Πυθαγόρειες Τριάδες

Χριστίνα Ιατράκη

Ημερομηνία παράδοσης 22-10-2014

1 Εισαγωγικά

Ορισμός 1.1 *Πυθαγόρεια τριάδα καλείται κάθε τριάδα ακέραιων* (x, y, z) *που είναι μη τετριμμένη λύση της εξίσωσης*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Μια τέτοια Πυθαγόρεια τριάδα είναι η

$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5$$

Σε αυτήν την εργασία αρχικά θα προσδιορίσουμε όλες τις Πυθαγόρειες Τριάδες. Έπειτα με την βοήθειά τους θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^4 + y^4 = z^2$ *είναι αδύνατη σε ακεραίους* $xyz \neq 0$.

2 Η Διοφαντική εξίσωση $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$

Η Διοφαντική εξίσωση

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2.1}$$

έχει τις προφανείς λύσεις

$$x = 0, y = \eta, z = \pm\eta \quad (\eta \in \mathbb{Z})$$

και τις ανάλογες

$$x = \xi, y = 0, z = \pm\xi \quad (\xi \in \mathbb{Z})$$

Αυτές οι λύσεις ονομάζονται τετριμμένες λύσεις της (2.1).
Οι μη τετριμμένες λύσεις της (2.1), δηλαδή όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες, περιγράφονται από το Θεώρημα 2.1. Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε τις δύο παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 2.1 *Αν $a^n \mid b^n$, τότε $a \mid b$.*

Απόδειξη *Θέτουμε $d = (a, b)$. Τότε $d \geq 1$ και $d \mid a$ και $d \mid b$. Ορίζουμε*

$$a_1 = \frac{a}{d}, \quad b_1 = \frac{b}{d}$$

Γνωρίζουμε ότι $(a_1, b_1) = 1$. Η σχέση $a^n \mid b^n$ συνεπάγεται

$$b^n = ka^n$$

για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Οπότε,

$$d^n b_1^n = kd^n a_1^n$$

και άρα

$$b_1^n = ka_1^n.$$

Έπεται ότι $a_1 \mid b_1^n$ και επειδή $(a_1, b_1) = 1$ έχουμε διαδοχικά:

$$a_1 \mid b_1^{n-1}, \quad a_1 \mid b_1^{n-2}, \quad \cdots \quad , \quad a_1 \mid b_1$$

άρα $a_1 = \pm 1$, οπότε $a = \pm d$ και επομένως $a \mid b$.

□

Πρόταση 2.2 *Αν a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι, τέτοιοι ώστε $(a, b) = 1$ και $ab = c^n$, όπου $n \geq 2$, τότε υπάρχουν ακέραιοι c_1, c_2 τέτοιοι ώστε $a = c_1^n, b = c_2^n$ και $c_1 c_2 = c$.*

Απόδειξη *Αν $a = 1$ ή $b = 1$, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές. Οπότε υποθέτουμε ότι $a, b, c > 1$ και θεωρούμε τις κανονικές αναλύσεις των a, b. Έστω $p_1, \cdots p_k$ όλοι οι (θετικοί) πρώτοι στην κανονική ανάλυση του a και $q_1, \cdots q_\ell$ όλοι οι (θετικοί) πρώτοι στην κανονική ανάλυση του b.*

Επειδή $(a, b) = 1$, οι a, b δεν έχουν κοινούς πρώτους παράγοντες, οπότε οι πρώτοι που οι δυνάμεις τους περιέχονται στην κανονική ανάλυση του a είναι διαφορετικοί από τους πρώτους που οι δυνάμεις τους περιέχονται στην κανονική ανάλυση του b.Λόγω της $ab = c^n$ και της μοναδικότητας της ανάλυσης σε πρώτους παράγοντες,κάθε πρώτος παράγων των a, b είναι και πρώτος παράγων του c^n, δηλαδή η κανονική ανάλυση του c είναι:

$$c = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} q_1^{s_1} \cdots q_\ell^{s_\ell}.$$

Οπότε

$$ab = c^n = p_1^{nr_1} \cdots p_k^{nr_k} q_1^{ns_1} \cdots q_\ell^{ns_\ell} \tag{2.2}$$

Όμως στην κανονική ανάλυση του a εμφανίζονται μόνο οι πρώτοι p_i , ενώ στην κανονική ανάλυση του b εμφανίζονται μόνο οι πρώτοι q_j. Αυτό αναγκαστικά συνεπάγεται ότι:

$$a = p_1^{nr_1} \cdots p_k^{nr_k} = c_1^n \text{ και } b = q_1^{ns_1} \cdots q_\ell^{ns_\ell} = c_2^n$$

και λόγω της (2.2), $c_1 c_2 = c$.

