Θεώρημα Paley-Wiener

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης [*]

7 Ιανουαρίου 2006

Περίληψη

Η εργασία αυτή έγινε στα πλάισια του Μεταπτυχιακού Μαθήματος «Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις» με διδάσκοντα τον Σ. Καμβύση, το Χειμερινό εξάμηνο 2006-2007.

1 Ο Μετασχηματισμός Fourier

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό του Μετασχηματισμού και του αντίστροφου Μετασχηματισμού *Fourier* στο $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, τον χώρο *Schwartz* των $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεων[1] που φθίνουν απότομα.

Ορισμός 1.1 *Ας υποθέσουμε ότι* $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. *Ο Μετασχηματισμός Fourier της* f *είναι η συνάρτηση* $\hat{f}$ *που δίνεται από τον τύπο*

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda} f(x)dx$$

όπου $x \cdot \lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i$. *Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της* f, *συμβολίζεται με* $\check{f}$ *και είναι*

$$\check{f}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\lambda} f(x)dx$$

Καθώς κάθε συνάρτηση στο χώρο *Schwartz* είναι $L^1(\mathbb{R}^n)$, τα παραπάνω ολοκληρώματα έχουν νόημα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασσικό ορισμό για τους πολυδείκτες. Ένας πολυδείκτης

$$\alpha = < a_1, \ldots, a_n >$$

είναι μία n-άδα από μη αρνητικούς ακεραίους. Το σύνολο όλων των πολυδεικτών θα το συμβολίσουμε με I_+^n. Τα σύμβολα $|\alpha|, x^\alpha, D^\alpha$ και x^2 ορίζονται ως εξής:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

[*]Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

[1]Παράρτημα, παράγραφος 4.1.

$$x^\alpha = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$
$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \cdots \partial x_n^{a_n}}$$
$$x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Για να αποδείξουμε ότι οι $\hat{f}, \check{f}$ είναι αντίστροφες θα αποδείξουμε το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 1.1 *Οι απεικονίσεις $\hat{f}, \check{f}$ είναι συνεχείς γραμμικοί μετασχηματισμοί του $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ στο $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Επιπλέον, εαν α και β είναι πολυδείκτες, τότε*

$$\big((i\lambda)^\alpha D^\beta \hat{f}\big)(\lambda) = \Big[D^\alpha\big((-ix)^\beta f(x)\big)\Big]^{\widehat{}}(\lambda) \tag{1.1}$$

Απόδειξη

Η απεικόνιση $\hat{f}$ είναι προφανώς γραμμική (λογω του ότι είναι ολοκλήρωμα). Καθώς

$$\begin{aligned}
(\lambda^\alpha D^\beta \hat{f})(\lambda) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^\alpha (-ix)^\beta e^{-i\lambda\cdot x} f(x) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(-i)^\alpha} (D_x^\alpha e^{-i\lambda\cdot x})(-ix)^\beta f(x) dx \\
&= \frac{(-i)^\alpha}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x} D_x^\alpha\big((-ix)^\beta f(x)\big) dx
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει, λόγω της παραγοντικής ολοκλήρωσης που εφαρμόζουμε.

Έτσι λοιπόν παίρνουμε

$$||\hat{f}||_{\alpha,\beta} = \sup_\lambda |\lambda^\alpha (D^\beta \hat{f})(\lambda)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha (x^\beta f)| dx < \infty$$

Έτσι λοιπόν η $\hat{f}$ πάει το $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ στο $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, κι έχουμε αποδείξει ταυτόχρονα τη σχέση 1.1.

Επιπλέον για να δείξουμε ότι είναι συνεχής,

$$\begin{aligned}
||\hat{f}||_{\alpha,\beta} &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha (x^\beta f)| dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2}{(1+x_1^2)(1+x_2)^2 \cdots (1+x_n^2)} |D_x^\alpha (x^\beta f)| dx \\
&\leq \sup_x |x_1^2 \cdots x_n^2 D_x^\alpha (x^\beta f)| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2)} dt \right)^n \\
&\leq C ||f||_{m,n}
\end{aligned}$$

απ'τον τύπο του $Leibniz$ για κάποια σταθερά C και κάποια $m,n \in \mathbb{Z}_+$ που εξαρτώνται από τα α, β. [2] Έτσι προκύπτει ότι εαν $f_n \to f$ στον $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε $\hat{f}_n \to \hat{f}$ στον $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ και το οποίο σημαίνει ακριβώς ότι η απεικόνιση $\widehat{f} : \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι συνεχής ως φραγμένη, διότι από τη Συναρτησιακή Ανάλυση ένας γραμμικός τελεστής είναι συνεχής αν-ν είναι φραγμένος [3]. Η απόδειξη για την $\check{f}$ γίνεται με τον ίδιο τρόπο.

