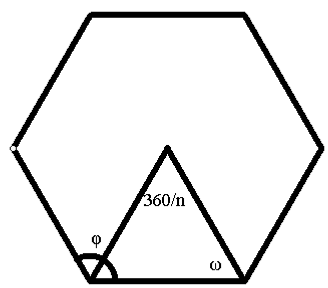
Γιατί οι μέλισσες κάνουν εξαγωνικές τις κηρήθρες τους ;

Χριστίνα Δασκαλάκη Α.Μ. 299

Ημερομηνία παράδοσης 29-10-2014

Θεωρούμε ένα κανονικό ν-γωνο και σημειώνουμε μια γωνία του καθώς και τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου που δημιουργείται από μια πλευρά του.
Θέλουμε να βρούμε ποια κανονικά πολύγωνα καλύπτουν ακριβώς το επίπεδο,δηλαδή χωρίς να υπάρχουν κενά αναμεσά τους.



Σχήμα 1: τυχαίο ν-γωνο

Αν συμβολίσουμε με ω τις δυο ίσες γωνίες της βάσης του ισοσκελούς και με $\frac{360}{\nu}$ τη γωνία της κορυφής τότε ισχύει η σχέση:

$$2\omega + \frac{360}{\nu} = 180$$

οπότε

$$\omega = 90 - \frac{180}{\nu}$$

Συνεπώς αν ϕ είναι η γωνια του κανονικου ν-γωνου θα ισχύει διαδοχικά:

$$\phi = 2\omega = 180 - \frac{360}{\nu}$$

$$\phi = (1 - \frac{2}{\nu})180$$

$$\phi = \frac{\nu - 2}{\nu}180$$

Τα ν-γωνα θα τα επιλέξουμε έτσι ώστε αν προσθέσουμε ακέραιες φορές τη γωνία ϕ το άθροισμα των γωνιών να ισούται με 360 μοίρες.
Αναγκαία και ικανή συνθήκη ειναι λοιπόν

$$\kappa\phi = 360, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Η σχέση αυτή διαδοχικά γίνεται:

$$\kappa\frac{\nu - 2}{\nu}180 = 360$$

$$\kappa\frac{\nu - 2}{\nu} = 2$$

$$\kappa = \frac{2\nu}{\nu - 2}$$

Ψάχνουμε λοιπόν τα ν για τα οποία

$$\frac{2\nu}{\nu - 2} \in \mathbb{Z}$$

Ισχύει

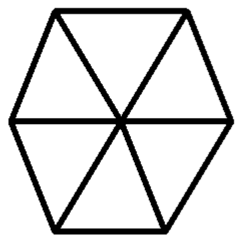
$$\frac{2\nu}{\nu - 2} = \frac{2(\nu - 2) + 4}{\nu - 2} = 2 + \frac{4}{\nu - 2}$$

Αρκεί λοιπόν $\frac{4}{\nu-2} \in \mathbb{Z}$

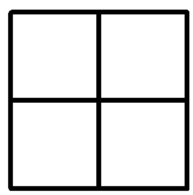
Αυτό ισχύει όταν $\nu - 2$ είναι διαιρέτης του 4 δηλαδη όταν $\nu - 2 \in \{1, 2, 4\}$ συνεπώς όταν $\nu \in \{3, 4, 6\}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι απ΄ όλα τα κανονικά επίπεδα σχήματα, εκείνα που η μέλισσα θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει για την κατασκευή των κελιών της είναι τρία.

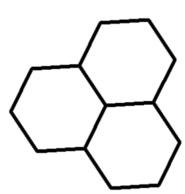
Το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό εξάγωνο .



