Υπερβατικοί Αριθμοί και Θεώρημα του Liouville

Χρήστος Κονταράτος

14 Νοεμβρίου 2014

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Ως γνωστόν οι δύο μεγάλες κατηγορίες των πραγματικών αριθμών είναι οι ρητοί και οι άρρητοι. Οι άρρητοι αριθμοί είναι η κατηγορία με την οποία θα ασχοληθούμε. Για την ανάλυση όμως του συγκεκριμένου θέματος θα χρειαστεί να χωρίσουμε τους πραγματικούς σε αλγεβρικούς και υπερβατικούς.

- **Αλγεβρικοί** λέγονται οι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι μπορούν να εκφρασθούν ως ρίζες μίας αλγεβρικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, όπως ο $\sqrt{3}$ ο οποίος είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 3 = 0$.

- **Υπερβατικοί** λέγονται οι μη αλγεβρικοί αριθμοί. Ονομάσθηκαν έτσι από τον Euler διότι ¨ Υπερβαίνουν τη δύναμη των αλγεβρικών μεθόδων¨.

Είναι λογικό η διαίσθησή μας να μας λέει ότι οι υπερβατικοί αριθμοί είναι άπειροι, πράγμα που το απέδειξε ο Cantor το 1874 (το σύνολο των αλγεβρικών είναι αριθμήσιμο, το σύνολο των πραγματικών υπεραριθμήσιμο άρα και το σύνολο των υπερβατικών είναι υπεραριθμήσιμο). Ο πρώτος αριθμός που αποδείχθηκε υπερβατικός, χωρίς να έχει κατασκευαστεί για αυτό το σκοπό, ήταν ο e από τον Hermite το 1873. Όμως, πριν την κατασκευή του πρώτου υπερβατικού αριθμού από τον Liouville το 1844, οι μαθηματικοί υποπτεύονταν την ύπαρξη των υπερβατικών χωρίς όμως να έχουν ανακαλύψει κανένα. Ο Liouville, αν και δεν κατάφερε να αποδείξει την υπερβατικότητα του π που προσπαθούσε, απέδειξε κάποια πολύ σημαντικά γενικά θεωρήματα τα οποία έριξαν φως στη μελέτη τόσο των αλγεβρικών, όσο και των υπερβατικών αριθμών. Ένα από αυτά είναι το παρακάτω.

2 Το Θεώρημα του Liouville

Ορισμός :
Έστω a αλγεβρικός αριθμός και $d_1, d_2, d_3, ...$ οι βαθμοί των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές στα οποία ο a μπορεί να είναι ρίζα. Βαθμός του αλγεβρικού αριθμού a ονομάζεται το $min\{d_1, d_2, d_3, ...\}$.

Πρόταση :
Ένας πραγματικός αριθμός $a \neq 0$ είναι ρητός αν και μόνον εαν είναι αλγεβρικός πρώτου βαθμού.
Απόδειξη :
Έστω ότι είναι ρητός κι έχει τη μορφή $a = \frac{p}{q}, \ \ p, q \in \mathbb{Z}$ τότε το πολυώνυμο με το μικρότερο βαθμό, του οποίου ο a είναι ρίζα, είναι το $g(x) = qx - p$. Συνεπώς είναι αλγεβρικός πρώτου βαθμού.
Έστω ότι ο a είναι αλγεβρικός πρώτου βαθμού. Έπεται ότι είναι ρίζα πολυωνύμου πρώτου βαθμού με ακέραιους συντελεστές. Τότε θα ισχύει ότι $qa - p =$ όπου $p, q \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς $a = \frac{p}{q}$.
Άρα ένας υπερβατικός αριθμός είναι, εξ ορισμού, άρρητος.

Θεώρημα :
Αν ο a είναι αλγεβρικός αριθμός βαθμού $d > 1$, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος $M = M(a)$ με την ιδιότητα $|a - \frac{p}{q}| > \frac{1}{M \cdot q^d}$, για οποιουσδήποτε ακεραίους $p, q (q > 0)$.

Απόδειξη :
Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι το a δεν είναι ρητός, αν ήταν θα ήταν αλγεβρικός πρώτου βαθμού. Αφού ο a είναι αλγεβρικός, τότε θα είναι ρίζα ενός πολυωνύμου $f(x) = b_0 x^d + b_1 x^{d-1} + \ldots + b_d$ με ακέραιους συντελεστές. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ είχε ρίζες ρητούς αριθμούς τότε το a θα ήταν βαθμού μικρότερου του d, οπότε δεν έχει καμία ρητή ρίζα. Έστω $f'(x)$ η παράγωγος της f. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος M τέτοιος ώστε $|f'(x)| < M$ για κάθε x με $a - 1 < x < a + 1$. Τώρα θα δείξουμε ότι αν $\frac{p}{q} \quad q > 0$ είναι οποιοσδήποτε ρητός, τότε $|a - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{M \cdot q^d}$

