Η Θεωρια Αριθμων στην Εκπαιδευση

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Θέματα ποὺ συζητήθηκαν στὶς 26-9-2014

1. «Ὑπάρχουν ἄρρητοι ἀριθμοί»;

   - Σύμμετρα εὐθύγραμμα τμήματα.
   - Δύο εὐθύγραμμα τμήματα ἔχουν μήκη μὲ ρητὸ λόγο. Ποιὰ εἶναι ἡ γεωμετρικὴ "ἑρμηνεία" αὐτοῦ.
   - Γεωμετρικὴ διατύπωση τῆς πρότασης $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. *Συνολοθεωρητικὴ* (μὴ κατασκευαστικὴ) ἀπόδειξη τῆς ὕπαρξης ἀρρήτων.

   - Ἀποδείξαμε "γραφικὰ" ὅτι τὸ σύνολο τῶν κλασμάτων εἶναι ἀριθμήσιμο. Βλ. π.χ. [**;**, Ἄσκηση 5(b), σελ. 371].
   - Μὲ τὸ "διαγώνιο ἐπιχείρημα τοῦ Cantor" ἀποδείξαμε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ διαστήματος $(0\,,\,1)$ ἀπαρτίζουν μὴ ἀριθμήσιμο σύνολο, ἄρα καὶ τὸ $\mathbb{R}$ εἶναι μὴ ἀριθμήσιμο σύνολο. Ἄρα, ἀφοῦ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{Ἄρρητοι}\}$, ἕπεται ὅτι, ὄχι μόνον ὑπάρχουν ἄρρητοι, συνεπῶς εἶναι ὑπεραριθμήσιμο.[1]

3. *Ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ* καί, εἰδικώτερα, *ἀλγεβρικοὶ ἀκέραιοι*. Οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοί, ποὺ δὲν εἶναι ἀλγεβρικοί, χαρακτηρίζονται *ὑπερβατικοί*. Δὲν ὑπάρχει προφανὲς παράδειγμα συγκεκριμμένου ὑπερβατικοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ ἀπόδειξη ὑπάρξεως ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν μπορεῖ, κατ' ἀρχάς, νὰ γίνει συνολοθεωρητικά: Γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, ἔστω $\mathbf{P}_n$ τὸ σύνολο τῶν πολυωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς, μὲ ἀκέραιους συντελεστές, βαθμοῦ n. Δείξαμε τὰ ἑξῆς:

   - Τὸ $\mathbf{P}_n$ εἶναι ἀριθμήσιμο σύνολο.

[1] Τὸ "μοντέλο" ἀριθμήσιμης ἕνωσης ἀριθμησίμων συνόλων εἶναι τὸ σύνολο τῶν κλασμάτων:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots & \frac{2}{n} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \cdots & \frac{3}{n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

- Ἔστω R_n τὸ σύνολο τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ποὺ εἶναι ρίζες πολυωνύμων βαθμοῦ n, δηλαδή,

  $$R_n = \{\alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \text{ γιὰ κάποιο } f \in \mathbf{P}_n\}.$$

  Ἀφοῦ κάθε πολυώνυμο βαθμοῦ n ἔχει τὸ πολὺ n διαφορετικὲς ρίζες, ἕπεται ὅτι τὸ σύνολο R_n εἶναι ἀριθμήσιμο.

- Τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι προφανῶς ἡ ἕνωση ὅλων τῶν R_n, ἄρα εἶναι ἀριθμήσιμη ἕνωση ἀριθμησίμων συνόλων, ἄρα εἶναι ἀριθμήσιμο σύνολο. Ὅμως,

  $$\underbrace{\text{ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ}}_{\text{μη αριθμ.}} = \underbrace{\text{ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ}}_{\text{αριθμ.}} \cup \text{ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΙ},$$

  ἄρα, τὸ σύνολο τῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν, ὄχι μόνο δὲν εἶναι κενό, ἀλλὰ εἶναι ὑπεραριθμήσιμο.

Ἀναφορὲς

[1] M. Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Π.Ε.Κ., Ηράκλειο 1991.