$\square$

Παράδειγμα 1.1 *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της* $f(x) = e^{-ax^2/2} \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}), \quad a > 0$. *Έχουμε διαδοχικά*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2/2} e^{-i\lambda \cdot x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e^{-t^2 - it\lambda\sqrt{\frac{2}{\alpha}}} dt \\
&= \frac{e^{-\lambda^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t + i\frac{\lambda}{\sqrt{2\alpha}})^2} dt \\
&= \frac{e^{-\lambda^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-\lambda^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha}}
\end{aligned}$$

Το προτελευταίο βήμα προκύπτει από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy και την εκθετική μείωση του e^{-z^2} *πάνω στις γραμμές τις παράλληλες στον άξονα των* x.

$\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα αντιστροφής $Fourier$ του οποίου η απόδειξη μας δίνει την ιδέα του ίδιου του $Fourier$.

Θεώρημα 1.1 *(Θεώρημα αντιστροφής Fourier) Ο μετασχηματισμός Fourier είναι γραμμική δισυνεχής* [4] *αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το* $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ *στο* $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. *Η αντίστροφη απεικόνιση είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δηλαδή* $\overset{\times}{f} = f = \overset{\diamond}{f}$.

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι $\overset{\times}{f} = f$ και η απόδειξη ότι $\overset{\diamond}{f} = f$ είναι ανάλογη. Το ότι $\overset{\diamond}{f} = f$ δίνει ότι η $\hat{f}$ είναι επί και το ότι $\overset{\times}{f} = f$ δίνει ότι η $\hat{f}$ είναι «1-1».

[2] Συγκεκριμένα μπορούμε να επιλέξουμε $m = |\beta| + 2d$ και $n = |\alpha|$.
[3] πρβλ. [1], Θεώρημα $V.4$.
[4] Μία συνεχής απεικόνιση λέγεται δισυνεχής, εαν και η αντίστροφη απεικόνιση είναι συνεχής.

Για κάθε $f, g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda\cdot y}d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}f(x)dx\right\}e^{i\lambda\cdot y}d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)e^{-i\lambda\cdot(x-y)}d\lambda\right\}f(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x-y)f(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)f(y+x)dx
\end{aligned}$$

Παίρνοντας $g_\epsilon(\lambda) = g(\epsilon\lambda)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\hat{g_\epsilon}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda}g(\epsilon\lambda)d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\epsilon^{-d}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ixu/\epsilon}g(u)du \\
&= \epsilon^{-d}\hat{g}(x/\epsilon).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(\epsilon\lambda)\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda\cdot y}d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g_\epsilon}(x)f(y+x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x/\epsilon)f(y+x)dx/\epsilon^d \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)f(y+\epsilon x)dx.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας $\epsilon \to 0$, έχουμε

$$g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\lambda)e^{iy\lambda}d\lambda = f(y)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)dx \tag{1.3}$$

Παίρνουμε τώρα $g(x) = e^{-x^2/2}$ και τότε $g(0) = 1$ και από το παραπάνω παράδειγμα έχουμε $\hat{g}(u) = e^{-u^2/2}$ και $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(u)du = (2\pi)^{n/2}$. Έτσι, από την εξίσωση 1.3 έχουμε το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 1 *Ισχύει* $\widehat{(\hat{f}(x))} = \widehat{(\hat{f})}(x) = (\check{\hat{f}})(-x) = f(-x)$

Πόρισμα 1.1 *(Τύπος του Parseval) Για όλες τις συναρτήσεις* $f, g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ *ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(x)}\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}g(x)dx.$$

Απόδειξη

Είδαμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\hat{f}(\lambda)e^{iy\lambda}d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)f(y+x)dx$$

και θέτοντας $y=0$ παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(x)f(x)dx$$

Αντικαθιστώντας το f απ'το $\check{f}$ και κάνοντας χρήση της ταυτότητας $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)\hat{f}(-x)dx.$$

Όμως, $\overline{\hat{f}(x)} = (\widehat{\overline{f}})(-x)$, άρα για $h = \overline{f}$, βλέπουμε ότι $\hat{f}(-x) = (\widehat{\overline{h}})(-x) = \overline{\hat{h}(x)}$.

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\overline{h(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)\overline{\hat{h}(x)}dx.$$

όπως το θέλαμε.

□

Πόρισμα 1.2 *(Τύπος του Plancheral) Ας υποθέσουμε ότι $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2 dk$$

Απόδειξη

Προκύπτει από τον τύπο του *Parseval* για $f = g$.

□

2 Ο Δυϊκός χώρος του $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$

Θα ορίσουμε τώρα τον μετασχηματισμό *Fourier* στον δυϊκό χώρο του $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, δηλαδή στον χώρο των κατανομών $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ορισμός 2.1 *Έστω $T \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της T, που συμβολίζεται με $\hat{T}$, είναι η κατανομή που ορίζεται ως $\hat{T}(\phi) = T(\hat{\phi})$.*

Ας υποθέσουμε ότι $h, \phi \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε από την ταυτότητα πόλωσης [5] και το πόρισμα του Θεωρήματος 1.1, έχουμε $(h,\phi) = (\hat{h},\hat{\phi})$. Αντικαθιστώντας το h από

[5] Στη θεωρία των μετρικών χώρων στη συναρτησιακή ανάλυση, ένας διανυσματικός χώρος πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς του οποίου η νόρμα ορίζεται από τους όρους του εσωτερικού γινομένου, ικανοποιεί μία απαραίτητη υπόθεση που είναι η ταυτότητα πόλωσης: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >$.

