ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ - ΕΡΓΑΣΙΑ 1

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΚΑΤΣΑΛΗΣ

22-10-2014

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι ένα ρητό πολλαπλάσιο του π με $\cos\omega = \sqrt{\rho},\ \rho \in \mathbb{Q}^+$, τότε $\omega \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τον γνωστό τριγωνομετρικό τύπο $\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1$ έχουμε $\cos 2\omega = 2(\sqrt{\rho})^2 - 1 = 2\rho - 1$ οπότε το $\cos 2\omega$ είναι ρητός αριθμός. Επίσης $2\omega \in (0, \pi)$ αφού $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Επικαλούμαι το εξής θεώρημα (το οποίο αποδεικνύω αμέσως μετά):
Θεώρημα: Το μόνο ρητό πολλαπλάσιο του π στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$, το οποίο έχει ρητό συνημίτονο, είναι το $\frac{\pi}{3}$.

Οπότε από το επικαλούμενο θεώρημα θα έχουμε τις εξής περιτώσεις για το 2ω:

α) $2\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ οπότε $2\omega = \frac{\pi}{3}$,

β) $2\omega \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ άρα $\pi - 2\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$. Όμως $\cos(\pi - 2\omega) = \cos(2\omega)$ δηλαδή ρητός, οπότε $\pi - 2\omega = \frac{\pi}{3}$ άρα $2\omega = \frac{2\pi}{3}$,

γ) $2\omega = \frac{\pi}{2}$

Δηλαδή $2\omega \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\}$, άρα $\omega \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\}$.

Θεώρημα

Το μόνο ρητό πολλαπλάσιο του π στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$, το οποίο έχει ρητό συνημίτονο, είναι το $\frac{\pi}{3}$.

Απόδειξη

Έστω $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ρητό πολλαπλάσιο του π, τότε $\alpha = \frac{m}{n}\pi$ όπου m, n θετικοί ακέραιοι με $n \geq 2$ και έστω $\cos\alpha = r$ ρητός ($0 < r < 1$ αφού $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$).

Για να το αποδείξω θα χρησιμοποιήσω αρχικά τον τύπο του $DeMoivre$ για να καταλήξω σε ένα πολυώνυμο του r με ακεραίους συντελεστές από το οποίο, λόγω του ότι το $\cos\alpha = r$ είναι ρητός, θα συμπεράνω τη μορφή που έχει το r αφού πρέπει ο αριθμητής του να διαιρεί τον σταθερό όρο (a_0) και ο παρανομαστής να διαιρεί το συντελεστή της μεγιστοβάθμιας δύναμης του r (a_n).

Από τον τύπο του $DeMoivre$ έχω:
$\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = (r + i\sqrt{1-r^2})^n$
Αναπτύσσω το διώνυμο σύμφωνα με το διωνυμικό τύπο του Νεύτωνα $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$ και έχω:

$\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) =$
$= \binom{n}{0} r^n + \binom{n}{1} r^{n-1} i\sqrt{1-r^2} + \binom{n}{2} r^{n-2}(i\sqrt{1-r^2})^2 + \binom{n}{3} r^{n-3}(i\sqrt{1-r^2})^3 +$
$\cdots + \binom{n}{n-1} r(i\sqrt{1-r^2})^{n-1} + \binom{n}{n}(i\sqrt{1-r^2})^n =$

$= r^n + \binom{n}{1} r^{n-1} i\sqrt{1-r^2} - \binom{n}{2} r^{n-2}(1-r^2) - \binom{n}{3} r^{n-3} i(1-r^2)\sqrt{1-r^2} + \cdots +$
$\binom{n}{n-1} r i^{n-1}(\sqrt{1-r^2})^{n-1} + i^n(\sqrt{1-r^2})^n$

όμως αφού $\sin(n\alpha) = \sin(n\frac{m\pi}{n}) = \sin(m\pi) = 0$ το φανταστικό μέρος είναι 0. Το φανταστικό μέρος αποτελείται από τους όρους του αθροίσματος που η δύναμη του i είναι περιττός αριθμός. Μάλιστα αν το n είναι περιττός θα ανήκει και ο τελευταίος παράγοντας, ενώ αν το n είναι άρτιος θα ανήκει ο προτελευταίος παράγοντας. Όλοι αυτοί οι όροι έχουν κοινό παράγοντα το $\sqrt{1-r^2}$ ο οποίος διαγράφεται αφού είναι διάφορος του μηδενός ($0 < r < 1$). Οπότε έχουμε:

Αν n περιττός:
$\binom{n}{1} r^{n-1} - \binom{n}{3} r^{n-3}(1-r^2) + \binom{n}{5} r^{n-5}(1-r^2)^2 - \binom{n}{7} r^{n-7}(1-r^2)^3 + \cdots +$
$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(rn)^{1-1}(1-r^2)^{\frac{n-1}{2}} = 0$

Αν n άρτιος:
$\binom{n}{1} r^{n-1} - \binom{n}{3} r^{n-3}(1-r^2) + \binom{n}{5} r^{n-5}(1-r^2)^2 - \binom{n}{7} r^{n-7}(1-r^2)^3 + \cdots +$
$(-1)^{\frac{n-2}{2}}(rn)^{2-1}(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} = 0$

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση έχουμε:
$\binom{n}{1} r^{n-1} - \binom{n}{3} r^{n-3}(1-r^2) + \binom{n}{5} r^{n-5}(1-r^2)^2 - \binom{n}{7} r^{n-7}(1-r^2)^3 + \cdots +$
$(-1)^{\frac{n-e}{2}}(rn)^{e-1}(1-r^2)^{\frac{n-e}{2}} = 0$ **(1)**

όπου $e = 1$ αν το n είναι περιττός και $e = 2$ αν το n είναι άρτιος. Αναλύοντας τα διώνυμα $(1-r^2)^k$ και εκφράζοντας το αριστερό μέρος ως πολυώνυμο του r έχουμε:

$$\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} \cdots + \binom{n}{n+1-e}\right] r^{n-1} + \cdots + (-1)^{\frac{n-e}{2}}(nr)^{e-1} = 0$$

Όμως $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}\cdots+\binom{n}{n+1-e}=2^{n-1}$ (δείτε άσκηση 1).

Οπότε έχουμε:

$2^{n-1}r^{n-1}+\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}=0$ αν το n είναι περιττός αφού τότε όπως είπαμε $e=1$ **(2)**

$2^{n-1}r^{n-1}+\cdots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}nr=0$ αν το n είναι άρτιος αφού τότε όπως είπαμε $e=2$ **(2′)**

Όμως και στην (2) και στην (2′) οι συντελεστές των δυνάμεων του r είναι ακέραιοι και το $r=\cos\alpha$ είναι ρητός, οπότε σύμφωνα με την άσκηση 12, παράγραφος 1.6, που λύσαμε στο Φυλλάδιο Ασκήσεων 1, έχουμε τις εξής 2 περιπτώσεις:

α) Ο n είναι περιττός οπότε έχουμε το πολυώνυμο της (2). Τότε $r=\frac{k}{l}$ με $(k,l)=1$ και το k διαιρεί τον συντελεστή $a_0=1$ ενώ το l διαιρεί τον συντελεστή της μεγιστοβάθμιας δύναμης του r (στην περίπτωσή μας τον $a_{n-1}=2^{n-1}$), δηλαδή $k\mid 1$ και $l\mid 2^{n-1}$. Άρα αφού $0<r<1$ έχουμε $r=\frac{1}{2^s}$, $1\leq s\leq n$.

β) Ο n είναι άρτιος οπότε έχουμε το πολυώνυμο της (2′). Τότε $r=\frac{k}{l}$ με $(k,l)=1$ και το l διαιρεί τον συντελεστή της μεγιστοβάθμιας δύναμης του r (στην περίπτωσή μας τον $a_{n-1}=2^{n-1}$), δηλαδή $l\mid 2^{n-1}$. Επίσης αν διαιρέσουμε τη (2′) με r $(0<r<1)$ βλέπουμε ότι το r συνεχίζει να είναι ρίζα του πολυωνύμου που προκύπτει οπότε το k διαιρεί τον συντελεστή $a_0=n$ δηλαδή $k\mid n$. Άρα αφού $0<r<1$ έχουμε $r=\frac{k}{2^s}$, $1\leq s\leq n$. Ο k είναι περιττός αφού $(k,l)=1$ και ο l είναι άρτιος.