Αν $|a - \frac{p}{q}| > 1$ τότε είναι προφανές ότι ισχύει. Έστω ότι $|a - \frac{p}{q}| \leq 1$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι, για κάποιο c όπου $a - 1 < c < a + 1$ ισχύει το εξής

$$|f(\frac{p}{q})| = |f(a) - f(\frac{p}{q})| = |f'(c)| \cdot |a - \frac{p}{q}|$$

άρα

$$|f(\frac{p}{q})| < M \cdot |a - \frac{p}{q}|$$

οπότε

$$|q^d \cdot f(\frac{p}{q})| < Mq^d|a - \frac{p}{q}| \quad (1)$$

Όπως είπαμε στην αρχή, το $\frac{p}{q}$ δεν μπορεί να είναι ρίζα του πολυωνύμου. Συνεπώς το $|q^d \cdot f(\frac{p}{q})|$ είναι θετικός ακέραιος κι άρα μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Άρα

$$|a - \frac{p}{q}| > \frac{1}{M \cdot q^d}$$

Το παραπάνω Θεώρημα επέτρεψε στον Liouville να κατασκευάσει τον πρώτο υπερβατικό αριθμό. Τον

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

Ο αριθμός αυτός έχει τη μορφή

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,1100010\ldots0100\ldots$$

και θα αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει καμία αλγεβρική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές της οποίας να είναι λύση.

3 Η Υπερβατικότητα του ξ

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,1100010\ldots$$

Ο ξ είναι ένας αριθμός μικρότερος της μονάδος, ο οποίος έχει παντού μηδενικά εκτός από τις θέσεις $n!$ $(1, 2, 6, 24, 120\ldots)$. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι ο αριθμός αυτός είναι άρρητος καθ'οτι στερείται περιοδικότητος.

Πρόταση : Ο αριθμός $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ είναι υπερβατικός

Απόδειξη : Πρώτα θα βρούμε μια ιδιότητα που ισχύει για τον αριθμό ξ, έπειτα θα υποθέσουμε ότι ο ξ είναι αλγεβρικός και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Έστω N ένας αυθαίρετος φυσικός αριθμός. Για $n > N$ θα ορίσουμε ως

$$\xi_n = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \ldots + \frac{1}{10^{n!}} = \frac{p(n)}{10^{n!}} = \frac{p(n)}{q(n)}$$

(όπου $q(n) = 10^{n!},\ p(n) = 10^{n!-1!}+10^{n!-2!}+\ldots+10^{n!-k!}+\ldots+10^{n!-(n-1)!}+1)$)

Έχουμε ότι $|\xi - \xi_n| = 10^{-(n+1)!} + 10^{-(n+2)!} + \ldots$

Δηλαδή

$$|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}| = 10^{-(n+1)!} \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} 10^{-(n+j+1)!+(n+1)!})$$

Όμως $(n+1)![(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+j+1)-1] > (n+1)!(n+j)$
Οπότε $(n+1)![(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+j+1)-1] > j$.

Άρα $10^{(n+j+1)!-(n+1)!} > 10^j > 2^j$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$.

Οπότε $\sum_{j=0}^{\infty} 10^{-(n+j+1)!+(n+1)!} < \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}$.

Συνεπώς

$$|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}| < 2 \cdot 10^{-(n+1)!}$$

$n+1 > N$ άρα

$$|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}| < 2 \cdot q(n)^{-N}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Έστω τώρα ότι ο ξ είναι αλγεβρικός αριθμός βαθμού $k < N$. Τότε, από το παραπάνω θεώρημα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $M = M(\xi) \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι

$$|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}| > \frac{1}{M \cdot q(n)^k}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Καταλήγουμε δηλαδή στο συμπέρασμα

$$\frac{2}{q(n)^N} > \frac{1}{M \cdot q(n)^k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή υπάρχει $M = M(\xi) \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{(10^{N-k})^{n!}}{2} < M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $N - k \geq 1$ (αφού $N, k \in \mathbb{N}$ και $N > k$). Άτοπο.

Αυτό σημαίνει ότι ο ξ δεν μπορεί να είναι αλγεβρικός αριθμός βαθμού μικρότερου του N. Όμως το N είναι αυθαίρετο, οπότε τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Συνεπώς ο ξ δεν μπορεί να είναι αλγεβρικός οποιουδήποτε βαθμού άρα είναι υπερβατικός.

4 Αριθμοί του Liouville

Εδώ θα γενικεύσουμε λίγο τα παραπάνω και θα δούμε μία κατηγορία υπερβατικών αριθμών. Τους αριθμούς του Liouville.

Ορισμός :
Αριθμός του Liouville λέγεται ένας αριθμός αν είναι άρρητος κι αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν ακέραιοι $p, q \quad q > 1$ τέτοιοι ώστε

$$|\xi - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$$

Πρόταση :
Κάθε αριθμός του Liouville είναι υπερβατικός.

<u>Απόδειξη</u> :
Ας υποθέσουμε ότι ο ξ είναι αριθμός του Liouville και είναι αλγεβρικός βαθμού n. Από το θεώρημα, υπάρχει ακέραιος M τέτοιος ώστε

$$|\xi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{M \cdot q^n}$$

για κάθε ακέραιο $p, q \quad q > 1$. Διαλέγω $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $2^k \geq 2^n M$. Αφού το ξ είναι και αριθμός του Liouville υπάρχουν $p, q \in \mathbb{Z} \quad q > 1$ τέτοιοι ώστε

$$|\xi - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^k}$$

Άρα ισχύει ότι $\frac{1}{q^k} > \frac{1}{M \cdot q^n}$. Συνεπώς $M > q^{k-n} \geq 2^{k-n} \geq M$. Άτοπο