Συνεχή Κλάσματα

Εμμανουήλ Καπνόπουλος Α.Μ 282

5 Νοεμβρίου 2014

Ορισμός και ιδιότητες:

Ορισμός:

Έστω $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ ανεξάρτητες μεταβλητές,
$\forall n \in \mathbb{N}$ σχηματίζουν την ακολουθία $\{[a_0, a_1, ..., a_n] : n \in \mathbb{N}\}$ όπου

$$[a_0, a_1, ..., a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Η ακολουθία αυτή λέγεται συνεχές κλάσμα.

Προφανώς ισχύουν τα εξής:

$$[a_0, a_1, ..., a_n] = \left[a_0, a_1, ...a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right] \tag{1}$$

$$[a_0, a_1, ..., a_n] = \Big[a_0, [a_1, ..., a_n]\Big] \tag{2}$$

Θεώρημα 1:

Έστω p_n και q_n ορίζονται από τους αναδρομικούς τύπους

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{για } n \geq 2$$
$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{για } n \geq 2$$

Τότε ισχύει

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n]$$

Απόδειξη:

Αφού $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ έχουμε

$$\frac{p_0}{q_0} = a_0$$

το οποίο ισχύει.
Για $n = 1$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

το οποίο, επίσης, ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για όλα τα $m < n$.

Τότε με χρήση της (1) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{a_n(a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}}{a_n(a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) + q_{n-2}} \\
&= \frac{\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right)p_{n-2} + p_{n-3}}{\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right)q_{n-2} + q_{n-3}} \\
&= \left[a_0, a_1, ...a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right] \\
&= [a_0, a_1, ...a_{n-2}, a_{n-1}, a_n] \qquad \square
\end{aligned}$$

Για τις εφαρμογές, ενδιαφερόμαστε για την τιμή των p_n και q_n όταν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές $a_0, a_1, ...$ με πραγματικούς αριθμούς. Στα επόμενα θα υποθέσουμε οτι οι $a_1, a_2, ...$ είναι <u>θετικοί</u> πραγματικοί αριθμοί.
Επαγωγικά μπορεί να δείξει κανείς οτι

$$q_n > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Συνεπώς το κλάσμα $\frac{p_n}{q_n}$ ορίζεται και είναι ένας πραγματικός αριθμός.

<u>Πόρισμα 1:</u>

Έστω $a_i \in \mathbb{R}, a_i > 0$ για $1 \leq i \leq n$.
Έστω $k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n$ και θέτουμε $r_k = [a_k, ..., a_n]$.
Τότε ισχύει

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, ..., a_n] &= [a_0, ..., a_{k-1}, r_k] \\
&= \frac{r_k p_{k-1} + p_{k-2}}{r_k q_{k-1} + q_{k-2}}
\end{aligned}$$

Για λόγους ευκολίας θέτουμε $p_{-1} = 1$ και $q_{-1} = 0$.

<u>Θεώρημα 2:</u>

Για $n \geq 0$ ισχύει

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$$

<u>Απόδειξη:</u>

Προφανώς $q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1$.
Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή:

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$$

Εξετάζω για $n = k + 1$

$$\begin{aligned} q_{k+1}p_k - p_{k+1}q_k &= (a_{k+1}q_k + q_{k-1})p_k - (a_{k+1}p_k + p_{k-1})q_k \\ &= p_k q_{k-1} - p_{k-1}q_k \\ &= -(p_{k-1}q_k - p_k q_{k-1}) \\ &= -(-1)^k = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Άρα ισχύει και για $n = k + 1$, άρα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πόρισμα 2:

Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$$

Στα παρακάτω ενδιαφερόμαστε για τιμές που παίρνουν οι p_n και q_n, όταν $a_0, a_1, a_2, ...$ είναι αριθμοί ακέραιοι. Όταν δεχόμαστε την παραπάνω υπόθεση δεχόμαστε πάντοτε και οτι $a_1, a_2, ...$ είναι > 0.

Πόρισμα 3:

Αν $a_1, a_2, ...$ είναι θετικοί ακέραιοι τότε
(i) $(p_n, q_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) η $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αυστηρά αύξουσα

Απόδειξη:

(i) Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 2 ($p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ λόγω υπόθεσης.)
(ii) Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 1 και της υπόθεσης.

