Το π^2 είναι άρρητος *(άρα και το π είναι άρρητος)*

Παναγιώτα Χριστοπούλου Α.Μ. 287

31 Οκτωβρίου 2014

Στην απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

Λήμμα:

Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$,
(i) $f(x)$ είναι πολυώνυμο της μορφής

$$f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$$

και όλοι οι συντελεστές c_i είναι ακέραιοι.
(ii) Για $0 < x < 1$, έχουμε $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.
(iii) Οι παράγωγοι $f^{(k)}(0)$ και $f^{(k)}(1)$ είναι ακέραιοι για όλα τα $k \geq 0$.

Απόδειξη. (i) Αναπτύσσοντας το δυωνυμικό $(1-x)^n$ και πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο με x^n παίρνουμε το πολυώνυμο:

$$x^n(1-x)^n = x^n - \binom{n}{1}x^{n+1} + \binom{n}{2}x^{n+2} - ... + (-1)^n\binom{n}{n}x^{2n}$$

όπου όλοι οι συντελεστές είναι ακέραιοι.

(ii) Παρατηρούμε οτι για οποιοδήποτε $0 < x < 1$, έχουμε

$$0 < x^n < 1 \text{ και } 0 < (1-x)^n < 1 \text{ δηλαδή } 0 < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!} \text{ άρα } 0 < f(x) < \frac{1}{n!}$$

(iii) Από το (i) είναι προφανές ότι

$$f^{(k)}(0) = 0, \text{ αν } k < n \text{ ή } k > 2n.$$

Για $n \leq k \leq 2n$, έχουμε

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i \frac{d^k}{dx}(x^i) \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i i(i-1)...(i-(k-1))x^{i-k} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i i(i-1)...(i-k+1)x^{i-k} \end{aligned}$$

Άρα

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}c_k$$

το οποίο είναι ακέραιος.
Επίσης,

$$f(x) = f(1-x)$$

άρα

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$$

Συνεπώς,

$$f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

το οποίο είναι, επίσης, ακέραιος για όλα τα k.

$\square$

Θεώρημα:

Το π^2 είναι άρρητος.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το π^2 είναι ρητός.
Τότε $\pi^2 = \frac{a}{b}$ με a, b θετικούς ακεραίους, $a, b \neq 0$ και $(a, b) = 1$
Έστω

$$F(x) = b^n \Big(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - ... + (-1)^n f^{(2n)}(x)\Big) \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $0 \leq k \leq n$,

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n (\pi^2)^{n-k} = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k} b^k$$

είναι ακέραιος.
Αφού $f^{(k)}(0)$ και $f^{(k)}(1)$ είναι ακέραιοι, βέπουμε ότι $F(0)$ και $F(1)$ είναι επίσης ακέραιοι.
Παραγωγίζοντας την $F(x)$ δύο φορές,παίρνουμε:

$$F''(x) = b^n \Big(\pi^{2n} f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(6)}(x) - ... + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)\Big)$$

Όμως, $f^{(2n+2)}(x) = 0$ αφού $2n + 2 > 2n$.
Παρατηρώ ότι ο τελευταίος μη μηδενικός όρος της $F''(x)$ είναι ο $(-1)^{n+1} \pi^2 f^{(2n)}(x)$.
Οπότε,

$$F''(x) = b^n \Big(\pi^{2n} f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(6)}(x) - ... + (-1)^{n+1} \pi^2 f^{(2n)}(x)\Big) \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$F''(x) + \pi^2 F(x)^1 = b^n \pi^{2n+2} f(x) = \pi^2 a^n f(x) \tag{3}$$

[1] $F''(x) + \pi^2 F(x) = b^n \Big(\cancel{\pi^{2n} f^{(2)}(x)} - \cancel{\pi^{2n-2} f^{(4)}(x)} + \cancel{\pi^{2n-4} f^{(6)}(x)} - ... + \cancel{(-1)^{n+1} \pi^2 f^{(2n)}(x)} + \pi^{2n+2} f(x) - \cancel{\pi^{2n} f^{(2)}(x)} + \cancel{\pi^{2n-2} f^{(4)}(x)} - ... + \cancel{(-1)^n \pi^2 f^{(2n)}(x)}\Big)$

Παραγωγίζοντας την παρακάτω σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(F'(x)\sin\pi x - \pi F(x)\cos\pi x\Big) &= \cancel{\pi F'(x)\cos\pi x} + F''(x)\sin\pi x \\ &\quad -\cancel{\pi F'(x)\cos\pi x} + \pi^2 F(x)\sin\pi x \\ &= F''(x)\sin\pi x + \pi^2 F(x)\sin\pi x \\ &= \big(F''(x) + \pi^2 F(x)\big)\sin\pi x \\ &= \pi^2 a^n f(x)\sin\pi x, \qquad \text{από την (3)}\end{aligned}$$

Από το θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού έχουμε

$$\begin{aligned}\pi^2 a^n \int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx &= F'(x)\sin\pi x - \pi F(x)\cos\pi x\Big|_0^1 \\ &= F'(1)\sin\pi - \pi F(1)\cos\pi - F'(0)\sin 0 + \pi F(0)\cos 0 \\ &= \pi F(1) + \pi F(0) \\ &= \pi\big(F(1) + F(0)\big)\end{aligned}$$

Έτσι, το

$$\pi a^n \int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx = F(1) + F(0)$$

είναι ακέραιος.
Αφού, $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ για $0 < x < 1$, τότε

$$0 < f(x)\sin\pi x \le \frac{1}{n!}$$

Οπότε, για οποιοδήποτε ακέραιο $n \ge 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}0 &< \int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{n!}\,dx \\ 0 &< \int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx \le \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

Οπότε,

$$0 < \pi a^n \int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx \le \frac{\pi a^n}{n!}$$

Αφού για κάθε ακέραιο a, έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad [2]$$

μπορούμε να επιλέξουμε ένα αρκετά μεγάλο n έτσι ώστε $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$.
Αυτό μας δίνει

$$0 < \pi a^n \int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx < 1$$

το οποίο είναι αντίφαση αφού το $\pi a^n \int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx$ είναι ακέραιος.

Οπότε το π^2 είναι άρρητος. □

[2] Αποδεικνύεται εύκολα με το Κριτήριο λόγου.