Η Θεωρια Αριθμων στην Εκπαιδευση

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Εργασιες προς παρουσιαση (23-9-2014)

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, γεωμετρικὴ ἀπόδειξη. Ἐνδεικτικὴ βιβλιογραφία [3, p.44].
   Ἂν ὁ θετικὸς ἀκέραιος a δὲν εἶναι n-οστὴ δύναμη ἀκεραίου, τότε $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Q}$.
   $e \notin \mathbb{Q}$. Ἐνδεικτικὴ βιβλιογραφία [3, Theorem 47].

2. $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$ (ἄρα καὶ $\pi \notin \mathbb{Q}$). Ἐνδεικτικὴ βιβλιογραφία [3, Theorem 49].

3. Πυθαγόρειες τριάδες. Ἐνδεικτικὴ βιβλιογραφία [6, §1.5].
   Ἡ ἐξίσωση $x^4 + y^4 = z^2$ εἶναι ἀδύνατη σὲ ἀκεραίους $xyz \neq 0$. Ἐνδεικτικὴ βιβλιογραφία [4, Theorem 115].

4. Γιατὶ οἱ μέλισσες κάνουν ἐξαγωνικὲς τὶς κηρῆθρες τους;

5. Λέμε ὅτι ἔχομε ἀναπτύξει τὸν $x \in \mathbb{R}$ σὲ ἁλυσσωτό, ἢ συνηθέστερα, συνεχές κλᾶσμα, ὅταν τον γράψομε στὴ μορφὴ

   $$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

   ὅπου $a_0 \in \mathbb{Z}$ καὶ $a_1, a_2, a_3 \ldots \in \mathbb{N}$. Οἱ ρητοὶ ἀριθμοὶ

   $$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \ldots$$

   λέγονται *συγκλίνοντα κλάσματα* τοῦ x. Θὰ παρουσιαστεῖ ἡ ἐντελῶς βασικὴ θεωρία τῶν ἁλυσσωτῶν κλασμάτων καὶ θ' ἀποδειχθεῖ ὅτι τὰ συγκλίνοντα τοῦ x ἀποτελοῦν τὶς βέλτιστες (ὑπὸ κάποια συγκεκριμένη ἔννοια) ρητὲς προσεγγίσεις τοῦ x. Ἐνδεικτικὴ βιβλιογραφία [2, Chapter 6, §§2-3].
   Ὡς ἐφαρμογὴ (καὶ μὲ δική μου βοήθεια), θὰ ὑπολογιστοῦν ὅλα τὰ πρῶτα μεταξύ τους ζεύγη ἀκεραίων (p, q), οἱ ὁποῖοι εἶναι $< 10^{30}$ καὶ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα

   $$|p - \pi q| < 1.5 \cdot e^{-0.03 \cdot \max\{p,q\}}.$$

6. Ἀριθμοὶ Mersenne ($M_n = 2^n - 1$) καί, εἰδικώτερα, πρῶτοι Mersenne. Τέλειοι ἀριθμοὶ καὶ ἡ σχέση τελείων ἀριθμῶν καὶ πρώτων Mersenne. Ἐνδεικτικὴ βιβλιογραφία `http://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_prime`.
   Τέστ Lucas-Lehmer γιὰ τὸν ἔλεγχο τοῦ M_p ἂν εἶναι πρῶτος ἀριθμός: *Ἔστω $S_0 = 4$ καὶ $S_n = S_{n-1}^2 - 2$ γιὰ $n \geq 1$. Τότε, ὁ M_p εἶναι πρῶτος, ἂν καὶ μόνο ἄν, $M_p \mid S_{p-2}$.*

7. Ὑπερβατικοὶ ἀριθμοί. Τὸ θεώρημα τοῦ Liouville: *Ἂν ὁ α εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς βαθμοῦ d, τότε ὑπάρχει θετικὴ σταθερὰ $c = c(\alpha)$, μὲ την ἰδιότητα $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^d}$, γιὰ ὁποιουσδήποτε ἀκεραίους p, q ($q > 0$).* Βάσει αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος θ' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ εἶναι ὑπερβατικός. Ἐνδεικτικὴ βιβλιογραφία [1, Chapter 1, §1].

8. Θ' ἀποδειχθεῖ τὸ ἑξῆς θεώρημα: *Οἱ μόνες ὀξεῖες γωνίες, ποὺ εἶναι ρητὰ πολλαπλάσια τοῦ π καὶ ἔχουν ρητὸ συνημίτονο, εἶναι οἱ $\pi/3$, $\pi/4$ καὶ $\pi/6$.* Θὰ δώσω ἀντίγραφο σχετικῆς ἐργασίας, σὲ ὅποιον ἀναλάβει αὐτὸ τὸ θέμα.

Ἀναφορὲς

[1] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge 1975.

[2] A. Baker, *A consise introduction to the Theory of Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

[3] G.H. Hardy & E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fourth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1975.

[4] T. Nagell, *Introduction to Number Theory*, Second edition, Chelsea Pub. Co. New York 1964

[5] I.M. Vinogradov, *Elements of Number Theory*, Fifth revised edition, Dover Publ. New York 1954.

[6] Ν.Γ. Τζανάκης, *Βασικὴ Ἀριθμοθεωρία*
`http://server.math.uoc.gr/~tzanakis/Courses/NumberTheory/textbook_main.pdf`