Η Θεωρια Αριθμων στην Εκπαιδευση

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Παράδειγμα Μαθηματικῆς Ἐπαγωγῆς (23-9-2014)

Ἀποδείχθηκαν τὰ ἑξῆς:

1. *Ἂν n θετικοὶ πραγματικοὶ ἔχουν γινόμενο 1, τότε τὸ ἄθροισμά τους εἶναι $\geq n$. Τὸ $=$ νὰ ἰσχύει ἂν καὶ μόνο ἂν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι μὲ 1.*
   Ἔγινε σχολαστικὴ ἀπόδειξη.

2. Μὲ ἁπλῆ ἐφαρμογὴ τοῦ (1) ἀποδείξαμε τὴν ἀνισότητα τοῦ Cauchy: *Ἂν $x_1, \ldots, x_n$ εἶναι θετικοὶ πραγματικοί, τότε*
$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$
   Τὸ $=$ ἰσχύει ἂν καὶ μόνο ἂν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι μεταξύ τους.

3. Μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ (2) στοὺς ἀριθμοὺς
$$a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n} \quad (a, b > 0,\ a \neq b)$$
   παίρνομε τὴν ἀνισότητα
$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a + nb}{n+1}.$$

4. Μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ (3) στοὺς ἀριθμοὺς
$$1,\ \underbrace{1 + \frac{1}{n}, \ldots, 1 + \frac{1}{n}}_{n}$$
   προκύπτει ἡ ἀνισότητα
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$
   ἄρα ἡ ἀκολουθία μὲ γενικὸ τῦπο $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ εἶναι γνησίως αὔξουσα.
   Ἐντελῶς ἀνάλογα, ἐφαρμόζοντας την (3) στοὺς ἀριθμοὺς
$$1,\ \underbrace{1 - \frac{1}{n}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}}_{n}$$

συμπεραίνομε ὅτι ἡ ἀκολουθία μὲ γενικὸ τῦπο $y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ εἶναι γνησίως αὔξουσα. Τέλος, ἀν θεωρήσομε τὴν ἀκολουθία μὲ γενικὸ τῦπο $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, παρατηροῦμε ὅτι $z_n = y_{n+1}^{-1}$, ἄρα ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι γνησίως φθίνουσα καί, προφανῶς, $x_n < z_n$. Συνεπῶς, γιὰ $n > 5$,

$$2 = x_1 < \ldots < x_5 < x_n < z_n < z_5 < \ldots < z_2 < z_1 = 4.$$

Ἀπὸ αὐτὴ τὴ σχέση προκύπτει ὅτι ὑπάρχει τὸ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ (τὸ γνωστὸ e) καὶ ἡ τιμή του εἶναι μεγαλύτερο τοῦ $x_5 = (6/5)^5 = 2.48832$ καὶ μικρότερο τοῦ $y_5 = (6/5)^6 = 2.985984$.