το $\overline{\hat{g}} = \check{\overline{g}}$ παίρνουμε

$$T_{\hat{g}}(\phi) = \int \hat{g}(x)\phi(x)dx = \int g(x)\hat{\phi}(x)dx = T_g(\hat{\phi}(x)) = \hat{T}_g(\phi)$$

όπου $T_{\hat{g}}, T_g$ είναι οι κατανομές που αντιστοιχούν στις απεικονίσεις $\hat{g}$ και g αντίστοιχα. Αυτό δείχνει ότι ο Μετασχηματισμός *Fourier* στο $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ επεκτείνει τον Μετασχηματισμό που ορίσαμε προηγουμένως στο $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$.

Θεώρημα 2.1 *Ο Μετασχηματισμός Fourier είναι «1-1» γραμμική αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ στο $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ ο οποίος είναι η μοναδική ασθενώς συνεχής επέκταση του μετασχηματισμού Fourier στο $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη

Εαν $\phi_n \xrightarrow{\mathfrak{S}} \phi$, τότε απ'το Θεώρημα 1.1, $\hat{\phi_n} \xrightarrow{\mathfrak{S}} \hat{\phi}$, άρα $T(\hat{\phi_n}) \to T(\hat{\phi})$ για κάθε $T \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$. Συνεπώς $T(\hat{\phi_n}) \to T(\hat{\phi})$ που δείχνει ότι ο $\hat{T}$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στο $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Επιπλέον, εαν $T_n \xrightarrow{w} T$, τότε $\hat{T_n} \xrightarrow{w} \hat{T}$, διότι το ότι $T_n(\hat{\phi}) \to T(\hat{\phi})$ δίνει $\hat{T}_n(\phi) \to \hat{T}(\phi)$. Συνεπώς η $T \mapsto \hat{T}$ είναι ασθενώς συνεχής.

Οι υπόλοιπες ιδιότητες της $\hat{f}$ προκύπτουν απευθείας από τις αντίστοιχες προτάσεις στο $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$.

□

Παράδειγμα 2.1 *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της παραγώγου της συνάρτησης δέλτα στο σημείο $b \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
\hat{\delta_b'}(\phi) &= \delta_b'(\hat{\phi}) \\
&= \delta_b\Big(-\frac{d}{d\lambda}\hat{\phi}(\lambda)\Big) \\
&= \delta_b\Big(\frac{-1}{(2\pi)^{1/2}}\int e^{i\lambda x}(-ix)\phi(x)dx\Big) \\
&= \int \Big(\frac{ixe^{-ibx}}{\sqrt{2\pi}}\Big)\phi(x)dx
\end{aligned}$$

□

Θα εισάγουμε τώρα μία νέα πράξη μεταξύ συναρτήσεων

Ορισμός 2.2 *Ας υποθέσουμε ότι $f, g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε η συνέλιξη των f, g συμβολίζεται με $f \star g$, και είναι η συνάρτηση*

$$(f \star g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)g(x)dx.$$

Η συνέλιξη εμφανίζεται σε πολλές περιπτώσεις. Εδώ θα επικεντρωθούμε στις ιδιότητες της συνέλιξης ως απεικόνισης από το $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ στο $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$.

Κάνοντας χρήση αυτών των ιδιοτήτων θα δείξουμε ότι η συνέλιξη μπορεί να επεκταθεί σε μία απεικόνιση από το $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)\times\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ στο σύνολο O_M^n των πολυωνυμικά φραγμένων $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεων. Οι συνελίξεις συχνά εμφανίζονται όταν κάποιος χρησιμοποιεί τον μετασχηματισμό *Fourier* επειδή απεικονίζει γινόμενα σε συνελίξεις. (Πρόκειται για το Θεώρημα 2.2(*ii*) και το Θεώρημα 2.3 (*iii*)).

Θεώρημα 2.2 *(i) Για κάθε $f\in\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, η απεικόνιση $g\to f\star g$ είναι συνεχής απεικόνιση του $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ στον εαυτό του.*

(ii) $\widehat{fg}=(2\pi)^{-n/2}\hat f\star\hat g$ *και* $\widehat{f\star g}=(2\pi)^{n/2}\hat f\hat g$.

(iii) Για $f,g,h\in\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, $f\star g=g\star f$ *και* $f\star(g\star h)=(f\star g)\star h$.

