Επίλυση Προβλημάτων με Χρωματισμό

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης
asygelakis@gmail.com

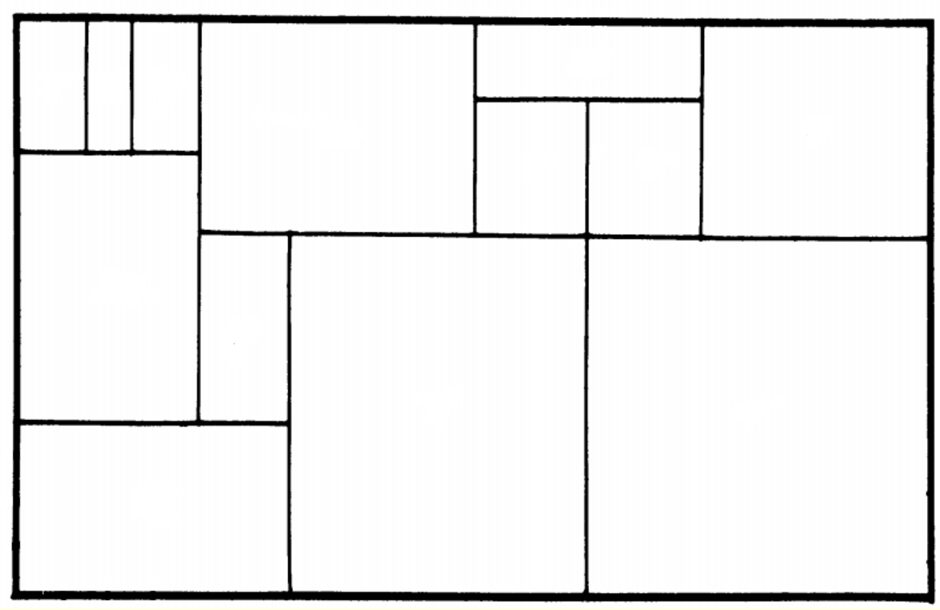
Η αφορμή συγγραφής της εργασίας

Το παρακάτω πρόβλημα που τέθηκε στο Μεταπτυχιακό μάθημα «Θεωρία Αριθμών» το ακαδημαϊκό έτος 2005-2006 από τον καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης Νικόλαο Τζανάκη:

«Εάν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χωριστεί σε μικρότερα με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του αρχικού και με την ιδιότητα ότι κάθε ένα από αυτά έχει τουλάχιστον μία πλευρά της οποίας το μήκος είναι ακέραιος αριθμός, τότε η ιδιότητα αυτή μεταφέρεται και στο αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο»

Η αφορμή συγγραφής της εργασίας

«Εάν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χωριστεί σε μικρότερα με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του αρχικού και με την ιδιότητα ότι κάθε ένα από αυτά έχει τουλάχιστον μία πλευρά της οποίας το μήκος είναι ακέραιος αριθμός, τότε η ιδιότητα αυτή μεταφέρεται και στο αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο»



Τι περιέχει η εργασία

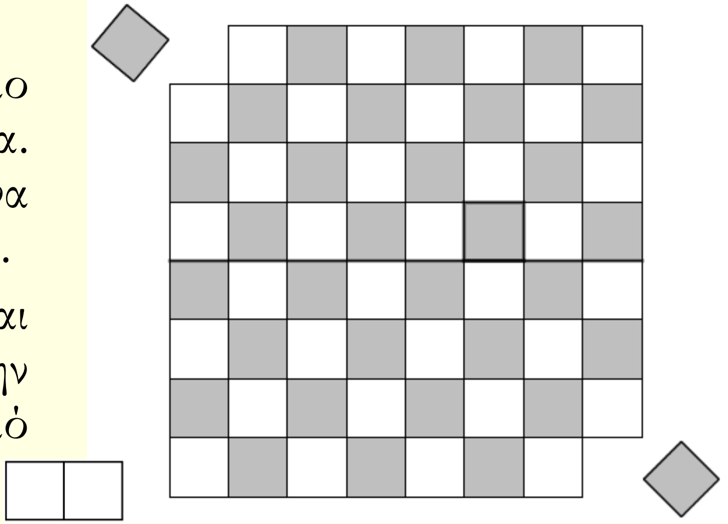
- Προβλήματα των οποίων η λύση στηρίζεται σε χρωματισμό του σχήματος. Μέσω του χρωματισμού:
  - ✓ Υπάρχουν προβλήματα στα οποία ο χρωματισμός απαντάει «αρνητικά» ως προς το αν μπορούν να ισχύουν οι απαιτήσεις του προβλήματος.
  - ✓ Υπάρχουν προβλήματα στα οποία ο χρωματισμός απαντάει «θετικά».
  - ✓ Υπάρχουν προβλήματα που ενώ φαίνεται ότι για την επίλυσή τους θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο χρωματισμός του σχήματος, εντούτοις αποδεικνύεται ότι δε μπορεί να δοθεί απάντηση με τη βοήθειά του.

Τι είδους προβλήματα περιλαμβάνονται;

- Προβλήματα κάλυψης ενός ορθογωνίου πλέγματος (λ.χ. σκακιέρα) με πολυόμινα (ντόμινο, τριόμινο, κτλ).
- Προβλήματα κίνησης μέσα σε κάποιο πλέγμα με συγκεκριμένο τρόπο που ορίζεται στο πρόβλημα (π.χ. κίνηση αλόγου μέσα σε σκακιέρα).
- Προβλήματα απαρίθμησης.
- Το πρόβλημα – αφορμή συγγραφής του άρθρου.

Ένα γνωστό πρόβλημα

Εάν από μία σκακιέρα αφαιρέσουμε δύο γωνιακά τετράγωνα που βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο, να εξετάσετε εάν μπορούμε να την πλακοστρώσουμε με ορθογώνια διαστάσεων 2×1 *(ντόμινο) χωρίς να υπάρχουν επικαλύψεις.*



- Τα τετράγωνα που αφαιρούμε έχουν το ίδιο χρώμα, έστω μαύρο όπως στο διπλανό σχήμα. Άρα συνολικά στο τέλος υπάρχουν 62 τετράγωνα εκ των οποίων 32 είναι λευκά και 30 είναι μαύρα.
- Όμως κάθε ντόμινο καταλαμβάνει ένα λευκό και ένα μαύρο τετράγωνο άρα μετά την πλακόστρωση πρέπει να έχουμε ίδιο αριθμό λευκών και μαύρων τετραγώνων, άτοπο.

- Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται για πρώτη φορά στο βιβλίο Critical Thinking (1946) του φιλοσόφου Max Black και μεταγενέστερα σε αρκετά άρθρα και βιβλία. Η ίδια απόδειξη για την αδυναμία κάλυψης λειτουργεί αν αφαιρέσουμε δύο οποιαδήποτε τετράγωνα ίδιου χρώματος από τη σκακιέρα. Ο Ralph Gomory σε ένα βιβλίο του R. Honsberger έδειξε ότι αν από τη σκακιέρα αφαιρέσουμε δύο οποιαδήποτε τετράγωνα αντίθετου χρώματος τότε μπορούμε πάντοτε να την καλύψουμε με 31 ντόμινο.

Πρόβλημα 2

Μπορεί ένα άλογο να ξεκινήσει από το κάτω αριστερά τετράγωνο μιας 8×8 *σκακιέρας και να καταλήξει στο πάνω δεξιά περνώντας από όλα τα τετράγωνα ακριβώς μία φορά;*

Λύση:

- Αν χρησιμοποιήσουμε το συνηθισμένο χρωματισμό της σκακιέρας, τότε το άλογο σε κάθε κίνηση μετακινείται από τετράγωνο ενός χρώματος σε τετράγωνο του αντίθετου χρώματος.
- Πρέπει όμως, να κάνει 63 κινήσεις για να περάσει από όλα τα ορθογώνια άρα θα πρέπει να καταλήξει σε τετράγωνο αντίθετου χρώματος από το τετράγωνο εκκίνησης, άτοπο διότι το τετράγωνο από το οποίο ξεκίνησε και εκείνο στο οποίο θα τερματίσει έχουν το ίδιο χρώμα.

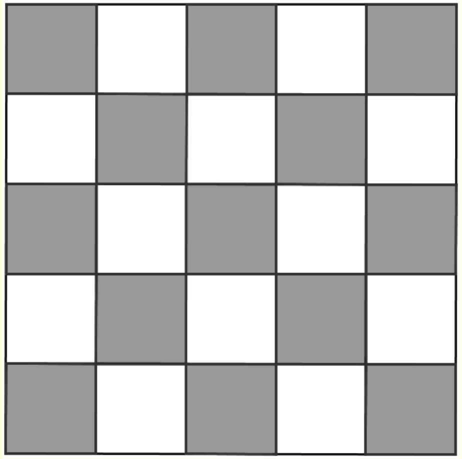
Πόρισμα: Εάν το άλογο ξεκινήσει από το κάτω αριστερά τετράγωνο μιας σκακιέρας και καταλήξει στο πάνω δεξιά περνώντας από όλα τα τετράγωνα της σκακιέρας, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα τετράγωνο από το οποίο περνάει δύο φορές και σίγουρα θα πρέπει να κάνει άρτιου πλήθους κινήσεις.

Πρόβλημα 3

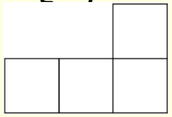
25 ζηλιάρηδες γείτονες ζουν στα τετραγωνικά (μοναδιαία) διαμερίσματα ενός 5×5 *τετραγωνικού πλέγματος. Καθένας από αυτούς νομίζει ότι, κάθε γείτονας του, που συνορεύει μαζί του οριζοντίως ή καθέτως, ζει σε καλύτερο διαμέρισμα από αυτόν. Είναι δυνατόν όλοι τους να μετακομίσουν με τέτοιο τρόπο, ώστε καθένας να καταλήξει σε κάποιο από τα ζηλευτά διαμερίσματα ενός πρώην γειτονά του;*

Λύση:

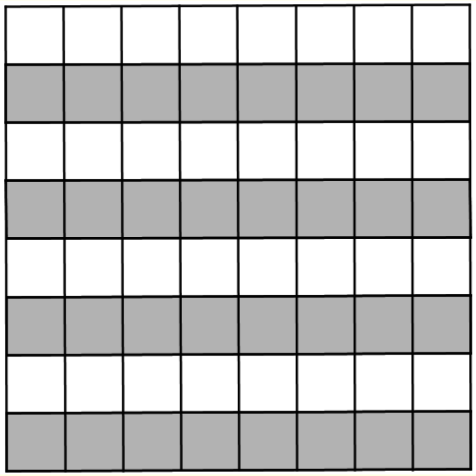
- Χρωματίζουμε το πλέγμα με το συνηθισμένο χρωματισμό της σκακιέρας όπως στο διπλανό σχήμα.
- Έχουμε 13 μαύρα και 12 λευκά τετράγωνα συνεπώς κάθε γείτονας μετά τη μετακόμιση θα βρεθεί από διαμέρισμα που είναι χρωματισμένο μαύρο σε διαμέρισμα που είναι χρωματισμένο λευκό.
- Όμως μία τέτοια μετακόμιση όλων, δεν είναι δυνατή καθώς δεν υπάρχουν 13 λευκά διαμερίσματα.



Πρόβλημα 4

Να δείξετε ότι μία σκακιέρα 8×8 *δε μπορεί να καλυφθεί (χωρίς επικαλύψεις) με 15 τετρόμινο διαστάσεων* 1×4  *και ένα L-τετρόμινο της μορφής* 

<u>Λύση:</u>

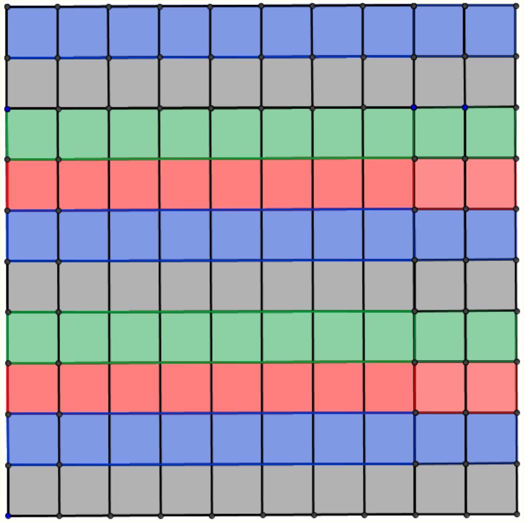


- Χρωματίζουμε, όπως στο σχήμα κάθε περιττή σειρά (ξεκινώντας απ' το κάτω μέρος) της σκακιέρας με μαύρο χρώμα και κάθε άρτια με λευκό.
- Κάθε 1×4 τετρόμινο καταλαμβάνει πάντα άρτιο αριθμό λευκών ορθογωνίων, ανεξάρτητα από τον τρόπο που θα τοποθετηθεί (οριζόντια ή κατακόρυφα).
- Το ένα και μοναδικό L-τετρόμινο καταλαμβάνει περιττό αριθμό από λευκά τετράγωνα.
- Οι δύο παραπάνω παρατηρήσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι αν ήταν δυνατή η κάλυψη της σκακιέρας, τότε ο συνολικός αριθμός λευκών τετραγώνων είναι περιττός, άτοπο αφού ο αριθμός των λευκών στη σκακιέρα είναι 32.