Σχήμα 2: κάλυψη του επιπεδου απο ισοπλευρα τριγωνα



Σχήμα 3: κάλυψη του επιπέδου από τετράγωνα



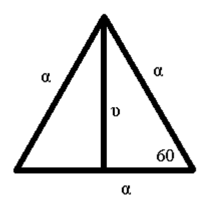
Σχήμα 4: κάλυψη του επιπέδου από κανονικά εξάγωνα

Γιατί όμως η μέλισσα επιλέγει το κανονικό εξάγωνο ;

Κάθε κελλί θεωρείται ως ορθό πρίσμα δεδομένου ύψους, του οποίου η βάση είναι κανονικό ν-γωνο.Γνωρίζουμε ότι η μέλισσα σε κάθε κελλί τοποθετεί την ίδια ποσότητα

μελιού. Ας υποθέσουμε ότι το απαιτούμενο εμβαδόν για κάθε κελί είναι μια τετραγωνική μονάδα δηλαδή E=1.
Αν κατασκεύαζε τετραγωνικές κυψελίδες αυτές θα είχαν πλευρά μια μονάδα μήκους διότι $E = a^2$ οπότε $1 \times 1 = 1$ τετραγωνική μονάδα.

Αν κατασκεύαζε ισόπλευρες τριγωνικές κυψελίδες , τι μήκος έπρεπε να είχε η κάθε πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου ώστε το εμβαδον του να είναι ισοδύναμο με μια τετραγωνική μοναδα ;



Σχήμα 5: ισόπλευρο τρίγωνο

Συμβολίζοντας με a την πλευρά του ισοπλέυρου τριγώνου και με υ το ύψος του, προκύπτει

$$E = \frac{a\upsilon}{2} = a^2 \frac{\sin(60)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

Επιλύουμε τώρα ως προς a και για εμβαδόν μια τετραγωνική μονάδα, βρίσκουμε ότι

$$a^2 = \frac{4E}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

άρα

$$a = \frac{2}{3^{\frac{1}{4}}}$$

Συνεπώς το τρίγωνο θα έπρεπε να είχε μήκος πλευράς κατά προσέγγιση 1,52 μονάδες μήκους.

Αν κατά τον ίδιο τρόπο υπολογίσουμε το μήκος της πλευράς του ισοδύναμου κανονικού εξαγώνου απο τον τύπο του εμβαδού

$$E = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2$$

βρίσκουμε ότι ισχύει

$$a^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}E = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

οπότε

$$a = \frac{\sqrt{2}(3^{\frac{1}{4}})}{3}$$

που κατά προσέγγιση είναι 0,62... μονάδες μήκους.
Επομένως, στην περίπτωση της τετραγωνικής κατασκευής η περίμετρος του τετραγώνου ισούται με

$$4 \times 1 = 4$$

μονάδες μήκους.
Στην περίπτωση κατά την οποία η μέλισσα κατασκεύαζε τριγωνικά κελιά το καθένα θα είχε περίμετρο κατά προσέγγιση

$$3 \times 1,52 = 4,56$$

μονάδες μήκους,
ενώ στην περίπτωση της εξαγωνικής κατασκευής η περίμετρος του κάθε κελιού θα ήταν κατά προσέγγιση

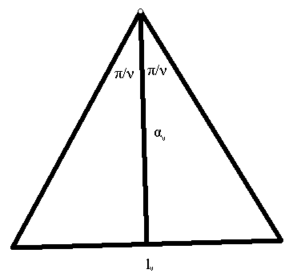
$$6 \times 0,62 = 3,72...$$

μονάδες μήκους.

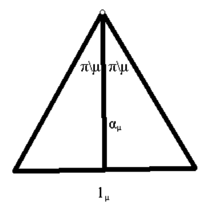
Συμπέρασμα: Παρατηρούμε ότι η επιλογή του εξαγωνικού σχήματος δεν είναι τυχαία. Αφενός καλύπτει ακριβώς το επίπεδο χωρίς να υπάρχουν κενά, αφετέρου, για δεδομένο όγκο κηρήθρας, είναι το σχήμα με τη μικρότερη περίμετρο βάσης.Δηλαδή η μέλισσα δαπανά λιγότερο κερί για την κατασκευή των κελιών της.Έτσι αξιοποιεί με τον καλύτερο τρόπο τον διαθέσιμο χωρο κάνοντας οικονομία υλικού.

