Η Θεωρια Αριθμων στην Εκπαιδευση

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Ἐφαρμογὲς τῶν συνεχῶν κλασμάτων[1]

1. Ἡ τιμὴ τοῦ π μὲ σωστὰ τὰ 50 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία μετὰ τὴν ὑποδιαστολή, εἶναι 3.14159265358979323846264338327950288419716939937511.
Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ἂν θέλομε χρησιμοποιώντας τὴ δεκαδικὴ ἀνάπτυξη τοῦ π νὰ πετύχομε ρητό, ποὺ νὰ ἀπέχει ἀπὸ τὸ π, λιγώτερο ἀπὸ 10^{-50}, τότε τὸ κλάσμα αὐτὸ εἶναι τὸ

$$\tilde{\pi} = \frac{314159265358979323846264338327950288419716939937 51}{100000000000000000000000000000000000000000000000000}\,.$$

Ἂν ἀναπτύξομε τὸ $\tilde{\pi}$ σὲ συνεχὲς κλάσμα μὲ τὴ βοήθεια τῶν ἀναδρομικῶν σχέσεων τοῦ Θεωρήματος 1 καὶ χρήση ὑπολογιστῆ,[2], τότε

$$\frac{p_{44}}{q_{44}} = \frac{8131159605436235085075818 9}{2588228488548644254463578 7}$$

καὶ

$$\frac{p_{45}}{q_{45}} = \frac{1887746580408317462634033 27}{6008883991536115766892173 2}.$$

Ἀπὸ τὴ δεξιὰ ἀνισότητα τοῦ Θεωρήματος 5, τὸ κλάσμα p_{44}/q_{44} ἀπέχει ἀπὸ τὸ $\tilde{\pi}$ λιγώτερο ἀπὸ $(q_{44}q_{45})^{-1} = (25882284885486442544635787 \cdot 60088839915361157668921732)^{-1} < 0.643 \cdot 10^{-51}$, ἄρα

$$\left|\pi - \frac{p_{44}}{q_{44}}\right| \le |\pi - \tilde{\pi}| + \left|\tilde{\pi} - \frac{p_{44}}{q_{44}}\right| < 10^{-50} + 0.643 \cdot 10^{-51} = 1.0643 \cdot 10^{-50}\,.$$

Μὲ τὸ συνεχὲς κλάσμα πετύχαμε, δηλαδή, τῆς ἴδιας τάξεως προσέγγιση μὲ πολὺ μικρότερο παρονομαστή.

2. Θὰ ἐφαρμόσομε τὰ συνεχῆ κλάσματα στὴν ἐπίλυση τῆς ἐξίσωσης Pell.

[1] Οἱ ἀναφορὲς σὲ προτάσεις, θεωρήματα, συμβολισμοὺς παραπέμπουν στὴν ἐγασία τοῦ Μανώλη Καπνόπουλου [1].

[2] Πολλὰ δημοφιλῆ πακέτα συμβολικοῦ ὑπολογισμοῦ ἔχουν ἕτοιμες ρουτίνες γιὰ τὰ συνεχῆ κλάσματα.

Ὑπενθυμίσεις καὶ συμβολισμοί, ποὺ χρησιμοποιοῦνται στὴν [1]: Γενικά, ἂν $b = [a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots]$, τότε $b_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$, ὁπότε, $b = [a_0, a_1, \ldots, a_n, b_{n+1}]$. Σ' αὐτὸ τὸ τελευταῖο συνεχὲς κλάσμα, ὁ ἀριθμὸς b δίνεται ἀπὸ τὴν $(n+1)$-οστὴ σύγκλιση p_{n+1}/q_{n+1}. Συνεπῶς, ἀπὸ τοὺς ἀναδρομικοὺς τύπους τοῦ Θεωρήματος 1, $p_{n+1} = b_{n+1}p_n + p_{n-1}$ καὶ $q_{n+1} = b_{n+1}q_n + q_{n-1}$. Καταλήγομε, λοιπόν, στὴ σχέση