Πόρισμα 4:

Έστω $b = [a_0, a_1, ..., a_{n+2}]$.
Τότε

$$q_{n+1}b - p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n}$$

Απόδειξη:

Αντικαθιστούμε στο θεώρημα 2 το n με το $n + 2$.
Άρα

$$q_{n+2}p_{n+1} - p_{n+2}q_{n+1} = (-1)^{n+2}$$

δηλαδή

$$p_{n+2}q_{n+1} - q_{n+2}p_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

διαιρούμε με το q_{n+2}

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} q_{n+1} - p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+2}}$$

Αλλά

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} = b \text{ και } q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n$$

και συνεπώς το αποδεικτέο. □

<u>Θεώρημα 3:</u>

Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n$$

<u>Απόδειξη:</u>

Εφαρμόζουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγης.
Για $n = 1$ ισχύει αφού:
$q_1 p_{-1} - p_1 q_{-1} = a_1 \cdot 1 = a_1(-1)^0$.
Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή:

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$$

Εξετάζω για $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} q_{k+1} p_{k-1} - p_{k+1} q_{k-1} &= (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) p_{k-1} - (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_{k-1} \\ &= a_{k+1} q_k p_{k-1} - a_{k+1} p_k q_{k-1} \\ &= a_{k+1}(q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1}) \\ &= a_{k+1}(-1)^k \end{aligned}$$

άρα ισχύει και για $n = k + 1$, επομένως ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Πόρισμα 5:</u>

Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}$$

<u>Πόρισμα 6:</u>

Αν $a_1, a_2, ...$ είναι <u>θετικοί</u> αριθμοί, τότε η ακολουθία $\frac{p_n}{q_n}$ για άρτιο n, είναι γνήσια αύξουσα και για περιττά n είναι γνήσια φθίνουσα.

Πόρισμα 7:

Αν $b = [a_0, ..., a_{n+2}]$
τότε

$$q_n b - p_n = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{a_{n+2} q_{n+1} + q_n}$$

Απόδειξη:

Στο Θεώρημα 3 αντικαθιστώ το n με $n + 2$ και η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη του Πορίσματος 4.

Θεώρημα 4:

Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, ..., a_1]$$

Απόδειξη:

Για $n = 1 \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1$

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1$$

το οποίο ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για $n = k - 1$, δηλαδή έχουμε:

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}, ..., a_1]$$

Αφού $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{q_k}{q_{k-1}} &= a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \\ &= a_k + \frac{1}{[a_{k-1}, ..., a_1]} \\ &= [a_k, a_{k-1}, ..., a_1] \end{aligned}$$

$\square$

Το συνεχές κλάσμα ενός πραγματικού αριθμού.

Θεωρούμε καταρχήν εν συντομία την περίπτωση ενός ρητού αριθμού b. Έστω $a_0 = [b]$. Αν $b \notin \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$b = a_0 + \frac{1}{b_1} \qquad b_1 > 1, \quad b_1 \in \mathbb{Q}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά βρίσκουμε ότι

$$b_n = a_n + \frac{1}{b_{n+1}}, \qquad a_n = [b_n], \quad b_{n+1} > 1, \quad b_{n+1} \in \mathbb{Q}$$

Με την διαδικασία αυτή θα πρέπει να σταματήσουμε μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Πράγματι, αν

$$b_n = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \text{ με } k, l \text{ θετικούς ακεραίους, τότε}$$

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \frac{k}{l} - a_n \\ &= \frac{k - la_n}{q} \\ &= \frac{c}{l} \end{aligned}$$

με $c < l$ (διότι $0 \leq \frac{c}{l} < 1$ και $a_n = [b_n]$).
Άρα το $b_{n+1} = \frac{l}{c}$, δηλαδή ο παρανομαστής του b_{n+1} είναι μικρότερος του παρανομαστή του b_n. Δηλαδή η διαδικασία σταματάει μετά από πεπερασμένου πλήθους βήματα και συνεπώς ο ρητός αριθμός b γράφεται σαν συνεχές κλάσμα στη μορφή

$$b = [a_0, a_1, ..., a_n] \quad /a_i \in \mathbb{Z} \quad (i = 0, 1, 2, ..., n) \text{ και } a_i \geq 1 \text{ για } i \geq 1.$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι το συνεχές κλάσμα του b μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$b = [a_0, a_1, ..., a_n - 1, 1]$$