Πρόβλημα 5

Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο πλέγμα διαστάσεων 10×10 *δε μπορεί να καλυφθεί χωρίς επικαλύψεις με τετρόμινο διαστάσεων* 1×4

Λύση:

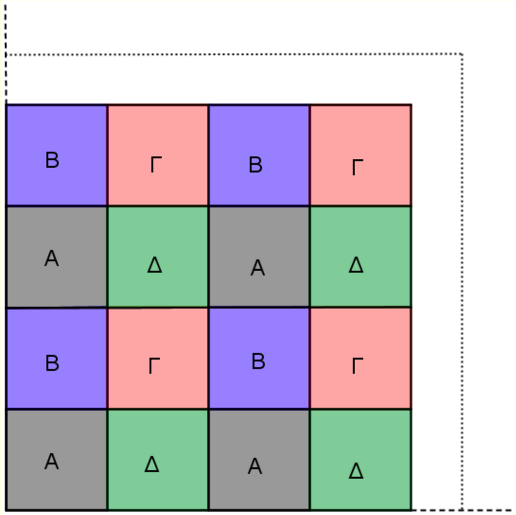


- Χρωματίζουμε την πρώτη σειρά με γκρι και όμοια τη δεύτερη, την τρίτη και την τέταρτη με μπλε, κόκκινο, πράσινο αντίστοιχα και συνεχίζουμε όμοια.
- Προφανώς 3 σειρές είναι χρωματισμένες με το γκρι και 3 με μπλε ενώ 2 με κόκκινο και 2 με πράσινο. Άρα έχουμε από $3 \times 10 =$30 τετράγωνα χρωματισμένα με γκρι ή μπλε και από 20 χρωματισμένα με κόκκινο ή πράσινο.
- Κάθε τετρόμινο καλύπτει είτε 4 τετράγωνα ίδιου χρώματος είτε 4 τετράγωνα χρωματισμένα με 4 διαφορετικά χρώματα.
- Αν τέτοια κάλυψη ήταν δυνατή, η διαφορά του πλήθους των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με γκρι από το πλήθος των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με κόκκινο πρέπει να είναι αριθμός διαιρετός από το 4.
- Όμως η διαφορά του πλήθους των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με κόκκινο από το πλήθος των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με γκρι είναι 10, αριθμός που δεν είναι διαιρετός από το 4.

Πρόβλημα 6

Ένα ορθογώνιο πλέγμα διαστάσεων $m \times n$ είναι καλυμμένο με τετρόμινο διαστάσεων 1×4 και τετρόμινο διαστάσεων 2×2. Από το ορθογώνιο αφαιρέθηκαν όλα τα τετρόμινο αλλά, ένα τετρόμινο διαστάσεων 2×2 χάθηκε και αντικαταστάθηκε με ένα τετρόμινο διαστάσεων 1×4. Είναι δυνατόν πλέον να καλυφθεί το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από τα τετρόμινο;

<u>Λύση:</u>



- Χρησιμοποιούμε το χρωματισμό του διπλανού σχήματος με 4 χρώματα ξεκινώντας το χρωματισμό από το κάτω αριστερά τετράγωνο του ορθογωνίου.
- Κάθε τετρόμινο διαστάσεων 2×2 καλύπτει ακριβώς ένα τετράγωνο που είναι χρωματισμένο με το χρώμα Α συνεπώς ο αριθμός των τετρόμινο διαστάσεων 2×2 συμπίπτει με τον αριθμό των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με το χρώμα Α.
- Κάθε τετρόμινο διαστάσεων 1×4 είτε δεν καλύπτει κανένα είτε καλύπτει δύο τετράγωνα με το χρώμα Α.
- Όταν όμως χάνεται το τετρόμινο διαστάσεων 2×2 μένει κενό ένα τετράγωνο που είναι χρωματισμένο με το χρώμα Α και με το τετρόμινο διαστάσεων 1×4 που προστίθεται, δεν είναι δυνατή η κάλυψη όλων των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με το χρώμα Α.

Χαρακτηριστικό των προηγούμενων προβλημάτων

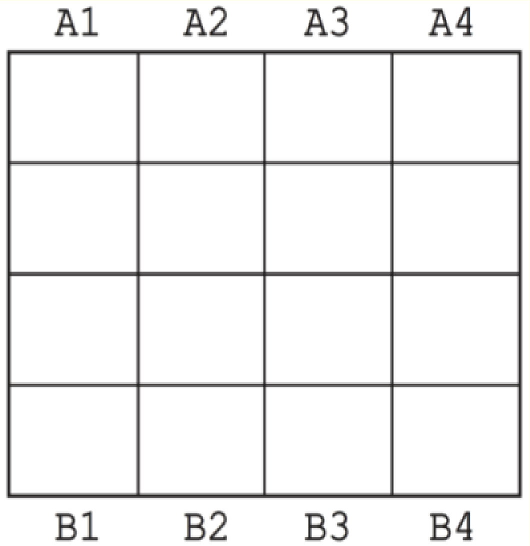
- Ζητούσαν να αποδειχθεί ότι είναι αδύνατη η κατασκευή που είχε ζητηθεί στην εκφώνηση συνεπώς
- ο χρωματισμός χρησιμοποιήθηκε για να αποδειχθεί ότι «κάτι» δεν είναι δυνατό να γίνει.

Υπάρχουν άραγε προβλήματα στα οποία η χρήση χρωματισμού να απαντάει «θετικά»;

- Τα προβλήματα αυτά είναι ελάχιστα. Επιλέγω να παρουσιάσω δύο από αυτά.

Πρόβλημα 7

Ένα μουσείο διαθέτει έναν εκθεσιακό χώρο που αποτελείται από 16 δωμάτια. Η κάτοψή του φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μεταξύ κάθε ζεύγους οριζόντιων ή κατακόρυφων δωματίων που είναι διπλανά, υπάρχει μία πόρτα. Επιπλέον, κάθε δωμάτιο στη βόρεια και νότια πλευρά του κτιρίου (οι άνω και κάτω γραμμές της κάτοψης), έχει μια πόρτα που οδηγεί έξω από τον εκθεσιακό χώρο. Κατά το σχεδιασμό μιας νέας έκθεσης, ο φύλακας πρέπει να αποφασίσει ποιες πόρτες πρέπει να είναι ανοιχτές, έτσι ώστε οι επισκέπτες να εισέλθουν στην έκθεση μέσα από μια πόρτα που βρίσκεται στη βόρεια πλευρά, να επισκεφτούν κάθε δωμάτιο ακριβώς μια φορά και να βγουν έξω από μια πόρτα στη νότια πλευρά.



