Θεωρια Σωματων

Ἐξετάσεις Ἰουνίου 2016

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

2 Ἰουνίου 2016

1. Περιγρᾶψτε τὴν κατασκευὴ ἑνὸς σώματος F μὲ 8 (ἀκριβῶς) στοιχεῖα, καθὼς καὶ τὰ 8 στοιχεῖα τοῦ F. Ἐπιλέξτε ἕξι διαφορετικὰ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in F \setminus \mathbb{Z}_2$ καὶ ὑπολογῖστε τὰ a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 συναρτήσει τῆς βάσεως τῆς ἐπέκτασης $F/\mathbb{Z}_2$. μον. 1

2. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ γωνία $\phi \in (0, \pi/2)$ μὲ $\cos\phi = 5/8$ δὲν μπορεῖ νὰ χωριστεῖ σὲ πέντε ἴσα μέρη μὲ χρήση κανόνα καὶ διαβήτη. Μπορεῖτε νὰ θεωρήσετε γνωστὴ τὴν ταυτότητα $\cos\theta = 16\cos^5(\theta/5) - 20\cos^3(\theta/5) + 5\cos(\theta/5)$. μον. 1

3. Ἔστω $\zeta = \cos\frac{2\pi}{11} + i\sin\frac{2\pi}{11}$ καὶ $L = \mathbb{Q}(\zeta)$. Πρὶν προχωρήσετε, νὰ βεβαιωθεῖτε ὅτι καταλάβατε ποιὰ εἶναι ἡ βασικὴ ἰδιότητα τοῦ ζ καὶ ποιὸ εἶναι τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμό του πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ (γνωστὸ ἀπ' τὸ μάθημα).
(α´) Γιατὶ ἡ $L/\mathbb{Q}$ εἶναι ἐπέκταση Galois; Ποιὰ εἶναι ἡ τάξη τῆς ὁμάδας $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$;
Οἱ ἀπαντήσεις σας τεκμηριωμένες **ξεκάθαρα**, βάσει θεωρημάτων. μον. 0.5
(β´) Θεωρῆστε δεδομένη τὴν ὕπαρξη $\sigma \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ τέτοιου ὥστε $\sigma(\zeta) = \zeta^2$. Κατασκευᾶστε τὸν πίνακα τιμῶν $\sigma^k(\zeta)$ γιὰ $k = 0, 1, \ldots, 9$ καὶ ἐξηγεῖστε **μὲ σαφήνεια** γιατὶ $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle$. μον. 0.5
(γ´) Χρησιμοποιώντας κάποιο σκέλος τοῦ Θεωρήματος Galois καὶ τὸ (β´), σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖο ἡ $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ εἶναι κυκλικὴ ὁμάδα, ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε ἐνδιάμεση ἐπέκταση E μεταξὺ $\mathbb{Q}$ καὶ L, ἡ ἐπέκταση $E/\mathbb{Q}$ εἶναι Galois. μον. 1
(δ´) Ἔστω $g(X) = X^{22} - 2X^{11} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ καὶ θ ρίζα τοῦ $g(X)$. Παρατηρῆστε ὅτι καὶ τὸ $-1/\theta$ εἶναι ρίζα τοῦ $g(X)$ καὶ μετά, ὅτι, γιὰ κάθε ἀκέραιο k, οἱ $\zeta^k\theta$ καὶ $-\zeta^k/\theta$ εἶναι ρίζες τοῦ $g(X)$. Ἄρα, ποιὲς εἶναι οἱ 22 διαφορετικὲς ρίζες τοῦ $g(X)$ καὶ ποιὸ τὸ σῶμα ριζῶν M τοῦ $g(X)$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$; μον. 0.5
Ἔστω $u = \theta^{11}$. Παρατηρῆστε ὅτι τὸ u εἶναι ρίζα τοῦ $X^2 - 2X - 1$ καὶ δεῖξτε ὅτι ἡ ἐπέκταση $M/\mathbb{Q}$ εἶναι ριζική. μον. 1

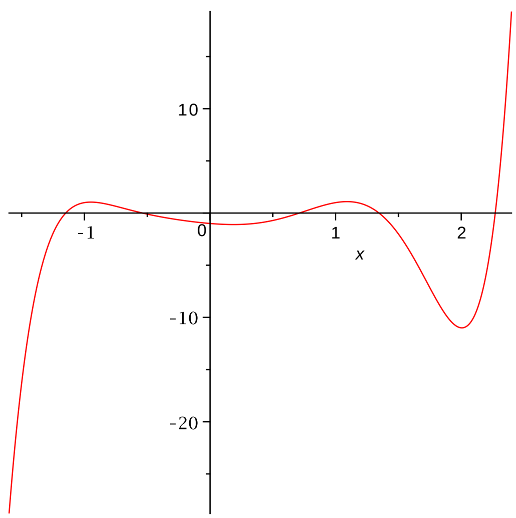
4. Ἔστω $\xi = \sqrt[4]{3} \in \mathbb{R}$.
(α´) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X) = X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ εἶναι τὸ $L = \mathbb{Q}(\xi, i)$. Ὑπολογῖστε τὸν βαθμὸ καὶ μία βάση τῆς ἐπέκτασης $L/\mathbb{Q}$, καθὼς καὶ τὴν τάξη τῆς ὁμάδας $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$. μον. 1
(β´) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει $\sigma \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ τέτοιος ὥστε $\sigma(\xi) = i\xi$, $\sigma(i) = i$. Θεωρῆστε δεδομένο ὅτι ὑπάρχει $\tau \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ τέτοιος ὥστε $\tau(\xi) = \xi$, $\tau(i) = -i$. Ἂν τὸ χρειαστεῖτε (δὲν εἶναι ἀπολύτως ἀπαραίτητο), μπορεῖτε νὰ θεωρήσετε δεδομένο ὅτι τὸ $f(X)$ εἶναι

ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}(i)$. μον. 1

(γ′) Ἐκφρᾶστε τὸ $\sqrt{3}$ συναρτήσει τοῦ ξ καὶ ὑπολογῖστε τὰ η^2 καὶ η^4, ὅπου $\eta = (1+i)\sqrt{3}$ (αὐτοὶ οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι ἐκτὸς βαθμολογίας). Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ η δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ρίζα δευτεροβαθμίου πολυωνύμου μὲ ρητοὺς συντελεστές, συνεπῶς, ποιὸς εἶναι ὁ βαθμὸς $[\mathbb{Q}(\eta) : \mathbb{Q}]$;
Ἀποδεῖξτε τὴν ἀντιστοιχία Galois: $\mathbb{Q}(\eta) \leftrightarrow \langle \sigma^2 \rangle$. μον. 1.5

5. Στὸ σχῆμα 1 βλέπετε τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς πραγματικῆς συνάρτησης $x \mapsto x^7 - 2x^6 - 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1$ (ὅπως ὑποδηλώνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, ἀπ' τὰ δεξιὰ

Σχῆμα 1: ἄσκηση 5



ἡ γραφικὴ παράσταση συνεχίζει πρὸς το $+\infty$ κι ἀπ' τ' ἀριστερὰ πρὸς τὸ $-\infty$). Θεωρῆστε δεδομένο ὅτι τὸ πολυώνυμο $f(X) = X^7 - 2X^6 - 2X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 2X^2 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ πολυώνυμο αὐτὸ δὲν εἶναι ἐπιλύσιμο μὲ ριζικά. Ἡ ἀπόδειξή σας πρέπει νὰ βασιστεῖ σὲ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα **ἀπαραιτήτως** θὰ διατυπώσετε μὲ ἀκρίβεια. μον. 1