Έστω τώρα $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Μπορούμε να γράψουμε, όπως προηγουμένως

$$b = a_0 + \frac{1}{b_1}, \quad a_0 = [b], \quad b_1 > 1$$

και συνεχίζοντας επαγωγικά

$$b_n = a_n + \frac{1}{b_{n+1}}, \quad a_n = [b_n], \quad b_{n+1} > 1.$$

Εφ' όσον $b \notin \mathbb{Q}$ η ακολουθία $b_1, b_2, ...$ δεν τελειώνει.
Άρα για κάθε $n \geq 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$b = [a_0, a_1, ...a_n, b_{n+1}]$$

ή ακόμη συμβολικά

$$b = [a_0, a_1, ...]$$

Από το πόρισμα 3 σχηματίζουμε μια ακολουθία πρώτων μεταξύ των ακεραίων p_n, q_n με $q_n \geq 1$ τέτοιων ώστε

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, ..., a_n]$$

<u>Ορισμός:</u>

Το πηλίκο p_n/q_n θα καλείται n-οστή κύρια σύγκλιση του b και ο a_n το n-οστό μερικό πηλίκο του b.
Ώστε,
από το πόρισμα 4 προκύπτει ότι:

$$q_{n+1}b - p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_{n+2}q_{n+1} + q_n} \tag{4}$$

και από το πόρισμα 7 προκύπτει οτι:

$$q_n b - p_n = \frac{(-1)^n b_{n+2}}{b_{n+2}q_{n+1} + q_n} \tag{5}$$

Πάντοτε ισχύει $a_n < b_n < a_n + 1$ και $a_n \geq 1$ για κάθε $n \geq 1$.
Άρα $0 < q_1 < q_2 < ... < q_n < q_{n+1} < ...$

Θεώρημα 5:

Για τις άρτιες τιμές του n, οι n-οστές κύριες συγκλίσεις του b αποτελούν μια αυστηρώς αύξουσα ακολουθία που συγκλίνει στο b. Για τις περιττές τιμές του n,οι n-οστες κύριες συγκλίσεις του b αποτελούν μια αυστηρά φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο b.
Επιπλέον, ισχύει:

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < \frac{1}{q_{n+1} + q_n} < |q_n b - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

Απόδειξη:

Από το πόρισμα 2 προκύπτει ότι οι διαφορές $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ και $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ έχουν διαφορετικά πρόσημα.
Επίσης,

$$\left(\frac{p_{2\nu}}{q_{2\nu}}\right) \uparrow \text{ και } \left(\frac{p_{2\nu+1}}{q_{2\nu+1}}\right) \downarrow, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Οπότε, από την (5) προκύπτει:

$$\frac{p_{2\nu}}{q_{2\nu}} <^{1} b < \frac{p_{2\nu+1}}{q_{2\nu+1}} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Δηλαδή, αποδείχθηκε το πρώτο μέρος του θεωρήματος.
Από την (5) προκύπτει ακόμα:

$$|q_n b - p_n| = \frac{1}{b_{n+1}q_n + q_{n-1}} \qquad (q_n > 0)$$

Προφανώς,

$$\begin{aligned} b_{n+1}q_n + q_{n-1} &> [b_{n+1}]q_n + q_{n-1} \\ &= a_{n+1}q_n + q_{n-1} \\ &= q_{n+1} \end{aligned}$$

[1] αυστηρά "<" γιατί $b \notin \mathbb{Q}$

Άρα,

$$|q_n b - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

Ισχύει

$$|b - \frac{p_n}{q_n}| > |\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n}|$$

Επίσης, από το πόρισμα 5 έχουμε:

$$\begin{aligned} |\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n}| &= \frac{a_{n+2}}{q_{n+2}q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}}{(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)q_n} \end{aligned}$$

Είναι γνωστό ότι: $a_{n+2} = [b_{n+2}] \geq 1$
Άρα,

$$|b - \frac{p_n}{q_n}| > \frac{1}{(q_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}q_n)q_n}$$

Οπότε,

$$|bq_n - p_n| > \frac{1}{q_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}q_n} > \frac{1}{q_{n+1} + q_n} > \frac{1}{2q_{n+1}}$$

διότι, $a_{n+2} \geq 1$ και $q_{n+1} > q_n$ □

Άρα τελικά έχουμε $\frac{1}{2q_{n+1}} < |q_n b - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$, κι αν διαιρέσουμε με q_n [2] προκύπτει

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} < |b - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

οπότε αν πάρουμε όριο καθώς το $n \to \infty$ προκύπτει ότι [3]

$$|b - \frac{p_n}{q_n}| \to 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{p_n}{q_n} \to b$$