Οπότε σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $r=\frac{k}{2^s}$ με k περιττό διαιρέτη του n και $s\leq n$.

Θα δείξω ότι $k=1$ και $s=1$, δηλαδή $r=\frac{1}{2}$ οπότε $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Αντικαθιστώντας τη συγκεκριμένη τιμή του $r=\frac{k}{2^s}$ στην (1) έχουμε:

$n(\frac{k}{2^s})^{n-1}-\binom{n}{3}(\frac{k}{2^s})^{n-3}(1-(\frac{k}{2^s})^2)+\binom{n}{5}(\frac{k}{2^s})^{n-5}(1-(\frac{k}{2^s})^2)^2-\binom{n}{7}(\frac{k}{2^s})^{n-7}(1-(\frac{k}{2^s})^2)^3+\cdots+(-1)^{\frac{n-e}{2}}((\frac{k}{2^s})n)^{e-1}(1-(\frac{k}{2^s})^2)^{\frac{n-e}{2}}=0$

Βγάζοντας ως κοινό παράγοντα τον $\frac{1}{2^{s(n-1)}}$ και διαγράφοντας τον έχουμε:

$nk^{n-1}-\binom{n}{3}k^{n-3}(2^{2s}-k^2)+\binom{n}{5}k^{n-5}(2^{2s}-k^2)^2-\binom{n}{7}k^{n-7}(2^{2s}-k^2)^3+\cdots+(-1)^{\frac{n-e}{2}}(nk)^{e-1}(2^{2s}-k^2)^{\frac{n-e}{2}}=0$ **(3)**

Όμως $2^{2s}-k^2\equiv -k^2\equiv -1 \pmod 4$ αφού k είναι περιττός (δείτε άσκηση 2). Τότε όμως ο αριθμός $2^{2s}-k^2$ που είναι θετικός (αφού $2^{2s}(1-(\frac{k}{2^s})^2)=2^{2s}(1-r^2)$ και $0<r<1$) είναι μεγαλύτερος από 1.

Άρα ο $2^{2s}-k^2$ έχει έναν πρώτο διαιρέτη. Θα δείξω ότι ο μόνος πρώτος διαιρέτης που έχει είναι το 3.

Υποθέτω ότι ο $2^{2s}-k^2$ έχει ένα πρώτο διαιρέτη $p>3$ για να οδηγηθώ σε άτοπο. Τότε ο p δεν γίνεται να διαιρεί το k (αφού τότε θα διαιρούσε και το k^2 άρα και το 2^{2s}) και άρα βλέποντας την (3) συμπεραίνουμε ότι ο p διαιρεί το n (αφού διαιρεί όλους τους όρους θα διαιρεί και τον

πρώτο). Έστω p^t η μεγαλύτερη δύναμη του p που διαιρεί το n.
Αν εξαιρέσουμε τον πρώτο όρο της (3) οι υπόλοιποι έχουν την μορφή:

$$\begin{pmatrix} n \\ 2l+1 \end{pmatrix} k^{n-2l-1}(2^{2s}-k^2)^l = \begin{pmatrix} n-1 \\ 2l \end{pmatrix} \frac{k^{n-2l-1}n(2^{2s}-k^2)^l}{2l+1}, l \geq 1 \ \mathbf{(4)}$$

Αφού το $\begin{pmatrix} n-1 \\ 2l \end{pmatrix}$ είναι ακέραιος, ο p θα συμμετέχει στην παραγοντοποίησή του σε πρώτους με έναν μή αρνητικό εκθέτη $\nu_p(\begin{pmatrix} n-1 \\ 2l \end{pmatrix}) \geq 0$. Επίσης ας υποθέσουμε ότι $p^x \mid 2l+1$ είναι η μεγαλύτερη δύναμη του p που διαιρεί το $2l+1$, τότε ο p συμμετέχει στην παραγοντοποίηση της (4) (δηλαδή σε κάθε όρο της (3) εκτός τον πρώτο της) με μία δύναμη όχι μικρότερη από $t+l-x$ (αφού το $2^{2s}-k^2$ είναι υψωμένο στη δύναμη l).
Αν $t+l-x \leq t$ τότε $l-x \leq 0$ δηλαδή $l \leq x$ και συνεπώς $2l+1 \geq p^x \geq p^l \geq 5^l$ ΑΔΥΝΑΤΟΝ γιατί για κάθε $l \geq 1$ ισχύει $2l+1 < 5^l$.
Άρα $t+l-x \geq t+1$ και άρα κάθε όρος, μετά τον πρώτο, στην (3) διαιρείται με το p^{t+1} ΑΔΥΝΑΤΟΝ αφού τότε θα έπρεπε και ο πρώτος όρος της (3), δηλαδή ο n αφού ο k όπως αναφέραμε δεν μπορεί να διαιρείται με το p, να διαιρείται από το p^{t+1} όμως η μεγαλύτερη δύναμη του p που τον διαιρεί είναι η p^t.

