Πανεπιστημιο Κρητης -- Τμημα Μαθηματικων & Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Αλγεβρα Ι
Ν.Γ. Τζανάκης
Εξεταστική Περίοδος Ιανουαρίου 2016: 13/1/2016

Σειραϊκός Αριθμός : **599**,
Απαντήσεις εδώ: 1: 2: 3: 4: 5: 6:
Όνομα, Α.Μ:

Ερώτηση 1: Αναλύστε το $f(X) = X^4 + [4]X^3 + [4]X^2 + X + [4] \in \mathbb{Z}_7[X]$ σε γινόμενο ανάγωγων μονικών πολυωνύμων του $\mathbb{Z}_7[X]$ και έστω $g(X)$ το ανάγωγο με τον μεγαλύτερο βαθμό. Αν $g([2]) = [a]$ και $g([3]) = [b]$, όπου $0 \leq a, b < 7$, τότε ο ακέραιος $a^2 + b^2$ ισούται με
A: 34 B: 52 C: 29 D: 17 E: 25 F: 11

Ερώτηση 2: Σ' αυτό το θέμα, $\pi = (2\,8\,1\,4)(1\,5\,8\,6)(2\,6)(8\,4) \in S_8$ και $\rho = (3\,7) \in S_8$. Επίσης, $\sigma = (1\,2\,3), \tau = (1\,4) \in S_4$. Υπολογίστε τους $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ ως εξής :
$a = \textit{τάξη}\,(\pi)$,
$b = \textit{τάξη}\,(\pi^{-1})$,
$c = 1$ αν $\rho\pi\rho\pi\rho = \rho\pi^2$ και $c = -1$ αν $\rho\pi\rho\pi\rho \neq \rho\pi^2$,
$d = 2$ αν η π είναι άρτια και $d = 1$ αν η π είναι περιττή,
$e = \sigma\tau\sigma^2(2)$.
Τότε η τιμή της παράστασης $-29a + 43b + 31c - 13d - 23e$ είναι
A: -31 B: 36 C: 21 D: 93 E: 48 F: -20

Ερώτηση 3: Με U_n συμβολίζομε την πολλαπλασιαστική ομάδα των n-οστών μιγαδικών ριζών της μονάδος. Έστω $U_{80} = \langle\zeta\rangle$ και $a = \textit{τάξη}\,(\zeta^{64})$. Επίσης, στην προσθετική ομάδα $\mathbb{Z}_{120}$, έστω $b = \textit{τάξη}\,([68])$. Τότε ο ακέραιος $7a + 5b$ είναι ίσος με
A: 206 B: 110 C: 135 D: 235 E: 85 F: 185

Ερώτηση 4: Διαπιστώστε ότι κάθε μία από τις πολλαπλασιαστικές ομάδες $\mathbb{Z}_{10}^*$ και $\mathbb{Z}_{14}^*$ είναι κυκλική. Έστω $[a]_{10}$ και $[b]_{14}$ οι γεννήτορες των $\mathbb{Z}_{10}^*$ και $\mathbb{Z}_{14}^*$, αντιστοίχως, με τους ελάχιστους δυνατούς θετικούς ακεραίους a και b. Θεωρήστε την ομάδα $\mathbb{Z}_{10}^* \times \mathbb{Z}_{14}^*$ και το στοιχείο της $([a]_{10}, [b]_{14})$. Έστω $([a]_{10}, [b]_{14})^5 = ([c]_{10}, [d]_{14})$, όπου $1 \leq c < 10$ και $1 \leq d < 14$.
Τότε ο ακέραιος $13c - 11d$ ισούται με
A: 62 B: 36 C: -16 D: 10 E: 6 F: -60

Ερώτηση 5: Εξετάστε τις προτάσεις :
(**Π**$_1$): Η αντιστοιχία $\mathbb{Z}_{14} \ni [a] \mapsto [2a] \in \mathbb{Z}_{14}$ ορίζει ομομορφισμό ομάδων.
(**Π**$_2$): Η αντιστοιχία $\mathbb{Z}_{14} \ni [a]_{14} \mapsto [a]_{28} \in \mathbb{Z}_{28}$ ορίζει ομομορφισμό ομάδων.
(**Π**$_3$): Αν η ομάδα G έχει τάξη m και $\phi : G \to \mathbb{Z}_{14}$ είναι μονομορφισμός ομάδων, τότε $m|14$.
(**Π**$_4$): Η αντιστοιχία $\mathbb{Z}_{28} \ni [a]_{28} \mapsto [a]_{14} \in \mathbb{Z}_{14}$ ορίζει ομομορφισμό ομάδων.
(**Π**$_5$): Η αντιστοιχία $\mathbb{Z}_{14} \ni [a] \mapsto [2a] \in \mathbb{Z}_{14}$ ορίζει ομομορφισμό δακτυλίων.
(**Π**$_6$): Αν η ομάδα G έχει τάξη m και ο ομομορφισμός $\phi : G \to \mathbb{Z}_{14}$ δεν είναι μονομορφισμός, τότε το πλήθος των $g \in G$ για τα οποία είναι $\phi(g) = [0]$, διαιρεί το m.
Για κάθε $i = 1, \ldots, 6$ θέσετε $x_i = 1$ αν η (**Π**$_i$) είναι αληθής και $x_i = -1$ αν η (**Π**$_i$) είναι ψευδής. Τότε η τιμή της παράστασης $22x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 11x_5 - 13x_6$ ισούται με
A: 1 B: -29 C: -1 D: -9 E: 3 F: -51

Ερώτηση 6: Έστω η διεδρική ομάδα βαθμού 4: $D_4 = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b\rangle$ και η υποομάδα της $H = \langle ab\rangle$. Εξετάστε τις προτάσεις :
(**Π**$_1$): $D_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.
(**Π**$_2$): $D_4 \cong \mathbb{Z}_8$.
(**Π**$_3$): Ο δείκτης της H στην D_4 είναι 4.
(**Π**$_4$): Η δεξιά και η αριστερή κλάση του a^2 ως προς την H είναι ίσες.
(**Π**$_5$): $H \lhd D_4$ (κανονική υποομάδα).
Για κάθε $i = 1, \ldots, 5$ θέσετε $x_i = 1$ αν η (**Π**$_i$) είναι αληθής και $x_i = -1$ αν η (**Π**$_i$) είναι ψευδής. Τότε η τιμή της παράστασης $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 11x_5$ ισούται με
A: 4 B: -12 C: 6 D: -2 E: 10 F: -14

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 70′, με κλειστές σημειώσεις. Οι συνολικές μονάδες είναι 10, με άριστα το 10 και βάση το 5. Κάθε σωστή απάντηση μετράει 10/6=5/3, καθόλου απάντηση μετράει 0 και λανθασμένη απάντηση μετράει αρνητικά -1/3 Άρα, αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των μονάδων που θα πετύχετε είναι 0. Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. Καλή επιτυχία!