Φυσικά, ο φύλακας θέλει επίσης να έχει όσο το δυνατόν λιγότερες πόρτες ανοιχτές.

(α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός των θυρών που θα πρέπει να είναι ανοικτές για την έκθεση;

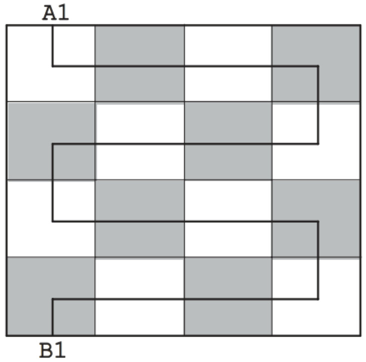
(β) Ποιες πόρτες εισόδου στην έκθεση και εξόδου από αυτή πρέπει να είναι ανοικτές; (Να αναφέρετε όλα τα ζευγάρια θυρών εισόδου-εξόδου που μπορεί να είναι ανοικτές για την έκθεση).

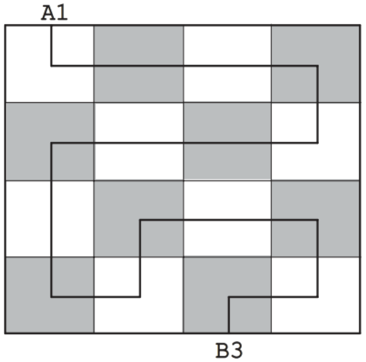
Πρόβλημα 7

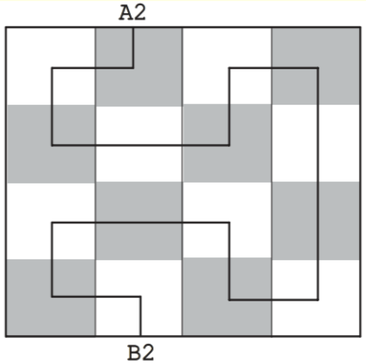
<u>**Λύση:**</u>

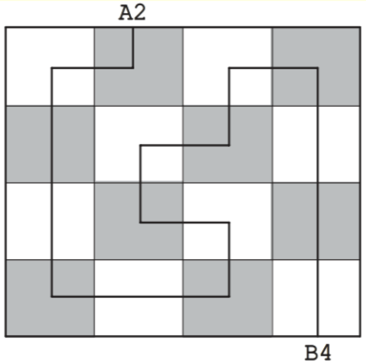
(α) Από ένα μονοπάτι μέσα από την έκθεση οι επισκέπτες θα επισκέπτονται κάθε δωμάτιο ακριβώς μια φορά και θα πρέπει να εισέρχονται σε κάθε δωμάτιο και να εξέρχονται από αυτό μέσω διαφορετικών θυρών. Αυτό σημαίνει, ότι τουλάχιστον 17 πόρτες πρέπει να είναι ανοικτές, μεταξύ των οποίων μία πόρτα εισόδου και μία πόρτα εξόδου.

(β) Χρωματίζουμε κάθε τετράγωνο με το συνηθισμένο χρωματισμό της σκακιέρας. Γίνεται τότε φανερό ότι οποιαδήποτε διαδρομή μέσα από την έκθεση, θα πρέπει να περάσει από δωμάτιο σε δωμάτιο εναλλάσσοντας κάθε φορά χρώμα. Από το σύνολο των 16 δωματίων που θα επισκεφτεί ο επισκέπτης, το πρώτο και το τελευταίο τετράγωνο θα πρέπει να χρωματιστεί με αντίθετα χρώματα. Συνεπώς τα πιθανά ζεύγη θυρών που πρέπει να είναι ανοικτές είναι τα (A1, B1), (A1, B3), (A2, B2), (A2, B4) και συμμετρικά τα (A4, B4), (A4, B2), (A3, B3), (A3, B1). Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν μία διαδρομή για καθένα από τα τέσσερα πρώτα ζεύγη που αναφέρονται παραπάνω.







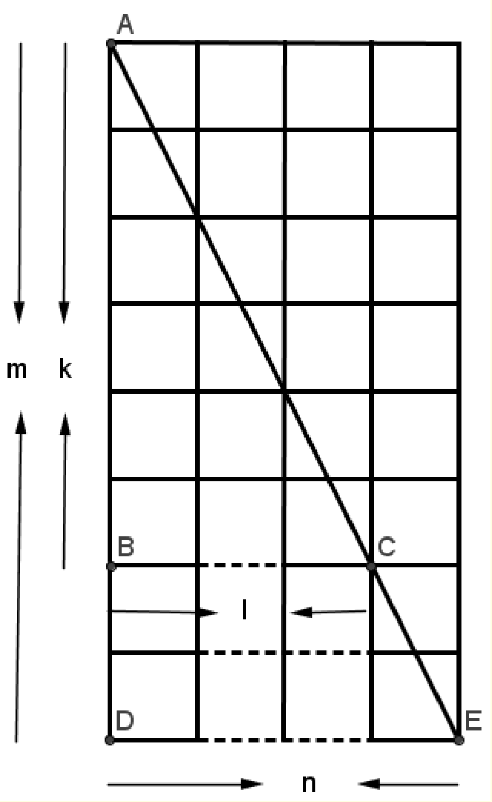


Πρόβλημα 8

(α) Να βρείτε πόσα τετράγωνα τέμνει η διαγώνιος ενός ορθογωνίου πλέγματος διαστάσεων 1005×1009.

Βοηθητικό Λήμμα

- Έστω ότι η διαγώνιος ξεκινάει από την πάνω αριστερή γωνία του ορθογωνίου πλέγματος και καταλήγει στην κάτω δεξιά.
- Εάν το πλέγμα είναι διαστάσεων $m \times n$ με $(m, n) = 1$ και η διαγώνιος τέμνει κάποιο τετράγωνο του ορθογωνίου, τότε το τέμνει σε **εσωτερικό σημείο** της πλευράς του (και **όχι σε γωνιακό** όπως π.χ. στο σχήμα).