$$b = \frac{b_{n+1}p_n + p_{n-1}}{b_{n+1}q_n + q_{n-1}} \tag{1}$$

Τώρα θεωροῦμε τὴν εἰδικὴ περίπτωση $b = \sqrt{d}$, ὅπου ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς d δὲν εἶναι τέλειο τετράγωνο. Παίρνομε χωρὶς ἀπόδειξη ὅτι, τότε, ἡ ἀνάπτυξη τοῦ $\sqrt{d}$ σὲ συνεχὲς κλάσμα εἶναι περιοδική, τῆς μορφῆς:

$$\sqrt{d} = [a_0, a_1, \ldots, a_m, a_1, \ldots, a_m, a_1, \ldots, a_m, \ldots] = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_m}]. \tag{2}$$

Ἡ "ἀκολουθία" $a_1, \ldots, a_m$ λέγεται *περίοδος* τοῦ συνεχοῦς κλάσματος. Δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι $m = 1$· γιὰ παράδειγμα, $\sqrt{2} = [1, \overline{2}] = [1, 2, 2, \ldots]$.

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομε

$$\sqrt{d} = [a_0, \overbrace{a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m, \underbrace{a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m, \ldots}_{b_{m+1}}}^{b_1}],$$

ἄρα $b_{m+1} = b_1$. Ἐφαρμόζοντας τὴν (1) στὴν περίπτωση ποὺ $b = \sqrt{d}$ καὶ $n = m+1$, ὁδηγούμαστε στὴ σχέση

$$\sqrt{d} = \frac{b_{m+1}p_m + p_{m-1}}{b_{m+1}q_m + q_{m-1}} = \frac{p_m + \frac{1}{b_{m+1}}p_{m-1}}{q_m + \frac{1}{b_{m+1}}q_{m-1}} = \frac{p_m + \frac{1}{b_1}p_{m-1}}{q_m + \frac{1}{b_1}q_{m-1}}.$$

Ἀλλὰ $\sqrt{d} = [a_0, b_1] = a_0 + \dfrac{1}{b_1}$, ὁπότε, ὕστερα ἀπὸ ἀντικατάσταση στὴν τελευταία σχέση καὶ κάποιες στοιχειώδεις πράξεις, παίρνομε

$$\sqrt{d} = \frac{(p_m - a_0p_{m-1}) + p_{m-1}\sqrt{d}}{(q_m - a_0q_{m-1}) + q_{m-1}\sqrt{d}},$$

ἄρα,

$$(p_m - a_0p_{m-1}) + p_{m-1}\sqrt{d} = q_{m-1}d + (q_m - a_0q_{m-1})\sqrt{d}.$$

Ἐξισώνοντας ρητὰ καὶ ἄρρητα μέρη στὴν τελευταία σχέση καὶ διαιρώντας μετὰ κατὰ μέλη, παίρνομε $(q_m - p_{m-1})/(p_m - q_{m-1}d) = q_{m-1}/p_{m-1}$, ἀπ' ὅπου, ὕστερα ἀπὸ ἁπλὲς στοιχειώδεις πράξεις, ὁδηγούμαστε στὴ σχέση

$$p_{m-1}^2 - dq_{m-1}^2 = q_mp_{m-1} - p_mq_{m-1} = ([1, \text{Θεώρημα } 2])\ (-1)^m. \tag{3}$$

Καταλήξαμε, λοιπόν, στὸ ἑξῆς πολὺ ἐνδιαφέρον συμπέρασμα:

Θεώρημα. *Ἔστω d φυσικὸς ἀριθμός, ποὺ δὲν εἶναι τέλειο τετράγωνο καὶ $a_1, \dots, a_m$ ἡ περίοδος ὅταν ἀναπτύξομε τὸν ἀριθμὸ $\sqrt{d}$ σὲ συνεχὲς κλάσμα (βλ. (2)).*