$\square$

Θεώρημα 2.1 *Οι μη τετριμμένες λύσεις της $x^2+y^2=z^2$ δίνονται από τους τύπους*

$$x = \pm d(u^2 - v^2), \quad y = \pm 2duv, \quad z = \pm d(u^2 + v^2) \tag{2.3}$$

ή

$$x = \pm 2duv, \quad y = \pm d(u^2 - v^2), \quad z = \pm d(u^2 + v^2) \tag{2.4}$$

όπου
(i) τα πρόσημα είναι αυθαίρετα,
(ii) $d \geq 1$,
(iii) $u > v \geq 1, (u, v) = 1$ και
(iv) ο ένας από τους u, v είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.

Απόδειξη *Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι αριθμοί που δίνονται από τους τύπους (2.3) αποτελούν λύσεις της $x^2+y^2=z^2$. Πράγματι,*

$$(\pm d(u^2-v^2))^2+(\pm 2duv)^2 = d^2(u^4+v^4-2u^2v^2+4u^2v^2) = d^2(u^2+v^2)^2 = (\pm d(u^2+v^2))^2.$$

Το ίδιο ισχύει και με τους τύπους (2.4).
Τώρα, αντιστρόφως, έστω $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$ μία τυχούσα μη τετριμμένη λύση της $x^2+y^2=z^2$. Δηλαδή,

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2, \quad \xi \neq 0, \eta \neq 0, \zeta \neq 0.$$

Λόγω των τετραγώνων της εξίσωσης, τα πρόσημα των ξ, η, ζ δεν παίζουν κανένα ρόλο, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\xi, \eta, \zeta > 0$$

Αν ο d είναι κοινός διαιρέτης των ξ, η τότε θα έχουμε

$$d \mid \xi \text{ και } d \mid \eta$$

Οπότε

$$d^2 \mid \xi^2 \text{ και } d^2 \mid \eta^2$$

Επομένως

$$d^2 \mid \xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$$

Τώρα η Πρόταση 2.1 συνεπάγεται ότι

$$d \mid \zeta$$

Άρα ο d *είναι διαιρέτης και του* ζ.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν ο d *είναι κοινός διαιρέτης των* ξ, ζ *τότε ο* d *είναι διαιρέτης και του* η *και ότι, αν ο* d *είναι κοινός διαιρέτης των* η, ζ *τότε ο* d *είναι διαιρέτης και του* ξ. *Άρα το ζευγάρι* ξ, η *το ζευγάρι* ξ, ζ *και το ζευγάρι* η, ζ *έχουν τους ίδιους κοινούς διαιρέτες και, επομένως, τα τρία ζευγάρια έχουν τον ίδιο μέγιστο κοινό διαιρέτη.* *Άρα μπορούμε να θέσουμε*

$$d = (\xi, \eta) = (\xi, \zeta) = (\eta, \zeta).$$

Επίσης, θέτουμε

$$\xi_1 = \frac{\xi}{d}, \quad \eta_1 = \frac{\eta}{d}, \quad \zeta_1 = \frac{\zeta}{d},$$

οπότε

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \zeta_1^2, \quad \xi_1, \eta_1, \zeta_1 > 0, \quad (\xi_1, \eta_1) = (\xi_1, \zeta_1) = (\eta_1, \zeta_1) = 1.$$

Επειδή οι ξ_1, η_1, ζ_1 *είναι ανά δύο σχετικά πρώτοι, συνεπάγεται ότι το πολύ ένας από τους τρεις αριθμούς είναι άρτιος. Τώρα, αν οι* ξ_1, η_1 *είναι και οι δύο περιττοί, έχουμε ότι*

$$\zeta_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 = 4(n^2 + n + m^2 + m + 2) = 4k + 2.$$

Αυτό, όμως, είναι αδύνατο, διότι, είτε ο ζ_1 *είναι άρτιος είτε ο* ζ_1 *είναι περιττός, ο* ζ_1^2 *δεν είναι της μορφής* $4k + 2$. *Άρα ο ένας από τους* ξ_1, η_1 *είναι άρτιος και ο άλλος είναι περιττός και, επομένως, ο* ζ_1 *είναι περιττός. Θα υποθέσουμε ότι ο* η_1 *είναι άρτιος και θα οδηγηθούμε στις τύπους (2.3). Λόγω προφανούς συμμετρίας, αν υποθέσουμε ότι ο* ξ_1 *είναι άρτιος, θα οδηγηθούμε στους τύπους (2.4). Τώρα, έχουμε*

$$\eta_1^2 = \zeta_1^2 - \xi_1^2,$$

οπότε

$$\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 = \frac{\zeta_1 + \xi_1}{2} \frac{\zeta_1 - \xi_1}{2}. \tag{2.5}$$