Απόδειξη ισχυρισμού

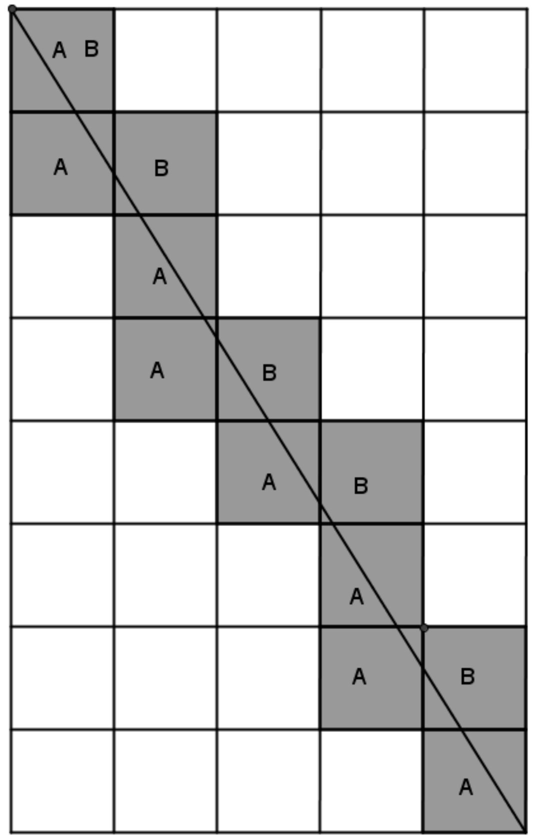
Αν υποθέσουμε αντίθετα ότι τέμνει κάποιο τετράγωνο σε μία γωνία του (ας υποθέσουμε στο σημείο C του διπλανού σχήματος) και το τετράγωνο αφήνει k τετράγωνα πάνω και l τετράγωνα αριστερά από αυτό, τότε λόγω του ότι τα σημεία A, C, E είναι συνευθειακά, παίρνουμε την ομοιότητα των τριγώνων ABC και ADE κι έτσι $ml = kn$κι επειδή $(m, n) = 1$ άρα $n|l$, άτοπο διότι $n > l$.

Πρόβλημα 8

(α) Να βρείτε πόσα τετράγωνα τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία η διαγώνιος ενός ορθογωνίου πλέγματος διαστάσεων 1005×1009.

<u>Λύση:</u>

- Είναι $(1005,1009) = 1$. Χρωματίζουμε όλα τα τετράγωνα που τέμνει η διαγώνιος μαύρα. Σε κάθε **<u>γραμμή</u>** του πλέγματος μαρκάρουμε το μαύρο τετράγωνο που βρίσκεται πιο κοντά στην **<u>αριστερή</u>** πλευρά του **<u>αρχικού</u>** ορθογωνίου με το γράμμα Α.
- Σε κάθε **<u>στήλη</u>** του πλέγματος μαρκάρουμε το μαύρο τετράγωνο που βρίσκεται πιο κοντά στην **<u>πάνω</u>** πλευρά του πλέγματος με το γράμμα Β. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το μαρκάρισμα που θα κάναμε σε ένα πλέγμα διαστάσεων 8×5.



Πρόβλημα 8

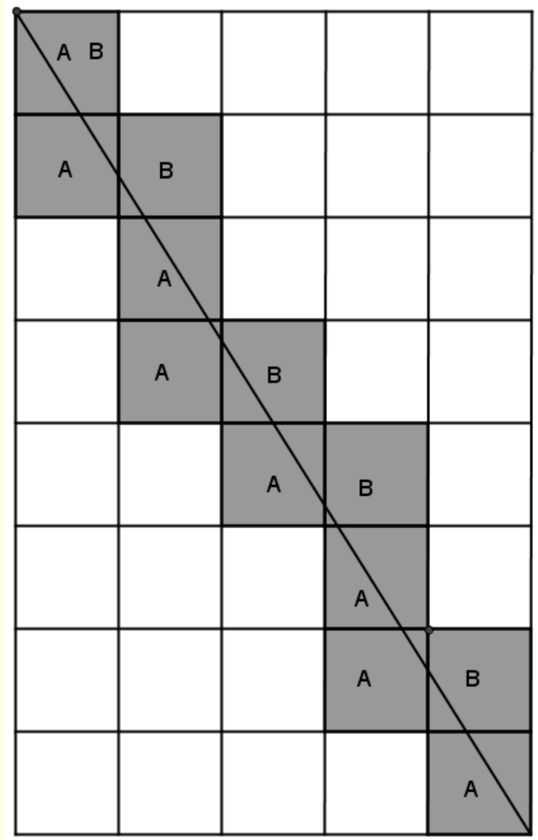
(α) Να βρείτε πόσα τετράγωνα τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία η διαγώνιος ενός ορθογωνίου πλέγματος διαστάσεων 1005×1009.

<u>Λύση:</u>

- **<u>Κάθε ένα</u>** από τα **<u>μαύρα</u>** τετράγωνα μαρκάρεται **<u>ακριβώς μία</u>** φορά με ένα από τα γράμματα Α ή Β **<u>εκτός</u>** από το πάνω αριστερά που μαρκάρεται και από τα δύο $(\star)$. Συνεπώς ο αριθμός των μαύρων τετραγώνων είναι $1005 + 1009 - 1 = 2013$.

<u>Απόδειξη ισχυρισμού</u>

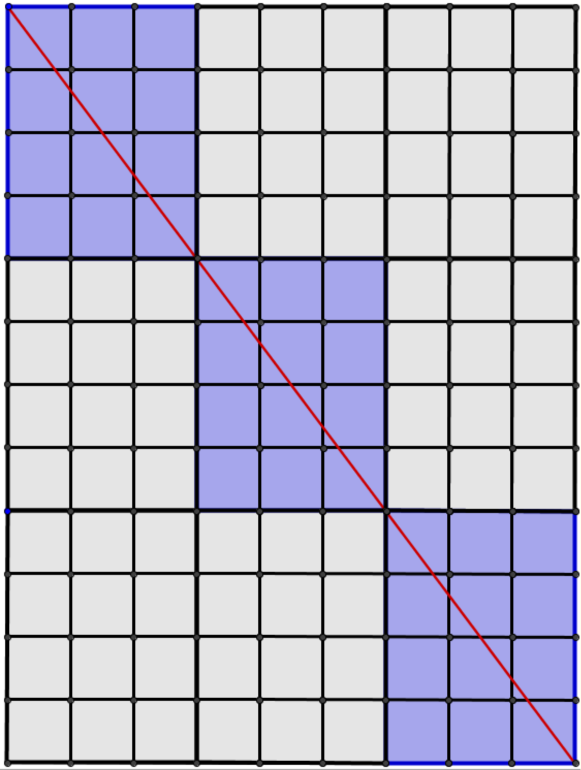
Αν υπήρχε κάποιο μαύρο τετράγωνο που δεν μαρκάρεται με κάποιο γράμμα τότε το τετράγωνο ακριβώς από πάνω του και το τετράγωνο αμέσως αριστερά από εκείνο, θα πρέπει να είναι μαύρα, δηλαδή, θα πρέπει να τέμνονται από τη διαγώνιο σε εσωτερικά τους σημεία. Όμως το μόνο κοινό σημείο αυτών είναι η κοινή κορυφή, άτοπο. Επίσης αν κάποιο τετράγωνο μαρκάρεται και με τα δύο γράμματα τότε δεν υπάρχει άλλο μαύρο τετράγωνο ούτε στην ίδια γραμμή και αριστερότερα από αυτό, ούτε στην ίδια στήλη και πάνω από αυτό. Αυτό σημαίνει, ότι η διαγώνιος διέρχεται από την πάνω αριστερά γωνία του τετραγώνου και αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο στο πάνω αριστερά τετράγωνο του πλέγματος.



