Πανεπιστημιο Κρητησ -- Τμημα Μαθηματικων & Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Αλγεβρα I
Ν.Γ. Τζανάκης
Πρόοδος - 6/11/2015

Σειραϊκός Αριθμός : **599**,
Απαντήσεις εδώ: 1: 2: 3: 4: 5: 6:
Όνομα, Α.Μ:

Ερώτηση 1: Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{10}$ υπολογίστε όλες τις (διαφορετικές) λύσεις $[x_1], [x_2], \ldots$ $(0 \le x_i < 10,\ \forall i)$ της εξίσωσης $([x]+[3])([x]+[4]) = [0]$. Τότε ο ακέραιος $x_1 + x_2 + \cdots$ ισούται με
A: 22. B: 16. C: 15. D: 13. E: 14. F: 18.

Ερώτηση 2: Εξετάστε τις προτάσεις : $(\mathbf{\Pi}_1)$: Το στοιχείο $3+2\sqrt{2}$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathbb{Z}\}$ είναι μονάδα. $(\mathbf{\Pi}_2)$: Το υποσύνολο $S = \{2a+b\sqrt{3} : a,b \in \mathbb{Z}\}$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a+b\sqrt{3} : a,b \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. $(\mathbf{\Pi}_3)$: Στο $\mathbb{R}$, η πράξη $*$, που ορίζεται: $a*b = ab^2$, είναι προσεταιριστική. $(\mathbf{\Pi}_4)$: Σε κάθε δακτύλιο ισχύει η ταυτότητα $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$. $(\mathbf{\Pi}_5)$: Έστω μη μεταθετικός δακτύλιος $(A,+,\cdot)$. Στον A, η νέα πράξη $*$, που ορίζεται: $a*b = a+b+a\cdot b$, είναι προσεταιριστική. $(\mathbf{\Pi}_6)$: Το σύνολο $S = \{a/2^n : a \in \mathbb{Z}, n \ge 0\}$ είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$ και περιέχει άπειρες μονάδες.
Τότε:
A: Η $\mathbf{\Pi}_1$, η $\mathbf{\Pi}_5$ και η $\mathbf{\Pi}_6$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις. B: Η $\mathbf{\Pi}_2$, η $\mathbf{\Pi}_3$ και η $\mathbf{\Pi}_5$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις.
C: Η $\mathbf{\Pi}_1$, η $\mathbf{\Pi}_2$ και η $\mathbf{\Pi}_5$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις. D: Η $\mathbf{\Pi}_3$, η $\mathbf{\Pi}_5$ και η $\mathbf{\Pi}_6$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις.
E: Η $\mathbf{\Pi}_3$, η $\mathbf{\Pi}_4$ και η $\mathbf{\Pi}_6$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις. F: Η $\mathbf{\Pi}_1$, η $\mathbf{\Pi}_2$ και η $\mathbf{\Pi}_4$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις.

Ερώτηση 3: Έστω ο θετικός ακέραιος $x < 35$, που ικανοποιεί συγχρόνως τις ισοτιμίες $x \equiv 2 \pmod 5$ και $x \equiv 1 \pmod 7$. Έστω ο θετικός ακέραιος $y < 17$, που ικανοποιεί τη σχέση $x^2 \equiv y \pmod{17}$. Τότε
A: $y = 4$. B: $y = 9$. C: $y = 13$. D: $y = 11$. E: $y = 16$. F: $y = 8$.

Ερώτηση 4: Το υπόλοιπο της διαίρεσης του 473^{362} δια 450 ισούται με
A: 13. B: 401. C: 79. D: 321. E: 65. F: 287.

Ερώτηση 5: Εξετάστε τις προτάσεις : $(\mathbf{\Pi}_1)$: Αν ο p είναι πρώτος, $a,n \in \mathbb{N}$ και $p|a^n$ τότε $p^n|a^n$. $(\mathbf{\Pi}_2)$: Αν $n > 1$ και $(3,n) = 1$, τότε $\phi(3n) = 2\phi(n)$. $(\mathbf{\Pi}_3)$: Υπάρχει ακέραιος a, τέτοιος ώστε η διαίρεση του a^3 δια 7 ν' αφήνει υπόλοιπο 4. $(\mathbf{\Pi}_4)$: Αν $a|c$ και $b|c$ τότε $ab|c$. $(\mathbf{\Pi}_5)$: Αν $a,b,n \in \mathbb{N}$ και $a|b^n$, τότε $a|b$. $(\mathbf{\Pi}_6)$: Αν $m > 1$ και $[a],[b] \in \mathbb{Z}_m$, με $[a] \ne [b]$, τότε ή εξίσωση $([x]-[a])([x]-[b]) = [0]$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_m$. $(\mathbf{\Pi}_7)$: Για κάθε ακέραιο n ισχύει $(2n+3, 6n+10) = 1$. $(\mathbf{\Pi}_8)$: Αν ο n είναι περιττός, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του n^2 δια 8 είναι 1. $(\mathbf{\Pi}_9)$: Το ελάχιστο θετικό στοιχείο του συνόλου $\{26x+34y : x,y \in \mathbb{Z}\}$ είναι το 2.
Τότε:
A: Η $\mathbf{\Pi}_6$, η $\mathbf{\Pi}_7$ και η $\mathbf{\Pi}_8$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις. B: Η $\mathbf{\Pi}_4$, η $\mathbf{\Pi}_5$ και η $\mathbf{\Pi}_9$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις.
C: Η $\mathbf{\Pi}_1$, η $\mathbf{\Pi}_2$ και η $\mathbf{\Pi}_7$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις. D: Η $\mathbf{\Pi}_1$, η $\mathbf{\Pi}_3$ και η $\mathbf{\Pi}_6$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις.
E: Η $\mathbf{\Pi}_4$, η $\mathbf{\Pi}_8$ και η $\mathbf{\Pi}_9$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις. F: Η $\mathbf{\Pi}_5$, η $\mathbf{\Pi}_6$ και η $\mathbf{\Pi}_8$ είναι **και οι τρεις** αληθείς προτάσεις.

Ερώτηση 6: Στο $\mathbb{Z}_{17}$ έστω $[5]^{-1} = [a]$, όπου $0 \le a \le 16$. Έστω ο ακέραιος $b \in \{0,1,\ldots,19\}$ για τον οποίο $ab \equiv 2 \pmod{20}$. Τότε,
A: $b = 10$. B: $b = 6$. C: $b = 14$. D: $b = 11$. E: $b = 7$. F: $b = 8$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 70′, με κλειστές σημειώσεις. Οι συνολικές μονάδες είναι 10, με άριστα το 10 και βάση το 5. Κάθε σωστή απάντηση μετράει 10/6=5/3, καθόλου απάντηση μετράει 0 και λανθασμένη απάντηση μετράει αρνητικά -1/3 Άρα, αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των μονάδων που θα πετύχετε είναι 0. Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. Καλή επιτυχία!