Άρα με την υπόθεση ότι $2^{2s}-k^2$ έχει ένα πρώτο διαιρέτη $p>3$ οδηγηθήκαμε σε ΑΤΟΠΟ, οπότε συμπεραίνουμε ότι ο $2^{2s}-k^2$ δεν μπορεί να έχει πρώτο διαιρέτη μεγαλύτερο από 3. Αφού όμως είναι περιττός μεγαλύτερος από 1 θα έχουμε $2^{2s}-k^2=3^h$ δηλαδή $(2^s+k)(2^s-k)=3^h$.
Όμως το 3 δεν μπορεί να διαιρεί και τους δύο όρους στα αριστερά, αφού τότε θα διαιρούσε και το άθροισμά τους που είναι 2^{s+1}, και άρα ο μικρότερος από τους δύο όρους ισούται με ένα, δηλαδή $2^s-k=1$. Οπότε $2^s+k=3^h$ και $2^s-k=1$ και προσθέτωντάς τους κατά μέλη έχουμε $2^{s+1}=3^h+1$ δηλαδή $2^{s+1}-1=3^h$, άρα $2^{s+1}-1 \equiv 0 \pmod 3$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το $s+1$ είναι άρτιος (αφού αν ήταν περιττός θα είχαμε $2^{s+1}-1 \equiv 1 \pmod 3$, δείτε άσκηση 3).
Οπότε έχουμε $2^{s+1}-1=3^h$, δηλαδή $2^{\frac{(s+1)2}{2}}-1=3^h$, δηλαδή $(2^{\frac{s+1}{2}}-1)(2^{\frac{s+1}{2}}+1)=3^h$.
Δουλεύοντας παρόμοια με πριν συμπεραίνουμε και πάλι ότι το 3 δεν μπορεί να διαιρεί και τους δύο όρους στα αριστερά, και άρα ο μικρότερος από τους δύο, που είναι ο $2^{\frac{s+1}{2}}-1$ θα είναι ένα, δηλαδή $2^{\frac{s+1}{2}}-1=1$ και ο άλλος θα είναι 3^h, δηλαδή $2^{\frac{s+1}{2}}+1=3^h$.
Αφού $2^{\frac{s+1}{2}}-1=1$ έχουμε ότι $2^{\frac{s+1}{2}}=2$ δηλαδή $\frac{s+1}{2}=1$ δηλαδή $s=1$. Αυτό σημαίνει ότι $r=\frac{k}{2^s}=\frac{k}{2}$ και αφού $0<r<1$ συμπεραίνουμε ότι $r=\frac{1}{2}$ οπότε $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δείξτε ότι $2^{n-1} = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix} \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n+1-k \end{pmatrix}$ όπου $k=1$ αν ο n είναι περιττός και $k=2$ αν ο n είναι άρτιος.

Υπόδειξη

Αναλύστε το $2^n = (1+1)^n$ χρησιμοποιώντας το διώνυμο του Νεύτωνα και παίρνετε τη σχέση $2^n = \cdots$ **(1)**.
Αναλύστε το $0 = (1-1)^n$ χρησιμοποιώντας το διώνυμο του Νεύτωνα και παίρνετε τη σχέση $0 = \cdots$ **(2)**.
Πάρτε τις περιπτώσεις το n να είναι άρτιο ή περιττό.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δείξτε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου είναι της μορφής $4k+1, k \in \mathbb{Z}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο k ισχύει:
$2^k - 1 \equiv 0 \pmod 3$ αν ο k άρτιος
$2^k - 1 \equiv 1 \pmod 3$ αν ο k περιττός