Πρόβλημα 8

(β) Να βρείτε πόσα τετράγωνα τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία η διαγώνιος ενός ορθογωνίου πλέγματος διαστάσεων 12×9.

Λύση:

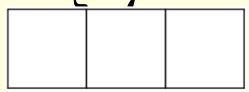


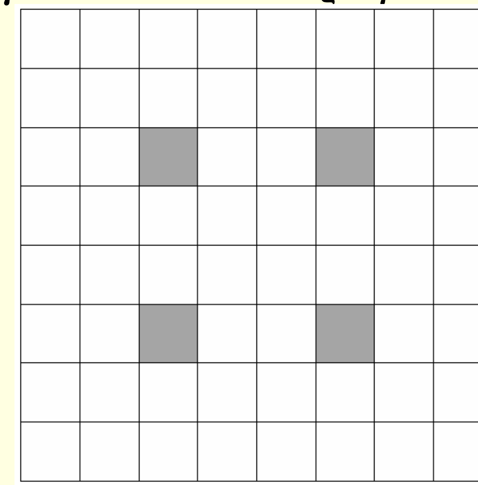
- Είναι $(12,9) = 3$ και $\left(\frac{12}{3}, \frac{9}{3}\right) = (4,3) = 1$, άρα μπορούμε να φτιάξουμε 3×3 blocks κάθε ένα από τα οποία, θα αποτελείται από ορθογώνια πλέγματα διαστάσεων 4×3.
- Φέρουμε τη διαγώνιο του αρχικού πλέγματος η οποία θα περνάει από την κάτω δεξιά γωνία του πρώτου block από την πρώτη σειρά, από την κάτω δεξιά γωνία του δεύτερου block από τη δεύτερη σειρά, του τρίτου από την τρίτη σειρά (το ότι η διαγώνιος διέρχεται από αυτές τις γωνίες είναι εύκολο να αποδειχθεί με ομοιότητα τριγώνων).
- Σε κάθε block η διαγώνιος τέμνει 4+3-1=6 τετράγωνα άρα συνολικά στα 3 blocks θα τέμνει $3 \times 6 = 18$ τετράγωνα.

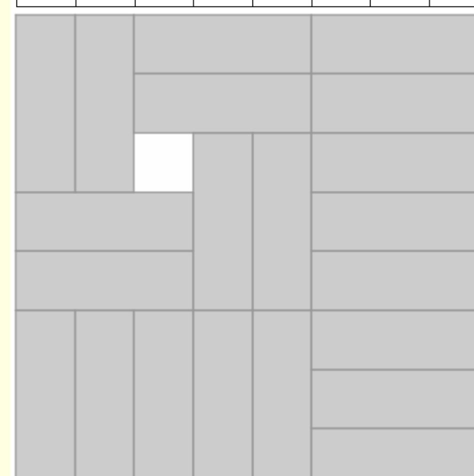
Πρόβλημα 8

<u>**Φυσιολογική γενίκευση:**</u> Η διαγώνιος ενός ορθογωνίου πλέγματος διαστάσεων $m \times n$ τέμνει $m + n - (m, n)$ τετράγωνα όπου με (m, n) συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών m και n.

Πρόβλημα 9

Να βρεθεί πιο τετράγωνο πρέπει να αφαιρεθεί από μία σκακιέρα 8×8 *ώστε τα υπόλοιπα 63 τετράγωνα να μπορούν να καλυφθούν από τριόμινο διαστάσεων* 1×3 



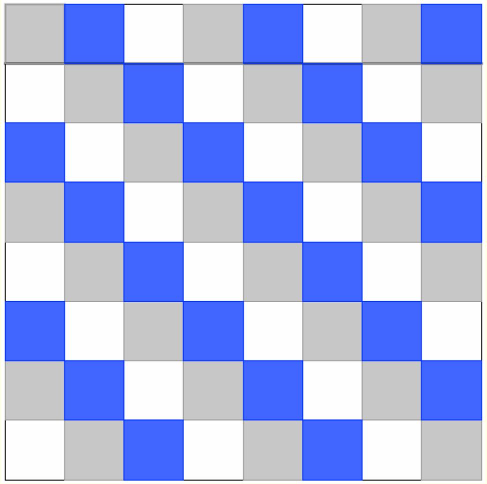


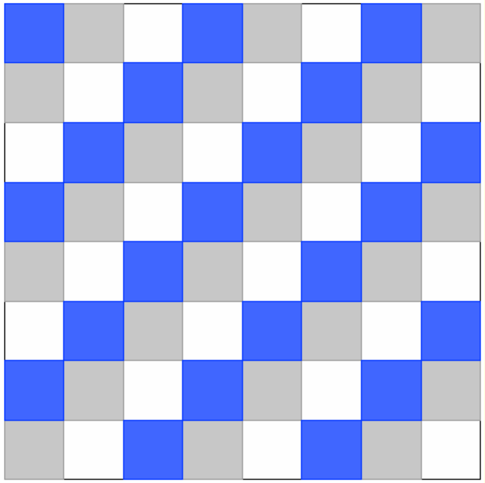
<u>Λύση:</u>

- Θα δείξουμε ότι η σκακιέρα καλύπτεται από τριόμινο αν και μόνο αν το τετράγωνο που θα αφαιρέσουμε είναι κάποιο από τα 4 μαύρα τετράγωνα που εικονίζονται στο πάνω δεξιά σχήμα.
- Μία κάλυψη με τριόμινο φαίνεται στο κάτω δεξιά σχήμα.

