Θεωρια Δακτυλιων

Ἐξετάσεις Σεπτεμβρίου 2014

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

1 Σεπτεμβρίου 2014

1. Ἔστω ἀκέραια περιοχὴ D, $a, b \in D$ μὴ μηδενικά, καὶ $a|b$. Ἔστω $a', b' \in D$, συνεταιρικὰ τῶν a, b, ἀντιστοίχως. Ἀποδεῖξτε ὅτι $a'|b'$.

2. Ἔστω ἀκέραια περιοχὴ D. Πότε ἕνα στοιχεῖο τῆς D λέγεται ἀνάγωγο καὶ πότε πρῶτο; Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε πρῶτο στοιχεῖο εἶναι ἀνάγωγο. Δῶστε, χωρὶς ἀπόδειξη, παράδειγμα ἀκέραιας περιοχῆς D καὶ στοιχείου $\pi \in D$, τὸ ὁποῖο εἶναι ἀνάγωγο, ἀλλὰ ὄχι πρῶτο.

3. Ἔστω ἀκέραια περιοχὴ D καὶ $a, b \in D$, μὴ μηδενικά.

   (α′) Πότε λέμε ὅτι τὸ $d \in D$ εἶναι ΜΚΔ τῶν a, b; Πότε λέμε ὅτι τὰ a, b εἶναι πρῶτα μεταξύ τους;

   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ 1_D εἶναι ΜΚΔ τῶν a, b ἂν καὶ μόνο ἂν οἱ μόνοι κοινοὶ διαιρέτες τῶν a, b εἶναι οἱ μονάδες τῆς D.

   (γ′) Ἔστω ὅτι τὸ $d \in D$ εἶναι ΜΚΔ τῶν a, b. Ἔστω $a = da_1$ καὶ $b = db_1$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὰ a_1, b_1 εἶναι πρῶτα μεταξύ τους.

4. Ἔστω $D = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

   (α′) Σὲ ποιὰ γενικώτερη κατηγορία ἀκεραίων περιοχῶν ἐμπίπτει ἡ D, ἔτσι ὥστε νὰ μποροῦμε νὰ συμπεράνομε ὅτι εἶναι περιοχὴ μονοσήμαντης ἀνάλυσης;

   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $D^* = \{-1, 1\}$ καὶ ὅτι τὰ στοιχεῖα $i\sqrt{2}$ καὶ $1 \pm i\sqrt{2}$ εἶναι ἀνάγωγα στοιχεῖα τῆς D.

   (γ′) Ἀναλῦστε τὰ 2 καὶ 3 σὲ ἀνάγωγα στοιχεῖα τῆς D.

   (δ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ πολυώνυμο $X^2 - X + 1$ δὲν ἔχει ρίζες στὴ D.

5. Ἔστω $f(X) = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

   (α′) Ἀναλῦστε τὸ $f(X)$ σὲ γινόμενο δύο δευτεροβαθμίων μονικῶν πολυωνύμων μὲ ἀκέραιους συντελεστές, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνάγωγα πολυώνυμα τοῦ $\mathbb{Q}[X]$.

   (β′) Ἀναλῦστε τὸ $g(X) = 12f(X)$ σὲ ἀνάγωγα στοιχεῖα τῆς περιοχῆς $D[X]$, ὑπὸ τὴ μορφὴ
   $$g(X) = \epsilon \cdot (p_1 p_2 \cdots) \cdot (f_1(X) f_2(X) \cdots),$$
   ὅπου $\epsilon \in D^*$ καὶ τὰ $p_1, p_2, \ldots, f_1(X), f_2(X) \ldots$ εἶναι ἀνάγωγα στοιχεῖα τῆς ἀκέραιας περιοχῆς $D[X]$, τὰ μὲν $p_i \in D$, τὰ δὲ $f_i(X) \in D[X] \setminus D$, σὲ κάθε μία ἀπ’

τὶς παρακάτω περιπτώσεις:
(i) $D = \mathbb{Z}$.   (ii) $D = \mathbb{Q}$.   (iii) $D = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
Σὲ κάθε περίπτωση, γρᾶψτε ξεκάθαρα ποιὸ εἶναι τὸ ϵ καὶ ἕνα-ἕνα τὰ p_i καὶ $f_i(X)$.
Γιὰ τὴν περίπτωση (iii) θεωρῆστε δεδομένη τὴν ἄσκηση **;;**, ἀκόμη κι ἂν δὲν τὴν ἔχετε λύσει.

6. Ἔστω σῶμα K, $n \in \mathbb{N}$ καὶ $S \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$.

   (α′) Πῶς ὁρίζεται τὸ σύνολο $\mathbb{V}(S)$;

   (β′) Πότε ἕνα σύνολο $A \subseteq K^n$ χαρακτηρίζεται *ἀλγεβρικὸ σύνολο*;

   (γ′) Ἀποδεῖξτε, βάσει τῶν ὁρισμῶν, ἀποκλειστικά, ὅτι ἡ τομὴ δύο ἀλγεβρικῶν ὑποσυνόλων τοῦ K^n εἶναι ἀλγεβρικὸ σύνολο.

7. (α′) Ἔστω σῶμα K καὶ A ἀλγεβρικὸ ὑποσύνολο τοῦ K^n ($n \geq 1$). Πότε τὸ A χαρακτηρίζεται *ἀνάγωγο*;

   (β′) Ἔστω $f(X,Y) = X^4 - Y^4 \in \mathbb{R}[X]$. Γρᾶψτε τὸ $\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{R}^2$ ὡς ἕνωση ἀναγώγων ἀλγεβρικῶν συνόλων (καμπύλων) τοῦ $\mathbb{R}^2$.

   (γ′) Ἔστω $f(X,Y) = X^4 - Y^4 \in \mathbb{C}[X]$. Γρᾶψτε τὸ $\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{C}^2$ ὡς ἕνωση ἀναγώγων ἀλγεβρικῶν συνόλων (καμπύλων) τοῦ $\mathbb{C}^2$.

   Θὰ τεκμηριώσετε τὴν ἀπάντησή σας διατυπώνοντας σαφῶς (χωρὶς ἀπόδειξη) ὅποιο θεώρημα/πρόταση χρησιμοποιήσετε.

Βαθμολογία θεμάτων

1	2	3			4				5				6			7		
		α′	β′	γ′	α′	β′	γ′	δ′	α′	β′(i)	β′(ii)	β′(iii)	α′	β′	γ′	α′	β′	γ′
0.5	1	0.25	0.5	0.5	0.5	1	0.5	1	0.75	0.5	0.5	1	0.25	0.25	0.75	0.25	0.75	0.75

Σύνολο μονάδων 11,5.   Βάση 5.   Ἄριστα 10.

Καλὴ ἐπιτυχία!