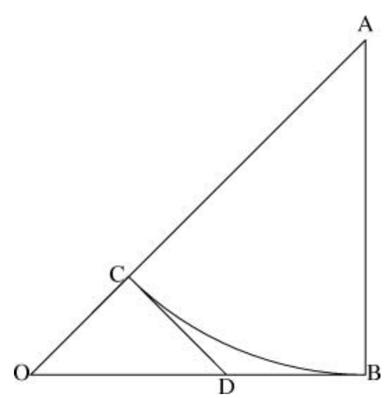
Παρουσίαση 1

Νίκος Κασμερίδης

Ημερομηνία παρουσίασης 22-10-2014

Θέμα 1. Γεωμετρική απόδειξη ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

(Η απόδειξη θα γίνει με άτοπο)
Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός, δηλαδή $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ όπου $(a, b \in \mathbb{Z})$ και $(a, b) = 1$.Τότε, μπορούμε να κατασκευάσουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με όλες τις πλευρές του ακέραιες. Ειδικότερα, οι κάθετες πλευρές έχουν μήκος b και η υποτείνουσα μήκος a (αφού από Πυθαγόρειο θεώρημα είναι $b^2 + b^2 = 2 \cdot b^2 = a^2$)
Κατασκευάζουμε το μικρότερο δυνατό ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο με όλες τις πλευρές του ακέραιες. (βλ. Σχήμα 1 , το τρίγωνο OAB).



Σχήμα 1:

Επομένως OA, OB, AB είναι όλοι ακέραιοι.Με κέντρο A και ακτίνα AB, κατασκευάζω το τόξο BC (δηλαδή AB=BC ως ακτίνες ίδιου κύκλου) , άρα AC ακέραιος. Οπότε και OC=OA−AC είναι επίσης ακέραιος.
Φέρνω CD κάθετο προς την OA στο C. Το τρίγωνο OCD είναι και αυτό ορθογώνιο

ισοσκελές (η γωνία COD είναι 45 μοίρες, άρα και η γωνία CDO είναι 45 μοίρες) , οπότε CD = OC δηλαδή CD ακέραιος.
Τέλος, CD και BD είναι εφαπτόμενες από το ίδιο σημείο D στο ίδιο τόξο BC , δηλαδή CD=BD , άρα και BD ακέραιος , επομένως και OD= OB − BD ακέραιος.
Τελικά , αφού OC,CD,OD ακέραιοι , κατασκευάσαμε ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο CDO με όλες τις πλευρές του ακέραιες, μικρότερο από το OAB (αφού για τις κάθετες πλευρές του, ισχύει CD=BD<OB και OC=CD<OB=AB άρα και η υποτείνουσα OD<AO)(άτοπο ως προς την αρχική υπόθεση)

Θέμα 2. Αν ο θετικός ακέραιος a δεν είναι n-οστή δύναμη ακεραίου, τότε $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Q}$

(Η απόδειξη θα γίνει με άτοπο)
Έστω $\sqrt[n]{a} = \frac{k}{m}$ με $k, m \in \mathbb{Z}$ και $(k, m) = 1$.(παρατήρηση: $m \neq 1$ διότι διαφορετικά θα έπρεπε $a = k^n$ το οποίο αποκλείεται από αρχική υπόθεση)Τότε $a = \frac{k^n}{m^n} \Rightarrow k^n = a \cdot m^n$ δηλαδή $m^n|k^n$. Άρα , ισχύει $\nu_p(m^n) \leq \nu_p(k^n)$ για κάθε πρώτο p, που μας δίνει $n \cdot \nu_p(m) \leq n \cdot \nu_p(k)$ δηλαδή $\nu_p(m) \leq \nu_p(k)$ για κάθε πρώτο p. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $m|k$ (άτοπο ως προς την αρχική υπόθεση)

Θέμα 3. Ο αριθμός $e \notin \mathbb{Q}$

(Η απόδειξη θα γίνει με άτοπο)

Ορισμός: $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (1)

Έστω e ρητός, δηλ $e = \frac{a}{b}$ με $a, b \in \mathbb{Z}$ και $(a, b) = 1$. Ορίζω τον $x = b! \cdot (e - \sum\limits_{n=0}^{b} \frac{1}{n!})$ (2)

δηλαδή $x = b! \cdot (\frac{a}{b} - \sum\limits_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}) = a(b-1)! - (\sum\limits_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!}) = a(b-1)! - (b! + b! + \frac{b!}{2!} + ... + \frac{b!}{b!})$

Παρατηρώ ότι για τους προσθετέους της μορφής $\frac{b!}{n!}$ για $n = 2, ..., (b-1)$ ισχύει $\frac{b!}{n!} = (n+1) \cdot ... \cdot b$ δηλαδή είναι ακέραιοι, οπότε τελικά $x \in \mathbb{Z}$

Για άτοπο,θα δείξω ότι $0 < x < 1$. Από (1) και (2) παίρνω $x = \sum\limits_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} > 0$ (3)

Για όλους τους όρους $\frac{b!}{n!}$ της παραπάνω σειράς με $n \geq b+1$ έχω:

$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)\cdot(b+2)\cdot\ldots\cdot((b+(n-b))} < \frac{1}{(b+1)^{n-b}}$ οπότε προκύπτει η σχέση:

$x = \sum\limits_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} < \sum\limits_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k}$ (4) (με αντικατάσταση $k = n - b$)

Όμως $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{1}{b+1} \cdot (\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}}) = \frac{1}{b} \leq 1$ (5) (γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = \frac{1}{b+1} < 1$)

Συνδυάζοντας τις (3) και (4) προκύπτει ότι $x < 1$ οπότε και από (3) , οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα $0 < x < 1$, που είναι άτοπο, καθώς δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός μεταξύ 0 και 1.