Πρόβλημα 9

- Χρησιμοποιούμε τρία χρώματα για να χρωματίσουμε τη σκακιέρα, ώστε κάθε τριόμινο που θα τοποθετηθεί οριζόντια ή κατακόρυφα να καλύπτει τρία τετράγωνα με διαφορετικό χρώμα (π.χ. διπλανό σχήμα)
- Με τον διπλανό τρόπο υπάρχουν 21 λευκά, 21 μπλε και 22 γκρι τετράγωνα. Συνεπώς, το τετράγωνο που θα αφαιρεθεί πρέπει να είναι **υποχρεωτικά γκρι**.
- Χρωματίζουμε **απ' την αρχή** τη σκακιέρα με τρόπο ώστε ο καινούριος χρωματισμός να είναι **ίδιος** με τον προηγούμενο αν στον τελευταίο εφαρμόσουμε **στροφή** ως προς το κέντρο του τετραγώνου κατά 90° με την θετική φορά. Και πάλι το τετράγωνο που θα αφαιρεθεί πρέπει να είναι γκρι.
- Συγκρίνοντας τα δύο τελευταία σχήματα, **τα μόνα γκρι** τετράγωνα που μπορούν να αφαιρεθούν ώστε να μπορεί να γίνει η παραπάνω κάλυψη, είναι τα κοινά στα δύο προηγούμενα σχήματα δηλαδή τα τέσσερα που αναφέρθηκαν στην αρχή της λύσης. Geogebra



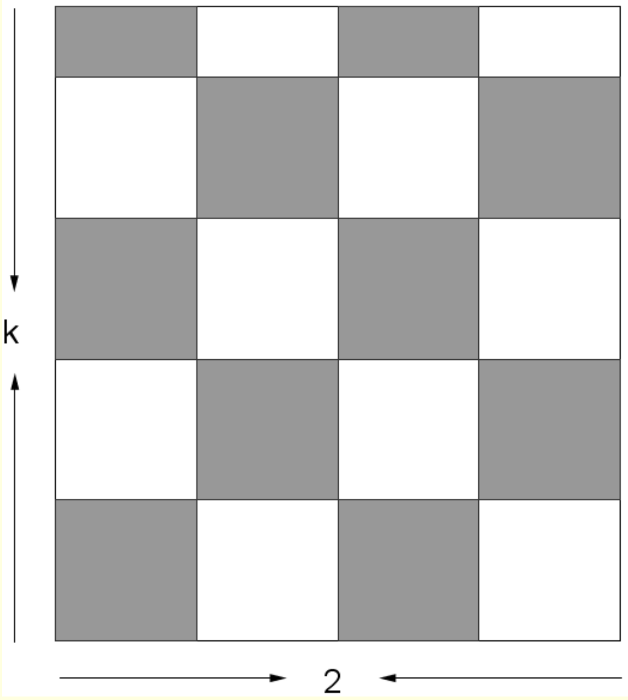


Πρόβλημα 10

Εάν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χωριστεί σε μικρότερα με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του αρχικού και με την ιδιότητα ότι κάθε ένα από αυτά έχει τουλάχιστον μία πλευρά της οποίας το μήκος είναι ακέραιος αριθμός, τότε η ιδιότητα αυτή μεταφέρεται και στο αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

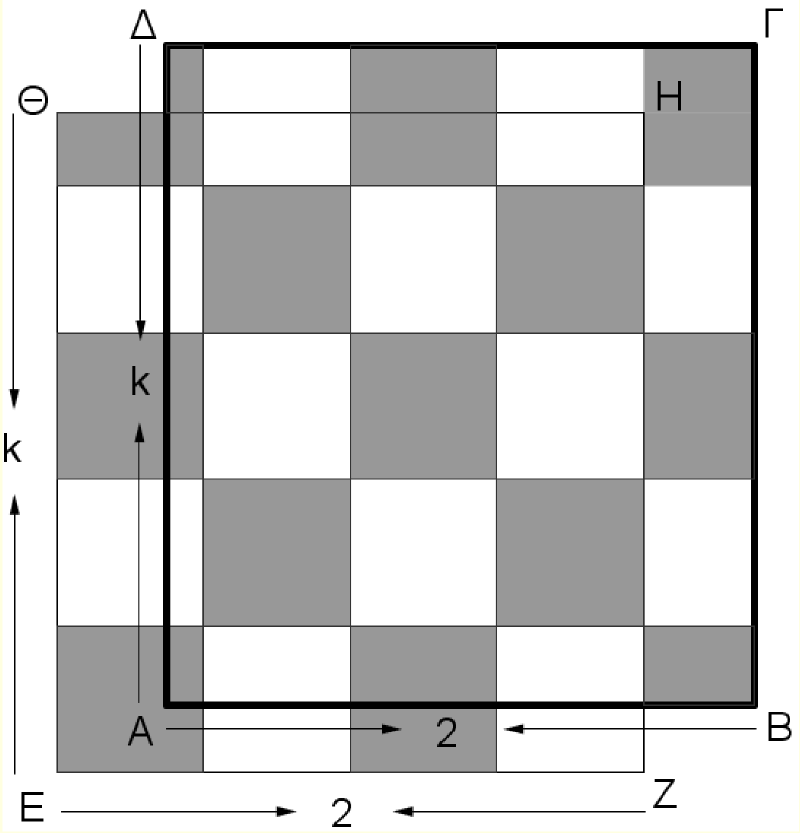
- **Χρήσιμο Λήμμα 1**

Αν κάποιο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τουλάχιστον μία πλευρά του **ακέραιο αριθμό** το χωρίσουμε σε τετράγωνα διαστάσεων $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ξεκινώντας από την κάτω αριστερή γωνία και το χρωματίσουμε όπως τη σκακιέρα, τότε η συνολική περιοχή του τετραγώνου που είναι βαμμένη με λευκό **είναι ίση** με τη συνολική περιοχή που είναι βαμμένη με μαύρο. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα τέτοιο ορθογώνιο διαστάσεων $k \times 2$ όπου k τυχαίος θετικός πραγματικός αριθμός.



Πρόβλημα 10

- Το ίδιο συμβαίνει με ένα ορθογώνιο, το οποίο το χρωματίζουμε με τον παραπάνω τρόπο, με τη διαφορά ότι ο χωρισμός του σε τετράγωνα διαστάσεων $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ δεν ξεκινά απαραίτητα από την κάτω αριστερή γωνία αλλά από οποιοδήποτε σημείο μιας πλευράς (βλέπε διπλανό σχήμα).
- Αυτό συμβαίνει διότι η συγκεκριμένη περίπτωση ανάγεται στην προηγούμενη με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση του σχήματος.
- Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ διαστάσεων $k \times 2$, το οποίο εύκολα ανάγεται στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ με βάση τον προηγούμενο χρωματισμό. Geogebra



Πρόβλημα 10

- **Χρήσιμο Λήμμα 2**

Αν κάποιο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές k, l που είναι **μικρότερες της μονάδας,** το χωρίσουμε σε τετράγωνα διαστάσεων $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ και χρωματίσουμε το σχήμα όπως τη σκακιέρα, η συνολική περιοχή που είναι βαμμένη με λευκό **δεν είναι ίση** με τη συνολική περιοχή που είναι βαμμένη με μαύρο.