Οι αριθμοί $\frac{\eta_1}{2}, \frac{\zeta_1 + \xi_1}{2}, \frac{\zeta_1 - \xi_1}{2}$ *είναι ακέραιοι. Σύμφωνα με την άσκηση 8, παράγραφος 1.6, που λύσαμε στο Φυλλάδιο Ασκήσεων 1, αφού* ζ_1, ξ_1 *περιττοί και πρώτοι μεταξύ τους έχουμε*

$$\left(\frac{\zeta_1 + \xi_1}{2}, \frac{\zeta_1 - \xi_1}{2}\right) = 1.$$

Άρα, από την (2.5) και την Πρόταση 2.2 έπεται ότι υπάρχουν $u, v > 0$ *ώστε*

$$\frac{\zeta_1 + \xi_1}{2} = u^2, \quad \frac{\zeta_1 - \xi_1}{2} = v^2 \quad \textit{και άρα} \quad \frac{\eta_1}{2} = uv.$$

Επομένως,

$$\xi_1 = u^2 - v^2, \quad \eta_1 = 2uv, \quad \zeta_1 = u^2 + v^2. \tag{2.6}$$

Τώρα αφού $\left(\frac{\zeta_1+\xi_1}{2}, \frac{\zeta_1-\xi_1}{2}\right) = 1$, *έχουμε και* $(u^2, v^2) = 1$. *Οπότε και* $(u, v) = 1$.
Τέλος, επειδή οι ξ_1, ζ_1 *είναι περιττοί, από τις (2.6) έπεται ότι ο ένας από τους* u, v *είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.*
Έτσι καταλήγουμε στους τύπους (2.3) με τους αναφερόμενους στην διατύπωση του θεωρήματος περιορισμούς (i)-(iv) .

$\square$

Παραδείγματα: *Επιλέγοντας* $d = 1$ *και* $u = 2, v = 1$, *προκύπτει* $x = 3, y = 4, z = 5$.
Επιλέγοντας $d = 1$ *και* $u = 3, v = 2$, *προκύπτει* $x = 5, y = 12, z = 13$.

3 Η Διοφαντική εξίσωση $\mathbf{x^4 + y^4 = z^2}$

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με την Διοφαντική εξίσωση

$$x^4 + y^4 = z^2.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τετριμμένες λύσεις, δηλαδή λύσεις όπου ένα τουλάχιστον από τα x, y *είναι ίσο με 0, τις*

$$x = \pm\xi, y = 0, z = \pm\xi^2 \quad \text{και} \quad x = 0, y = \pm\eta, z = \pm\eta^2$$

Πρόταση 3.1 *Η Διοφαντική εξίσωση* $x^4 + y^4 = z^2$ *δεν έχει μη τετριμμένη λύση.*

Απόδειξη *Έστω ότι η Διοφαντική εξίσωση* $x^4 + y^4 = z^2$ *έχει κάποια μη τετριμμένη λύση* $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$, *όπου* $\xi, \eta \neq 0$ *και, επομένως,* $\zeta \neq 0$. *Δηλαδή,*

$$\xi^4 + \eta^4 = \zeta^2.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\xi, \eta, \zeta > 0$. *Έστω, τώρα,* $d = (\xi, \eta)$, *τότε* $\xi = d\xi_1$ *και* $\eta = d\eta_1$, *όπου* $(\xi_1, \eta_1) = 1$. *Έχουμε, λοιπόν,* $d^4(\xi_1^4 + \eta_1^4) = \zeta^2$. *Άρα,* $d^4 \mid \zeta^2$. *Από την Πρόταση 2.1 προκύπτει ότι* $d^2 \mid \zeta$. *Αν θέσουμε, τώρα,* $\zeta_1 = \frac{\zeta}{d^2}$, *τότε έχουμε* $\xi_1^4 + \eta_1^4 = \zeta_1^2$. *Επομένως, και η* $x = \xi_1, y = \eta_1, z = \zeta_1$ *είναι μια μη τετριμμένη λύση της* $x^4 + y^4 = z^2$ *με* $(\xi_1, \eta_1) = 1$.
Το Θεώρημα 2.1 λέει ότι υπάρχουν u, v *ώστε*

$$\xi_1^2 = u^2 - v^2, \quad \eta_1^2 = 2uv, \quad \zeta_1 = u^2 + v^2 \tag{3.1}$$

ή

$$\xi_1^2 = 2uv, \quad \eta_1^2 = u^2 + v^2, \quad \zeta_1 = u^2 + v^2 \tag{3.2}$$

όπου
(iii) $u > v \geq 1, (u, v) = 1$ *και*

(iv) ο ένας από τους u, v είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.