- *Ἂν τὸ μῆκος τῆς περιόδου m εἶναι ἄρτιο, τότε ἡ ἐξίσωση $x^2 - dy^2 = 1$ ἐπαληθεύεται ἀπὸ τὰ $(x, y) = (p_{m-1}, q_{m-1})$.*
- *Ἂν τὸ μῆκος τῆς περιόδου m εἶναι περιττό, τότε ἡ ἐξίσωση $x^2 - dy^2 = -1$ ἐπαληθεύεται ἀπὸ τὰ $(x, y) = (p_{m-1}, q_{m-1})$. Στὴν περίπτωση αὐτή, ἂν ὑπολογίσομε τὰ x', y' ἀπὸ τὴ σχέση $x' + y'\sqrt{d} = (p_{m-1} + q_{m-1}\sqrt{d})^2$, τότε $x'^2 - dy'^2 = 1$.*

Ἀπόδειξη. Ἄμεση συνέπεια τῆς (3). Στὴν περίπτωση ποὺ ὁ m εἶναι περιττός, γράφομε τὴν (3) ὡς ἑξῆς: $(p_{m-1} - q_{m-1}\sqrt{d})(p_{m-1} + q_{m-1}\sqrt{d}) = -1$. Ὑψώνοντας στὸ τετράγωνο παίρνομε

$$1 = (p_{m-1} - q_{m-1}\sqrt{d})^2(p_{m-1} + q_{m-1}\sqrt{d})^2 = (x' - y'\sqrt{d})(x' + y'\sqrt{d}) = x'^2 - dy'^2.$$

□

Παραδείγματα. *(α΄)* Εἶναι $\sqrt{47} = [6, \overline{1, 5, 1, 12}]$, ὁπότε $m = 4$. Ὑπολογίζομε τὰ a_n καὶ p_n/q_n μέχρι τὸ $n = m - 1 = 3$. Μέσῳ τῶν ἀναδρομικῶν σχέσεων τοῦ Θεωρήματος 1 ὑπολογίζομε

n	0	1	2	3
a_n	6	1	5	1
p_n	6	7	41	48
q_n	1	1	6	7

Σύμφωνα μὲ τὸ παραπάνω θεώρημα, $p_3^2 - 47q_3^2 = 1$ καὶ πράγματι, $48^2 - 47 \cdot 7^2 = 1$.

(β΄) Εἶναι $\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$, ὁπότε $m = 5$. Ὑπολογίζομε τὰ a_n καὶ p_n/q_n μέχρι τὸ $n = m - 1 = 4$. Μέσῳ τῶν ἀναδρομικῶν σχέσεων τοῦ Θεωρήματος 1 ὑπολογίζομε

n	0	1	2	3	4
a_n	3	1	1	1	1
p_n	3	4	7	11	18
q_n	1	1	2	3	5

Σύμφωνα μὲ τὸ παραπάνω θεώρημα, $p_4^2 - 13q_4^2 = -1$ καὶ πράγματι, $18^2 - 13 \cdot 5^2 = -1$. Τώρα, θέτοντας $x' + y'\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})^2 = 649 + 180\sqrt{13}$ καὶ βλέπομε ὅτι $649^2 - 13 \cdot 180^2 = 1$.

3 *Νὰ ὑπολογισθοῦν ὅλοι οἱ πρῶτοι μεταξύ τους φυσικοὶ ἀριθμοὶ x, y, οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα*

$$|\pi x^2 - ey^2| < \frac{1}{4}, \tag{4}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμὸ $y < 10^{50}$.