Για την απόδειξη αρκεί κάποιος να θεωρήσει τις περιπτώσεις

α) $k < \frac{1}{2}$ και $0 < l < 1$

β) $k > \frac{1}{2}$ και $l > \frac{1}{2}$

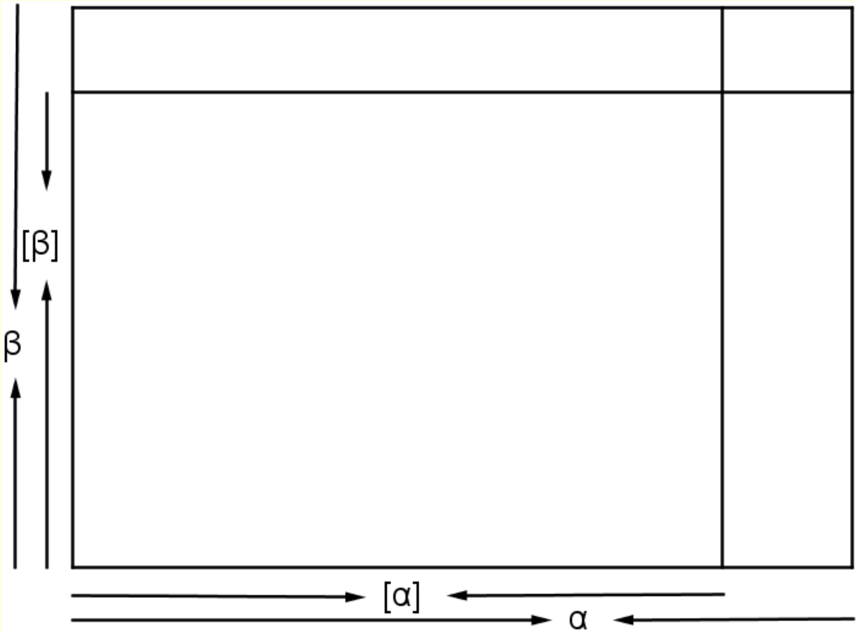
και τα υπόλοιπα είναι θέμα απλής άλγεβρας. Geogebra

Πρόβλημα 10

Αν ξεκινήσουμε λοιπόν να χρωματίζουμε το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το συνηθισμένο χρωματισμό της σκακιέρας με τετράγωνα διαστάσεων $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ξεκινώντας από την κάτω αριστερή γωνία, τότε λόγω του ότι το κάθε μικρότερο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τουλάχιστον μία πλευρά ακέραιο αριθμό, **η συνολική περιοχή που είναι χρωματισμένη με λευκό <u>είναι ίση</u> με εκείνη που είναι χρωματισμένη με μαύρο.**

Πρόβλημα 10

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δεν έχει καμία πλευρά που να είναι ακέραιος αριθμός, τότε μπορούμε να το χωρίσουμε **σε τέσσερα** μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα από τα οποία **τα τρία έχουν τουλάχιστον μία πλευρά ακέραιο αριθμό** (και επομένως (Χρήσιμο Λήμμα 1) η συνολική περιοχή που είναι χρωματισμένη με λευκό είναι ίση με εκείνη που είναι χρωματισμένη με μαύρο), ενώ **στο τέταρτο** στο οποίο καμία πλευρά δεν είναι ακέραιος αριθμός και μάλιστα **κάθε πλευρά είναι μικρότερη της μονάδας**, η συνολική περιοχή που είναι χρωματισμένη με λευκό **δεν είναι ίση** με εκείνη που είναι χρωματισμένη με μαύρο (Χρήσιμο Λήμμα 2). Το αρχικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις $\alpha \times \beta$ και το $[\alpha]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του α).

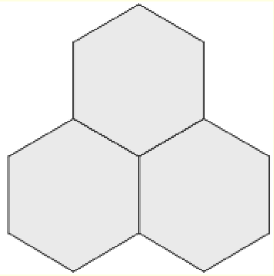


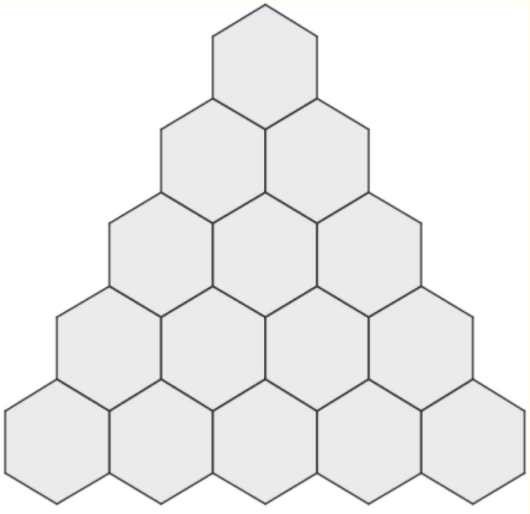
Πρόβλημα 10

Δηλαδή στο αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι δύο περιοχές που είναι χρωματισμένες με λευκό και μαύρο δεν είναι ισεμβαδικές κάτι που έρχεται σε αντίφαση με όσα δείξαμε παραπάνω. Άρα το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τουλάχιστον μία πλευρά που είναι ακέραιος αριθμός.

Υπάρχουν προβλήματα που δε λύνονται με χρωματισμό;

- Υπάρχουν. Αξίζει να σημειώσουμε ένα άρθρο του Conway στο οποία αποδεικνύεται με αρκετά δύσκολη συνδυαστική θεωρία ομάδων, ότι το τρίγωνο T_N μπορεί να καλυφθεί χρησιμοποιώντας τρίγωνα T_2 αν και μόνο αν $N \equiv 0,2,9,11 \ (mod\ 12)$.
- Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα τρίγωνα T_2 και T_5.
- Το ενδιαφέρον είναι ότι στην ίδια εργασία αποδεικνύεται, ότι το παραπάνω θεώρημα δε μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια χρωματισμού. Το τρίγωνο αποτελείται από N σειρές με εξάγωνα ώστε η βάση του να περιέχει N εξάγωνα, η αμέσως επόμενη σειρά N-1 εξάγωνα έως την $1^η$ σειρά που περιέχει 1 εξάγωνο. Τα σχήματα που φαίνονται παραπάνω είναι παραδείγματα τέτοιων τριγώνων.





Σας ευχαριστώ πολύ