Απόδειξη

Από την ταυτότητα πόλωσης και το πόρισμα του Θεωρήματος 1.1 έχουμε ότι $(\phi,\psi)=(\hat\phi,\hat\psi)$ για $\phi,\psi\in\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Θεωρώντας ένα συγκεκριμένο $y\in\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ εφαρμόζουμε αυτή την ταυτότητα στο $e^{iy\cdot x}\hat f(x)$ και το g και παίρνουμε $(e^{iy\cdot x}\hat f,g)=(\widehat{e^{iy\cdot x}\hat f},\hat g)$. Όμως

$$(e^{iy\cdot x}\hat f,g)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-iy\cdot x}f(x)g(x)dx$$

και

$$\begin{aligned}(\widehat{e^{iy\cdot x}\hat f},\hat g) &= \int_{\mathbb{R}^n}\overline{\Big((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\lambda\cdot x+iy\cdot x}\overline{f(x)}dx\Big)}\hat g(\lambda)d\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\hat f(y-\lambda)\hat g(\lambda)d\lambda\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\widehat{fg}=(2\pi)^{-n/2}\hat f\star\hat g$. Κάνοντας χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού *Fourier* ο τελευταίος τύπος μπορεί να γραφτεί

$$(2\pi)^{n/2}\widehat{\check f\check g}=f\star g.$$

Αυτό δείχνει ότι η συνέλιξη είναι η σύνθεση του αντίστροφου μετασχηματισμού *Fourier*, του πολλαπλασμού επί $(2\pi)^{n/2}\check f$ και του μετασχηματισμού *Fourier*. Προκύπτει λοιπόν ότι η συνέλιξη είναι συνεχής. Το (*iii*) είναι άμεση συνέπεια του (*ii*).

□

Για να επεκτείνουμε την απεικόνιση $C_f: g\to f\star g$ στο $\mathfrak{S}'$, ψάχνουμε για συνεχείς απεικονίσεις $\tilde C_f:\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}$ τέτοιες ώστε $\tilde C_f'\big|_{\mathfrak{S}}=C_f$. Τότε ορίζουμε ως συνέλιξη στο $\mathfrak{S}'$ την απεικόνιση $\tilde C_f'$.

Ορισμός 2.3 *Έστω $f\in\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, $T\in\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ και θεωρούμε $\tilde f(x)$ την συνάρτηση $f(-x)$. Τότε, η συνέλιξη της T με την f, συμβολίζεται με $T\star f$ και είναι η κατανομή στο $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ που δίνεται από*

$$(T\star f)(\phi)=T(\tilde f\star\phi)$$

για κάθε $\phi\in\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$.

Το γεγονός ότι η απεικόνιση $g \to \tilde{f} \star g$ είναι συνεχής μετασχηματισμός μας βεβαιώνει ότι $T \star f \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$. Το επόμενο θεώρημα συνοψίζει τις ιδιότητες αυτής της «επεκτεταμένης» συνέλιξης.

Ας είναι f_y η συνάρτηση $f_y(x) = f(x-y)$ και $\tilde{f}_y$ η συνάρτηση $f(y-x)$.

Θεώρημα 2.3 *Για κάθε $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, η απεικόνιση $T \to T\star f$ είναι μία ασθενώς συνεχής απεικόνιση του $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ στο $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ η οποία επεκτείνει την συνέλιξη στο $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Επιπλέον,*

(i) *Η συνέλιξη $T\star f$ είναι μία πολυωνυμικά φραγμένη $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση, δηλαδή $T \star f \in O_M^n$. Στην πραγματικότητα $(T \star f)(y) = T(\tilde{f}_y)$ και*

$$D^\beta(T \star f) = (D^\beta T) \star f = T \star D^\beta f \tag{2.1}$$

(ii) $(T \star f) \star g = T \star (f \star g)$

(iii) $\widehat{T \star f} = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\hat{T}$

Απόδειξη

Καθώς η απεικόνιση $T \to T\star f$ ορίζεται ως ο *adjoint* μιας φραγμένης απεικόνισης από το $\mathfrak{S}$ στο $\mathfrak{S}$, είναι αυτόματα ασθενώς συνεχής. Το γεγονός ότι επεκτείνει την συνέλιξη στο $\mathfrak{S}$ είναι μία απλή αλλαγή μεταβλητών. Επίσης η 2.1 και τα (ii),(iii) προκύπτουν όλα άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες για το $T \in \mathfrak{S}$ και το ότι το $\mathfrak{S}$ είναι *weakly dense* στο $\mathfrak{S}'$ και ότι οι ,D^β, ο πολλαπλασιασμός με $\hat{f}$ και η συνέλιξη είναι όλα ασθενώς συνεχής στο $\mathfrak{S}'$. Μένει τώρα να αποδείξουμε το πρώτο μέρος της (i). Καθώς $T \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$, προκύπτει από το θεώρημα της Κανονικότητας[6] ότι υπάρχει μία φραγμένη συνεχής συνάρτηση h, ένας θετικός ακέραιος r, και ένας πολυδείκτης β τέτοιος ώστε

$$T(\tilde{f}_y) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)(1+x^2)^r (D^\beta f)(y-x)dx$$

Καθώς $D^\beta f \in \mathfrak{S}$, άρα η $T(\tilde{f}_y)$ είναι μία απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση του y. Η αλλαγή μεταβλητών $\tau = y - x$ δείχνει ότι

$$\begin{aligned} |T(\tilde{f}_y)| &\leq ||h||_\infty \int_{\mathbb{R}^n} (1+x^2)^r |(D^\beta f)(y-x)|dx \\ &= ||h||_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+(y-\tau)^2\right)^r |D^\beta f(\tau)|d\tau \end{aligned}$$

από την οποία εύκολα προκύπτει ότι η $y \mapsto T(\tilde{f}_y)$ είναι πολυωνυμικά φραγμένη. Παρόμοια απόδειξη δουλεύει και για τις παραγώγους της $y \mapsto T(\tilde{f}_y)$. Συνεπώς $T(\tilde{f}_y) \in O_M^n$.