Κλείνοντας θα δείξουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση: Για κάθε $\nu > 2$ έστω Π_ν η περίμετρος του κανονικού ν-γωνου μοναδιαίου εμβαδού,τότε η ακολουθία Π_ν είναι φθίνουσα.
Απόδειξη:
Θεωρώ ένα κανονικό μ-γωνο πλευράς l_μ και ένα κανονικό ν-γωνο πλευράς l_ν όπου $\mu > \nu$ τότε το μ-γωνο αποτελείται απο μ ισοσκελή τρίγωνα με βάση l_μ ενώ αντίστοιχα το ν-γωνο από ν ισοσκελή τρίγωνα με βάση l_ν.Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\Pi_\nu > \Pi_\mu$
Συγκεκριμένα $\Pi_\nu = \nu \times l_\nu$ και $\Pi_\mu = \mu \times l_\mu$



Σχήμα 6: ισόπλευρο τρίγωνο του κανονικού ν-γωνου



Σχήμα 7: ισόπλευρο τρίγωνο κανονικου μ-γωνου

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι

$$\frac{\frac{l_\nu}{2}}{a_\nu} = \tan(\frac{\pi}{\nu})$$

οπότε

$$a_\nu = \frac{\frac{l_\nu}{2}}{\tan\frac{\pi}{\nu}}$$

και αντίστοιχα

$$\frac{\frac{l_\mu}{2}}{a_\mu} = \tan(\frac{\pi}{\mu})$$

οπότε

$$a_\mu = \frac{\frac{l_\mu}{2}}{\tan\frac{\pi}{\mu}}$$

Αφού τα πολύγωνα έχουν ίσα εμβαδά θα ισχύει

$$\nu \times E_\nu = \mu \times E_\mu$$

που διαδοχικά γίνεται:

$$\nu\frac{l_\nu a_\nu}{2} = \mu\frac{l_\mu a_\mu}{2}$$

$$\nu l_\nu a_\nu = \mu l_\mu a_\mu$$

$$\nu l_\nu \frac{\frac{l_\nu}{2}}{\tan\frac{\pi}{\nu}} = \mu l_\mu \frac{\frac{l_\mu}{2}}{\tan\frac{\pi}{\mu}}$$

$$\frac{\nu l_\nu^2}{\tan(\frac{\pi}{\nu})} = \frac{\mu l_\mu^2}{\tan(\frac{\pi}{\mu})}$$

$$(\frac{l_\nu}{l_\mu})^2 = \frac{\mu}{\nu}\frac{\tan(\frac{\pi}{\nu})}{\tan(\frac{\pi}{\mu})} \tag{1}$$

Αρκει λοιπόν να δείξω ότι $\Pi_\nu > \Pi_\mu$
η σχέση αυτή διαδοχικά γίνεται

$$\nu l_\nu > \mu l_\mu$$

$$\frac{l_\nu}{l_\mu} > \frac{\mu}{\nu}$$

$$(\frac{l_\nu}{l_\mu})^2 > (\frac{\mu}{\nu})^2$$

$$\frac{\mu}{\nu}\frac{\tan(\frac{\pi}{\nu})}{\tan(\frac{\pi}{\mu})} > (\frac{\mu}{\nu})^2$$

$$\nu\tan(\frac{\pi}{\nu}) > \mu\tan(\frac{\pi}{\mu})$$

αρκεί να δείξω ότι η ακολουθία

$$f(x) = x\tan(\frac{\pi}{x}), x > 2$$

είναι φθίνουσα.
Η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{1}{x}f(x) = tan(\frac{\pi}{x}), x > 2$$

Ξέρουμε ότι για $x > 2$ το $\dfrac{\pi}{x}$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο όπου εκεί η εφαπτομένη είναι φθίνουσα συνάρτηση. Επίσης η $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση και γινόμενο φθινουσών είναι φθίνουσα συνάρτηση άρα $f(x)$ είναι φθίνουσα.
Δείξαμε λοιπόν η περίμετρος του κανονικού ν-γωνου μοναδιαίου εμβαδού είναι φθίνουσα.