεται $R[X]$ (ὄχι $R(X)$). Τὰ στοιχεῖα τοῦ P συμβολίζονται $f(X), g(X), h(X), \ldots$.

- Ἂν $f(X) = r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n$ καὶ $r_n \neq 0_R$, τότε λέμε ὅτι *ὁ βαθμὸς τοῦ* $f(X)$ *εἶναι* n καὶ γράφομε $\deg f(X) = n$. Τὰ πολυώνυμα στὰ ὁποῖα δὲν ἐμφανίζεται τὸ X, δηλαδή, εἶναι τῆς μορφῆς r_0 μὲ $r_0 \in R$, χαρκατηρίζονται *σταθερὰ πολυώνυμα*. Τὸ 0_R εἶναι τὸ *μηδενικὸ πολυώνυμο*. Τὰ μὴ μηδενικὰ σταθερὰ πολυώνυμα ἔχουν βαθμὸ 0. Γιὰ τὸ μηδενικὸ πολυώνυμο ὁρίζομε, συμβολικά, $\deg 0_R = -\infty$ καί, συμβατικά, δεχόμαστε ὅτι $-\infty < n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή, ἡ σχέση $\deg f(X) = -\infty$ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν $f(X) = 0_R$.

- Ἕνας "συμπαγὴς" τρόπος γραφῆς τῶν πολυωνύμων εἶναι: $\sum_{i=0}^{\infty} r_iX^i$, ὅπου ἐννοεῖται ὅτι *πεπερασμένο, τὸ πολύ, πλῆθος ἐκ τῶν* r_i *εἶναι μὴ μηδενικά.* Πρακτικὴ χρησιμότητα αὐτοῦ τοῦ τρόπου γραφῆς:

  - Ἂν $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} r_iX^i$ καὶ $g(X) = \sum_{i=0}^{\infty} s_iX^i$, τότε ἡ σχέση $f(X) = g(X)$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴ σχέση $r_i = s_i$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots$.
  - Ἂν $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} r_iX^i$, τότε $\deg f(X) =$ μέγιστος δείκτης i γιὰ τὸν ὁποῖον $r_i \neq 0_R$.
  - Μποροῦμε νὰ ἐκφράσομε μὲ τύπο τοὺς συντελεστὲς τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων. Ἂν $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} r_iX^i$ καὶ $g(X) = \sum_{i=0}^{\infty} s_iX^i$, τότε

$$\begin{aligned} f(X) + g(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} (r_i + s_i)X^i \\ f(X) \cdot g(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} t_iX^i, \quad t_i = r_0s_i + r_1s_{i-1} + \cdots + r_{i-1}s_1 + r_is_0 = \sum_{\substack{i,\, j \geq 0 \\ j+k=i}} r_js_k. \end{aligned}$$

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ έκδοση, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.