Ας υποθέσουμε οτι μία κατανομή $S \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ δίνεται από μία πολυωνυμικά φραγμένη συνεχή συνάρτηση s. Τότε, κάνοντας χρήση του θεωρήματος *Fubini*,

[6] πρβλ. [1] Θεώρημα $V.10$ και στο Παράρτημα του παρόντος.

βρίσκουμε ότι για $\phi \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}(S\star f)(\phi) &\equiv S(\tilde{f}\star\phi)\\ &= \int s(x)\Big(\int \tilde{f}(x-y)\phi(y)dy\Big)dx\\ &= \int\Big(\int s(x)\tilde{f}_y(x)dx\Big)\phi(y)dy\\ &= \big(S(\tilde{f}_y)\big)(\phi)\end{aligned}$$

συνεπώς $S\star f = S(\tilde{f}_y)$. Από το θεώρημα της Κανονικότητας έχουμε $T = D^\alpha S$ για κάποια τέτοια S. Άρα από την 2.1 έχουμε

$$\begin{aligned}T\star f = (D^\alpha S)\star f &= S\star D^\alpha f\\ &= S\big(\widetilde{(D^\alpha f)}_y\big)\\ &= (-1)^{|\alpha|}S\big(D^\alpha(\tilde{f}_y)\big)\\ &= D^\alpha S(\tilde{f}_y)\\ &= T(\tilde{f}_y)\end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Θεώρημα 2.4 *Έστω $T\in\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ και $T\in\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε $\widehat{fT}\in O_M^n$ και $\widehat{fT}(k) = (2\pi)^{-n/2}T(fe^{-ik\cdot x})$. Ειδικότερα, εαν ο T έχει συμπαγή φορέα και $\psi\in\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι ταυτοτικά μονάδα σε μια γειτονιά του φορέα του T, τότε*

$$\hat{T}(k) = (2\pi)^{-n/2}T(\psi e^{-ik\cdot x})$$

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 2.3(iii) και τον τύπο της αντιστροφής του $Fourier$, έχουμε $\widehat{fT} = (2\pi)^{-n/2}\hat{f}\star\hat{T}$. Συνεπώς $\widehat{fT}\in O_M^n$ και

$$\begin{aligned}\widehat{fT}(k) &= (2\pi)^{-n/2}\hat{T}(\tilde{\hat{f}})\\ &= (2\pi)^{-n/2}T(e^{-ik\cdot x}f)\end{aligned}$$

□

Παρατηρούμε οτι κάποιος μπορεί να ορίσει την συνέλιξη μιας κατανομής $T\in\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ με κάποια $f\in\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ με τη σχέση $(T\star f)(y) = T(\tilde{f}_y)$. Απόδειξη όμοια όπως εκείνη του Θεωρήματος 2.3 δείχνει ότι η $T\star f$ είναι μία (όχι απαραίτητα πολυωνυμικά φραγμένη) $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση και ότι ισχύει η σχέση 2.1.

Ορισμός 2.4 *Ας είναι $j(x)$ μία θετική $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση της οποίας ο φορέας βρίσκεται πάνω στη σφαίρα ακτίνας 1 και κέντρου της αρχής του $\mathbb{R}^n$ η οποία ικανοποιεί την*

$$\int j(x)dx = 1$$

Η ακολουθία των συναρτήσεων $j_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}j(x/\epsilon)$ καλείται «προσεγγιστικά μοναδιαίο στοιχείο».

Πρόταση 1 *Ας υποθέσουμε ότι $T \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ και ας είναι $j_\epsilon(x)$ ένα «προσεγγιστικά μοναδιαίο στοιχείο». Τότε $T \star j_\epsilon \to T$ καθώς $\epsilon \to 0$.*

Απόδειξη

Εαν $\phi \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε $(T \star j_\epsilon)(\phi) = T(\tilde{j_\epsilon} \star \phi)$, άρα αρκεί να δείξω ότι $\tilde{j_\epsilon} \star \phi \xrightarrow{\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)} \phi$. Για να δείξουμε το τελευταίο, αρκεί να δείξουμε ότι $(2\pi)^{n/2}\hat{j}_\epsilon\hat{\phi} \xrightarrow{\mathfrak{S}} \hat{\phi}$. Καθώς όμως $\hat{j}_\epsilon(\lambda) = \hat{j}(\epsilon\lambda)$ και $\hat{j}(0) = (2\pi)^{-n/2}$, προκύπτει ότι $(2\pi)^{n/2}\hat{j}_\epsilon(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 1 σε συμπαγή σύνολα και είναι ομοιόμορφα φραγμένο. Όμοια, το $D^\alpha \hat{j}_\epsilon$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0. Συμπεραίνουμε έτσι, ότι $(2\pi)^{n/2}\hat{j}_\epsilon\hat{\phi} \xrightarrow{\mathfrak{S}} \hat{\phi}$.