Οι περιπτώσεις (3.1) και (3.2) είναι συμμετρικές,οπότε αρκεί να εξετάσουμε την (3.1).
Η πρώτη από τις σχέσεις (3.1) γράφεται

$$\xi_1^2 + v^2 = u^2.$$

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 είχαμε δει ότι $(\xi_1, v) = (\xi_1, u) = (v, u)$, οπότε επειδή $(v, u) = 1$, έπεται ότι

$$(\xi_1, v) = (\xi_1, u) = (v, u) = 1.$$

Επίσης, στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 είχαμε δει ότι ένας από τους ξ_1, v είναι άρτιος και ο άλλος είναι περιττός, καθώς και ότι ο u είναι περιττός. Επειδή, όμως, ο ένας από τους u, v είναι άρτιος και ο άλλος περιττός, συμπεραίνουμε ότι ο v είναι άρτιος και οι ξ_1, u είναι περιττοί.
Μετά από αυτά, το Θεώρημα 2.1 λέει ότι υπάρχουν k, ℓ ώστε

$$\xi_1 = k^2 - \ell^2, \quad v = 2kl, \quad u = k^2 + \ell^2 \tag{3.3}$$

όπου
(iii) $k > \ell \geq 1, (k, \ell) = 1$ και
(iv) ο ένας από τους k, ℓ είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.
Τώρα η δεύτερη από τις σχέσεις (3.1) γράφεται

$$\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 = u\frac{v}{2}.$$

Επειδή $(u, v) = 1$, έπεται ότι $(u, \frac{v}{2}) = 1$, οπότε η Πρόταση 2.2 συνεπάγεται ότι υπάρχουν $\zeta_2, n > 0$ ώστε

$$u = \zeta_2^2, \quad \frac{v}{2} = n^2.$$

Τώρα, η δεύτερη από τις σχέσεις (3.3) γράφεται

$$n^2 = k\ell$$

και επειδή $(k, \ell) = 1$, πάλι η Πρόταση 2.2 συνεπάγεται ότι υπάρχουν ξ_2, η_2 ώστε

$$k = \xi_2^2, \quad \ell = \eta_2^2.$$

Τέλος, η τρίτη από τις σχέσεις (3.3) γράφεται

$$\xi_2^4 + \eta_2^4 = \zeta_2^2$$

και

$$0 < \zeta_2 \leq \zeta_2^2 = u \leq u^2 < \zeta_1 < \zeta.$$

Άρα η $x = \xi_2, y = \eta_2, z = \zeta_2$ *είναι μια ακόμη μη τετριμμένη λύση της* $x^4 + y^4 = z^2$ *με* $0 < \zeta_2 < \zeta_1$.
Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι, όταν έχουμε μια μη τετριμμένη λύση $x = \xi_1, y = \eta_1, z = \zeta_1$ *με* $\zeta_1 > 0$, *τότε έχουμε και μια άλλη μη τετριμμένη λύση* $x = \xi_2, y = \eta_2, z = \zeta_2$ *με*

$$0 < \zeta_2 < \zeta_1$$

Άρα έχουμε και μια μη τετριμμένη λύση $x = \xi_3, y = \eta_3, z = \zeta_3$ *με*

$$0 < \zeta_3 < \zeta_2.$$

Άρα έχουμε και μια μη τετριμμένη λύση $x = \xi_4, y = \eta_4, z = \zeta_4$ *με*

$$0 < \zeta_4 < \zeta_3.$$

Αυτό συνεχίζεται επ΄ άπειρον και βρίσκουμε μια απειρία μη τετριμμένων λύσεων $x = \xi_n, y = \eta_n, z = \zeta_n$ *με*

$$0 < \cdots < \zeta_n < \cdots < \zeta_2 < \zeta_1 < \zeta.$$

Αυτό είναι αδύνατον διότι ανάμεσα στους 0 και ζ *υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους (ακέραιοι) αριθμοί. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε δεν υπάρχει μη τετριμμένη λύση* $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$ *με* $\zeta > 0$ *και, επομένως, δεν υπάρχει μη τετριμμένη λύση.*

$\square$