Θέωρημα 6

Αν $n \geq 1$ και $1 \leq q < q_n$, τότε για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$|qb - p| \geq max\{|q_{n-1}b - p_{n-1}|, |q_n b - p_n|\}$$

Απόδειξη:

Υπάρχουν ακέραιοι u και v τέτοιο ώστε $p_{n-1}u + p_n v = p$ και $q_{n-1}u + q_n v = q$ διότι η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος με αγνώστους τους u και v είναι ± 1. Αποκλείεται να είναι $u = 0$, διότι τότε $q = vq_n \geq q_n$, που αντιβαίνει στην υπόθεση. Αν $v \neq 0$, τότε οι u, v είναι ετερόσημοι διότι σε αντίθετη περίπτωση, η συναλήθευση των σχέσεων $q_{n-1}u + q_n v = q$ και $1 \leq q < q_n$ είναι αδύνατη. Ακόμα, οι $q_{n-1}b - p_{n-1}$ και $q_n b - p_n$ είναι

[2] Για $n \neq -1$ για να έχουμε $q_n \neq 0$.
[3] Αφού η q_n είναι αύξουσα και > 0.

ετερόσημοι, άρα οι $u(q_{n-1}b - p_{n-1})$ και $v(q_n b - p_n)$ είναι ομόσημοι, αφού το γινόμενό τους είναι θετικό. Συνεπώς:
$|qb - p| = |(uq_{n-1} + vq_n)b - (up_{n-1} + vp_n)| = |u(q_{n-1}b - p_{n-1}) + v(q_n b - p_n)| = |u(q_{n-1}b - p_{n-1})| + |v(q_n b - p_n)| = |u||(q_{n-1}b - p_{n-1})| + |v||(q_n b - p_n)|$.
Το δεξιότερο μέλος είναι προφανώς $\geq$ του $|q_{n-1}b - p_{n-1}|$ και του $|q_n b - p_n|$, άρα και του $max\{|q_{n-1}b - p_{n-1}|, |q_n b - p_n|\}$.

Πόρισμα 8:

Αν $n \geq 1$ και $1 \leq q < q_n$ τότε για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

$$|b - \frac{p}{q}| > |b - \frac{p_n}{q_n}|$$

Απόδειξη:

Λόγω της υπόθεσης και από το θεώρημα 6, έχουμε:
$|qb - p| \geq |q_n b - p_n|$, άρα $q|b - \frac{p}{q}| \geq q_n|b - \frac{p_n}{q_n}| > q|b - \frac{p_n}{q_n}|$
απ'όπου προκύπτει η αποδεικτέα.

Πόρισμα 9:

Έστω ότι $p, q \in \mathbb{Z}$ με $q \geq 1$ και $\left|b - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$. Τότε το $\frac{p}{q}$ ταυτίζεται με μια κύρια σύγκλιση του b.

Απόδειξη:

Προφανώς, υπάρχει $n \geq 1$ τέτοιο ώστε $q_{n-1} \leq q \leq q_n$. Θα δείξουμε ότι $\frac{p}{q} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.
Κατ'αρχάς, παρατηρούμε ότι, λόγω της $1 \leq q < q_n$ και του θεωρήματος 6, ισχύει $|qb - q| \geq |q_{n-1}b - p_{n-1}|$. Επίσης, λόγω της υπόθεσης, ξέρουμε ότι $|qb - p| < 1/(2q)$.

Άρα,

$$\begin{aligned}\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| &\leq \left|b - \frac{p}{q}\right| + \left|b - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{|qb - p|}{q} + \frac{|q_{n-1}b - p_{n-1}|}{q_{n-1}} \leq \Big(\frac{1}{q} + \frac{1}{q_{n-1}}\Big)|qb - p| \\ &< \Big(\frac{1}{q} + \frac{1}{q_{n-1}}\Big)\frac{1}{2q} \leq \Big(\frac{1}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-1}}\Big)\frac{1}{2q} = \frac{1}{qq_{n-1}}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{qq_{n-1}}$ απ'όπου προκύπτει $|pq_{n-1} - qp_{n-1}| < 1$.
Στην τελευταία σχέση, το αριστερό μέλος είναι μη αρνητικός ακέραιος, άρα αναγκαστικά, $pq_{n-1} - qp_{n-1} = 0$, δηλαδή $\frac{p}{q} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$