□

3 Το Θεώρημα Paley-Wiener

Περίληψη

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την σύνδεση μεταξύ των δυνατών μειώσεων μιας συνάρτησης ή κατανομής στο άπειρο και τις ιδιότητες που αφορούν την αναλυτικότητα του αντίστοιχου μετασχηματισμού *Fourier* αυτής. Η πιο απλή μορφή της μείωσης στο άπειρο είναι η συνάρτηση να έχει συμπαγή φορέα. Θα αποδείξουμε το θεώρημα $Paley - Wiener$ που χαρακτηρίζει πολύ καθαρά τους μετασχηματισμούς *Fourier* $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεων και των κατανομών με συμπαγή φορέα.

Λήμμα 3.1 *Εαν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}^n$ και μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^n$, τότε $f = 0$ παντού.*

Απόδειξη

Ας πάρουμε $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^n$. Τότε θεωρούμε συγκεκριμένα $a_2 \in \mathbb{R}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και την απεικόνιση $z \to f(z, a_2, \ldots, a_n)$. Αυτή είναι ακέραια και μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$ όπως επίσης και στο $\mathbb{C}$, απ'το *Identity Theorem*. Καθώς το a_2 είναι τυχαίο, μπορούμε να πούμε ότι $f(z_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ και μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$ άρα μηδενίζεται και στο $\mathbb{C}$. Πιο συγκεκριμένα, $f(z_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ και κάθε $a_3 \in \mathbb{R}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ κι έχουμε το αποτέλεσμα.

□

Στα επόμενα συμβολίζουμε με K_r την κλειστή μπάλλα

$$K_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}.$$

Θεώρημα 3.1 *(Θεώρημα $Paley - Wiener$)*

(a) Ας υποθέσουμε ότι $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ και ότι $supp\phi \subseteq K_r$. Τότε

(1) Η συνάρτηση $f(z) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-izt}\phi(t)dt$, για $z \in \mathbb{C}^n$, είναι ακεραία και υπάρχουν σταθερές γ_N τέτοιες ώστε

(2) $|f(z)| \le \gamma_{_N}(1+|z|)^{-N}e^{r|Imz|}$, *για* $z \in \mathbb{C}^n$ *και* $N = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Αντίστροφα, εαν μία ακεραία συνάρτηση f *ικανοποιεί την* (2), *τότε υπάρχει κάποια συνάρτηση* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *με* $supp\phi \subseteq K_r$ *έτσι ώστε να ισχύει η* (1).

Απόδειξη

(a) Καταρχήν παρατηρούμε ότι εαν $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, τότε

$$|e^{-izt}| = e^{yt} \le e^{|y||t|} \le e^{r|Imz|}$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}^n$ με $|t| \le r$ $\big($και $|Imz| = (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{1/2}\big)$. Προκύπτει τότε ότι η $e^{-izt}\phi(t)$ είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$. Επιπλέον, για κάθε συγκεκριμένο $z \in \mathbb{C}^n$ η δυναμοσειρά του e^{-izt} συγκλίνει ομοιόμορφα για $t \in K_r$ κι έτσι

$$\begin{aligned} f(z) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(t)\sum_{a\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{(-iz)^\alpha t^\alpha}{\alpha!}dt \\ &= \sum_{a\in\mathbb{Z}_+^n}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(t)\frac{(-iz)^\alpha t^\alpha}{\alpha!}dt \\ &= \sum_{a\in\mathbb{Z}_+^n}(2\pi)^{-n/2}\frac{(-iz)^\alpha}{\alpha!}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(t)t^\alpha dt \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} \left|\int\phi(t)t^\alpha dt\right| &\le \int|\phi(t)|r^{\alpha_1}\ldots r^{\alpha_n}dt \\ &= r^{|\alpha|}\|\phi\|_{L^1} \end{aligned}$$

συνεπώς βλέπουμε ότι η σειρά της $f(z)$ συγκλίνει απόλυτα για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$ άρα η f είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}^n$.

Ολοκληρώνοντας κατα μέλη, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} i^\alpha z^\alpha f(z) &= (2\pi)^{-n/2}\int\phi(t)(iz)^\alpha e^{-izt}dt \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int(D^\alpha\phi)(t)e^{-izt}dt \end{aligned}$$

συνεπώς

$$|z^\alpha||f(z)| \le (2\pi)^{-n/2}\|D^\alpha\phi\|_{L^1}e^{r|Imz|}.$$

Η τελευταία σχέση, σε συνδιασμό με την ανισότητα

$$(1+|z|)^N \le (1+|z_1|+\cdots+|z_n|)^N,$$

δίνει ότι

$$(1+|z|)^N|f(z)| \le \gamma_{_N}e^{r|Imz|}$$

για κατάλληλη σταθερά $\gamma_{_N}$, η οποία είναι η (2).

