Θεωρια Δακτυλιων

Ἐξετάσεις Ἰουνίου 2014

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

16 Ἰουνίου 2014

1. Ἔστω ἀκέραια περιοχὴ D.

   (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ σχέση συνεταιρικότητας στὴ D εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

   (β′) Ἔστω ὅτι τὰ $a, b \in D$ εἶναι συνεταιρικά καὶ τὸ a εἶναι ἀνάγωγο. Ἀποδεῖξτε ὅτι καὶ τὸ b εἶναι ἀνάγωγο.

2. Ἔστω R μεταθετικὸς δακτύλιος μὲ μοναδιαῖο (συμβολῖστε το μὲ 1, ἀντὶ 1_R) καὶ I ἰδεῶδες τοῦ R.

   (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $I = R \Leftrightarrow 1 \in I$.

   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν τὸ $\epsilon \in R^*$ ἀνήκει στὸ I, τότε $I = R$.
   Πῶς "μεταφράζεται" αὐτό, στὴν περίπτωση ποὺ τὸ R εἶναι σῶμα;

   (γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν $\mathrm{Rad}(I) = R$, τότε $I = R$.

3. (α′) Ἔστω σῶμα K. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν τὸ $p(X) \in K[X]$ εἶναι ἀνάγωγο πολυώνυμο, τότε τὸ ἰδεῶδες $\langle p(X) \rangle$ τοῦ $K[X]$ εἶναι μεγιστικό (maximal).
   Ὑπόδειξη: Θυμηθῆτε ὅτι τὸ $K[X]$ εἶναι περιοχὴ κυρίων ἰδεωδῶν.

   (β′) Ἔστω ὁ δακτύλιος-πηλίκο $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}/\langle X^2+1 \rangle$ καὶ τὸ στοιχεῖο του $\tilde{X} = X + \langle X^2+1 \rangle$.

      i. Βρεῖτε ἐλαχίστου βαθμοῦ πολυώνυμο $f(X) \in \mathbb{R}[X]$, τέτοιο ὥστε $\tilde{X}^2 = f(\tilde{X})$.

      ii. Μὲ ποιὰ "ἐπώνυμη" δομὴ εἶναι ἰσόμορφος ὁ $\tilde{\mathbb{R}}$ καὶ σὲ ποιὸ στοιχεῖο της ἀντιστοιχεῖ τὸ $\tilde{X}$;

4. Ἔστω $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

   (α′) Γιατὶ ἡ $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ εἶναι περιοχὴ μονοσήμαντης ἀνάλυσης;

   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]^* = \{-1, 1\}$ καὶ ὅτι τὰ στοιχεῖα $\sqrt{-2}$ καὶ $1 \pm \sqrt{-2}$ εἶναι ἀνάγωγα στοιχεῖα τῆς $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

   (γ′) Ἔστω τὸ $f(X) = 6(X^2+2)(X^2+3) \in \mathbb{Z}[X]$. Ἀναλῦστε τὸ $f(X)$ σὲ γινόμενο τῆς μορφῆς

   $$f(X) = \{\text{μονάδα τῆς } D[X]\} \times \{\text{γινόμενο ἀναγώγων τῆς } D[X]\},$$

   σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς περιπτώσεις $D = \mathbb{Q}$, $D = \mathbb{Z}$ καὶ $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
   Μπορεῖτε νὰ θεωρήσετε δεδομένο ὅτι τὸ σῶμα πηλίκων τῆς $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ εἶναι τὸ $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}) = \{u + v\sqrt{-2} : u, v \in \mathbb{Q}\}$.
   Ὑπόδειξη. Παρατηρῆστε ὅτι $3 = (1+\sqrt{-2})(1-\sqrt{-2})$.

5. Ἔστω σῶμα K, $n \in \mathbb{N}$ καὶ $A \subseteq K^n$. Πῶς ὁρίζεται τὸ $\mathbb{I}(A)$; Ἔστω $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $\langle f \rangle \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(f))$.

6. Ἔστω σῶμα K καὶ $S \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σύστημα ἐξισώσεων

$$\{f(u_1, \ldots, u_n) = 0, \quad f \in S\}, \quad \text{ἄγνωστοι οἱ } u_1, \ldots, u_n,$$

ἀκόμη κι ἂν τὸ S εἶναι ἄπειρο (ὁπότε τὸ σύστημα ἔχει ἄπειρες ἐξισώσεις), εἶναι ἰσοδύναμο μὲ ἕνα σύστημα πεπερασμένου πλήθους πολυωνυμικῶν ἐξισώσεων,

$$\{g_1(u_1, \ldots, u_n) = 0,\ g_2(u_1, \ldots, u_n) = 0, \ldots, g_m(u_1, \ldots, u_n) = 0\}.$$

Στὴ σύντομη ἀπόδειξή σας, νὰ ἐπισημάνετε τὸ σημεῖο, ὅπου κάνετε χρήση ἑνὸς "ἐπωνύμου" θεωρήματος. Τί λέει αὐτὸ τὸ θεώρημα καὶ πῶς τὸ ἐφαρμόζετε στὴν ἀπόδειξή σας;

Ὑπόδειξη: Δύο συστήματα ἐξισώσεων χαρακτηρίζονται ἰσοδύναμα ἂν καὶ μόνο ἂν ἔχουν τὸ ἴδιο σύνολο λύσεων.

7. Δίδονται δύο καμπῦλες C_1, C_2 τοῦ ἐπιπέδου, μὲ ἐξισώσεις $C_1 : f(u, v) = 0$ καὶ $C_2 : g(u, v) = 0$, ὅπου $f, g \in \mathbb{R}[X, Y]$. Ὑποθέτομε ὅτι οἱ καμπῦλες αὐτὲς δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα στὸ $\mathbb{C}^2$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν $f_1, g_1 \in \mathbb{C}[X, Y]$, τέτοια ὥστε

$$f(X, Y) \cdot f_1(X, Y) + g(X, Y) \cdot g_1(X, Y) = 1.$$

Στὴ σύντομη ἀπόδειξή σας θὰ διατυπώσετε καὶ θὰ χρησιμοποιήσετε τὸ πόρισμα ἑνὸς "ἐπωνύμου" θεωρήματος, τὸ ὁποῖο καὶ θὰ διατυπώσετε.

8. (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $Y^2 - X^3 \in \mathbb{C}[X, Y]$ εἶναι ἀνάγωγο πολυώνυμο.

   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $\mathbb{V}(Y^2 - X^3)$ εἶναι ἀνάγωγο ἀλγεβρικὸ σύνολο τοῦ $\mathbb{C}^2$.

Βαθμολογία θεμάτων

1		2			3			4			5	6	7	8	
α′	β′	α′	β′	γ′	α′	β′(i)	β′(ii)	α′	β′	γ′				α′	β′
0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	1	0.25	0.50	0.50	1	1.5	1	1	1.5	1.5	1

Σύνολο μονάδων 12.5. Βάση 5. Ἄριστα 10.

Καλὴ ἐπιτυχία!