Λύση. Κατ' ἀρχάς, ἂς παρατηρήσομε ὅτι οἱ ζητούμενες λύσεις (x, y) δὲν εἶναι ἄπειρες, διότι, ὅπως εὔκολα φαίνεται, $x < y$. Ἀλλά, ἂν ἐπιχειρήσομε μὲ "ὠμὴ βία" (ὑπολογιστική!) νὰ δοκιμάσομε ὅλα τὰ ζεύγη (x, y) μὲ $x < y < 10^{50}$, τὸ πλῆθος τῶν ἀπαιτουμένων δοκιμῶν εἶναι τῆς τάξεως τοῦ 10^{100}, ὁπότε τὸ ὅλο ἐγχείρημα θὰ ἀπαιτήσει πάρα πολὺ χρόνο!

Ἂς κάνομε τώρα κάτι πιὸ ἔξυπνο. Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (4) καὶ τὴν προσέγγιση $\sqrt{e/\pi} = 0.93019\ldots$, παίρνομε

$$0.93\left|\frac{x}{y} - \sqrt{\frac{e}{\pi}}\right| < \sqrt{\frac{e}{\pi}}\left|\frac{x}{y} - \sqrt{\frac{e}{\pi}}\right| < \left|\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{e}{\pi}}\right|\left|\frac{x}{y} - \sqrt{\frac{e}{\pi}}\right| < \left|\frac{x^2}{y^2} - \frac{e}{\pi}\right| < \frac{1}{4\pi y^2}\,.$$

Συνεπῶς,

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{\frac{e}{\pi}}\right| < \frac{1}{4 \cdot 0.93\pi y^2} < \frac{1}{2y^2}\,,$$

ὁπότε, βάσει τοῦ Πορίσματος 9, τὸ κλάσμα x/y συμπίπτει μὲ κάποια κύρια σύγκλιση τοῦ παραγματικοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt{e/\pi}$. Ἐπειδὴ ὑπάρχει ὁ περιορισμὸς $y < 10^{50}$, πρέπει νὰ ὑπολογίσομε μόνο ἐκεῖνες τὶς κύριες συγκλίσεις p_n/q_n μὲ $q_n < 10^{50}$. Ὑπολογίζομε ὅτι $q_{106} < 10^{50}$, ἐνῶ $q_{107} > 10^{50}$. Ἔτσι, ζητοῦμε ἀπὸ τὸν ὑπολογιστή μας νὰ ὑπολογίσει τὰ p_n/q_n γιὰ $n = 0, 1, \ldots, 106$ καὶ νὰ τυπώσει μόνο ἐκεῖνα ἐξ αὐτῶν, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα

$$|\pi p_n^2 - e q_n^2| < \frac{1}{4}.$$

Ὕστερα ἀπὸ ἐλάχιστο χρόνο (ὁ ὑπολογιστικὸς χρόνος εἶναι τῆς τάξεως τῶν μερικῶν ἑκατοστῶν τοῦ δευτερολέπτου) παίρνομε τὶς ἑξῆς κύριες συγκλίσεις:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{22}}{q_{22}} &= \frac{12434141418}{13367293933}\\
\frac{p_{73}}{q_{73}} &= \frac{740443153395166086958480285002765}{796011637585397131577545357453811}\\
\frac{p_{90}}{q_{90}} &= \frac{36661837936501472884247891034819846579 82}{394132210135383694034109951425085453984 7}\\
\frac{p_{92}}{q_{92}} &= \frac{1668382964402717906235423141055723070873212}{1793591107601234621628756229675103016805303}\\
\frac{p_{106}}{q_{106}} &= \frac{3118874327124667459197908637308554681926465450 7503}{3352938370992800032345250292331673369100917463 3667}\,.
\end{aligned}$$

Ἄρα, οἱ λύσεις τοῦ προβλήματος εἶναι $(x, y) = (p_n, q_n)$ γιὰ $n = 22, 73, 90, 92, 106$.

Ἀναφορὲς

[1] Μανώλης Καπνόπουλος, *Συνεχή Κλάσματα*, Παρουσίαση στὸ πλαίσιο τοῦ μαθήματος.
http://server.math.uoc.gr/~tzanakis/Courses/NumberTheoryEdu/Kapnopoulos_revised.pdf