(b) Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι ακεραία και ικανοποιεί τις ανισότητες (2). Για $t \in \mathbb{R}^n$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{itx} dx.$$

Καθώς το $(1+|x|)^N f(x)$ είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}^n$ για κάθε N (απ'την (2)), προκύπτει ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη συνάρτηση και ότι $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε στον τύπο της ϕ το x από το $x+iy$, χωρίς αλλαγές. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε αρχικά

$$I(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+i\eta, z_2, \ldots, z_n) e^{t_1(x+i\eta)+t_2 z_2+\cdots+t_n z_n}$$

όπου $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R},\ z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ και $\eta \in \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι $I(\eta) = I(0)$ το οποίο δείχνει ότι το I δεν εξαρτάται απ'το η. Ας είναι Γ το (κλειστό, απλό) ορθογώνιο περίγραμμα στο $\mathbb{C}$ με ακμές στα σημεία $\pm X$ και $\pm X + i\eta$, όπου $X > 0$. Καθώς η συνάρτηση $\zeta \to f(\zeta, z_2, \ldots, z_n) e^{(t_1\zeta+t_2 z_2+\cdots+t_n z_n)}$ είναι αναλυτική, απ'το θεώρημα του *Cauchy* προκύπτει ότι

$$\int_\Gamma f(\zeta, z_2, \ldots, z_n) e^{(t_1\zeta+t_2 z_2+\cdots+t_n z_n)} = 0. \tag{3.1}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την (2) για να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα κατα μήκος των κατακόρυφων πλευρών του ορθογωνίου περιγράμματος Γ. Για να το κάνουμε αυτό παίρνουμε $z = (\pm X + iy, z_2, \ldots, z_n)$, κι έτσι

$$\begin{aligned}
&\left| f(\pm X + iy, z_2, \ldots, z_n) e^{i(t_1(\pm X+iy)+t_2 z_2+\cdots+t_n z_n)} \right| \\
\leq\ & \frac{\gamma_N e^{r|Imz|} e^{-t_1 y} e^{-t_2|Imz_2|} \cdots e^{-t_n|Imz_n|}}{\left(1 + (|\pm X + iy|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{1/2}\right)^N} \\
\leq\ & \frac{\gamma_N}{(1+|\pm X+iy|)^N} e^{r|Imz|} e^{-t_1 y} e^{-t_2|Imz_2|} \cdots e^{-t_n|Imz_n|} \\
\leq\ & \frac{\gamma_N}{(1+X)^N} e^{r|Imz|} e^{-t_1 y} e^{-t_2|Imz_2|} \cdots e^{-t_n|Imz_n|} \\
\to\ & 0
\end{aligned}$$

καθώς $X \to \infty$ για όλα τα $|y| \leq |\eta|$. Προκύπτει λοιπόν ότι το κομμάτι του επικαμπυλίου ολοκληρώματος πάνω στις κατακόρυφες πλευρές του Γ συγκλίνει στο 0, καθώς $X \to \infty$ συνεπώς από την 3.1 έχουμε ότι $I(0) - I(\eta) = 0$ όπως ακριβώς θέλαμε.

Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα αυτό συντεταγμένη - συντεταγμένη, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+iy) e^{it(x+iy)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n
\end{aligned}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Τώρα, θεωρούμε $N \in \mathbb{N}$ να είναι τέτοιο ώστε $(1+|x|)^{-N} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, κάνοντας χρήση της (2), μαζί με την ανισότητα $(1+|x+iy|)^{-N} \leq (1+|x|)^{-N}$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &\leq (2\pi)^{-n/2}\gamma_N \int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-N}e^{r|y|}e^{-ty}dx \\ &\leq (2\pi)^{-n/2}\gamma_N e^{(r|y|-ty)}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-N}dx \end{aligned}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, υπάρχει κάποια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$|\phi(t)| \leq Ce^{r|y|-ty}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε τώρα ότι αυτό δίνει ότι $supp\phi \subseteq K_r$. Πράγματι, ας είναι $t \in \mathbb{R}^n$ συγκεκριμένο και τέτοιο ώστε $|t| > r$. Παίρνοντας $y = \lambda t$, με $\lambda > 0$, προκύπτει ότι $ty = \lambda|t|^2$ και βλέπουμε ότι

$$|\phi(t)| \leq Ce^{\lambda|t|(r-|t|)}$$

για κάθε $\lambda > 0$. Παίρνοντας $\lambda \to \infty$, προκύπτει ότι $\phi(t) = 0$ κι έτσι καταλήγουμε ότι $supp\phi \subseteq K_r$, όπως το θέλαμε.

Απ'το θεώρημα αντιστροφής του *Fourier* έχουμε

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2}\int \phi(t)e^{-ixt}dt.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι η αναλυτική συνάρτηση $z \mapsto g(z) \equiv \int \phi(t)e^{-izt}dt$ είναι η ίδια με την f στον $\mathbb{R}^n$ συνεπώς απ'το προηγούμενο λήμμα, $f = g$ στον $\mathbb{C}^n$ το οποίο σημαίνει ότι η f δίνεται από την (1) και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Δίνεται παρακάτω και η γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος (χωρίς απόδειξη) για κατανομές.

Θεώρημα 3.2 *(a) Ας υποθέσουμε ότι $u \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ και ότι $supp u \subseteq K_r$. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier, $f(z) = \hat{u}(z)$ είναι ακεραία, ο περιορισμός της στο $\mathbb{R}^n$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της u, και υπάρχει σταθερά $\gamma > 0$ τέτοια ώστε*

$$|f(z)| \leq \gamma(1+|z|)^N e^{r|Imz|} \tag{3.2}$$

όπου N είναι η τάξη της u.

(b) Αντίστροφα, εαν η f είναι ακεραία και ικανοποιεί την 3.2, για κάποιο $N \in \mathbb{N}$, κάποιο $\gamma > 0$ και $r > 0$, τότε $f(z) = \hat{u}(z)$ για κάποια $u \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$ με $supp u \subseteq K_r$.

□

4 Παράρτημα

4.1 Χώρος Schwartz

Ο χώρος των απότομα αύξουσων συναρτήσεων $\mathfrak{S}$ έχει τη σημαντική ιδιότητα ότι ο μετασχηματισμός *Fourier* είναι ένας ενδομορφισμός στον χώρο αυτό. Η ιδιότητα αυτή ωθεί κάποιον, με δυϊκότητα, να ορίσει τον μετασχηματισμό *Fourier* για στοιχεία στον δυϊκό χώρο του $\mathfrak{S}$, δηλαδή για κατανομές.

Ορισμός 4.1 *Ο* χώρος των απότομα αύξουσων συναρτήσεων *στο* $\mathbb{R}^n$ *είναι ο χώρος των συναρτήσεων*

$$\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid, ||f||_{\alpha,\beta} < \infty \text{ για όλους τους πολυδείκτες } \alpha, \beta\},$$

όπου $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *είναι το σύνολο των λείων συναρτήσεων από το* $\mathbb{R}^n$ *στο* $\mathbb{C}$, *και*

$$||f||_{\alpha,\beta} = ||x^\alpha D^\beta f||_\infty.$$

Εδώ, $||\cdot||_\infty$ *είναι η supremum norm, και κάνουμε χρήση πολυδεικτών. Όταν η διάσταση* n *είναι προφανής, τότε είναι βολικό να γράφουμε* $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. *Ο χώρος* $\mathfrak{S}$ *καλείται επίσης Schwartz* χώρος.

Παραδείγματα συναρτήσεων του $\mathfrak{S}$

1. Εαν i είναι ένας πολυδείκτης, και a είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε
$$x^i e^{-ax^2} \in \mathfrak{S}.$$

2. Κάθε λεία συνάρτηση με συμπαγή φορέα f βρίσκεται στο $\mathfrak{S}$. Αυτό είναι προφανές αφού κάθε παράγωγος της f είναι συνεχής, άρα $x^\alpha D^\beta f$ έχει μέγιστη τιμή στο $\mathbb{R}^n$.

Ιδιότητες

1. $\mathfrak{S}$ είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Με άλλα λόγια, $\mathfrak{S}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και κάτω από τον μιγαδικό βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

2. Για κάθε $1 \leq p \leq \infty$, έχουμε
$$\mathfrak{S} \subset L^p,$$
όπου $L^p(\mathbb{R}^n)$ είναι ο χώρος των p-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}^n$. Οι συναρτήσεις στο $\mathfrak{S}$ είναι επίσης φραγμένες συναρτήσεις.

3. Ο μετασχηματισμός *Fourier* είναι γραμμικός ισομορφισμός $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$.

4.2 Ολοκληρωτικοί τύποι Cauchy

Έστω $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ ένας ανοικτός δίσκος στο μιγαδικό επίπεδο και έστω $f(z)$ μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο ανοικτό τόπο που περιέχει το σύνολο D και το σύνορό του. Τότε, για κάθε $z \in D$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \end{aligned}$$

Εδώ $C = \partial D$ είναι το αντίστοιχο κυκλικό συνοριακό περίγραμμα, προσανατολισμένο με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, με την πιο προφανή παραμέτρηση που δίνεται από

$$\zeta = z_0 + Re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

4.3 Θεώρημα Κανονικότητας για Κατανομές

Έστω $T \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n)$. Τότε $T = D^\beta g$, δηλαδή

$$T(\phi) = \int (-1)^{|\beta|} g(x)(D^\beta \phi)(x) d^n x, \ \ \text{για κάθε} \phi \in \mathfrak{S}$$

Αναφορές

[1] Reed M., Simon B., Methods of Mathematical Physics, Vol. 1 Functional Analysis, Revised and Enlarged Edition, Academic Press, 1980.

[2] Ivan F. Wilde, Distribution Theory (Generalized Functions) - Notes, 2006.

[3] http://www.wikipedia.org

[4] http://planetmath.org