

ΣΕΝΑΡΙΟ

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΣΥΓΚΕΛΑΚΗΣ

asygelakis@gmail.com

Επιμόρφωση Β Επιπέδου

Κλάδος: ΠΕ03

Περίοδος: Δεκέμβριος 2010 – Ιούνιος 2011

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

1. **Τίτλος σεναρίου:** Μελέτη της εκθετικής συνάρτησης μέσω προβλήματος

2. **Ταυτότητα του σεναρίου.**

- **Συγγραφέας:** Αλέξανδρος Συγκελάκης
- **Γνωστική περιοχή των Μαθηματικών:** Άλγεβρα Β' Λυκείου
- **Θέματα:** Γίνεται μία εισαγωγή στη μελέτη της εκθετικής συνάρτησης μέσω ενός μοντέλου εξέλιξης του παγκόσμιου πληθυσμού απ' το 1950 έως το έτος το 2000.
- **Τεχνολογικά εργαλεία:** Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Function Probe.

3. **Σκεπτικό της δραστηριότητας.**

- **Καινοτομίες που εισάγει:** Το παρόν σενάριο διαπραγματεύεται τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης και των βασικών ιδιοτήτων της. Είναι γεγονός ότι πολλά φαινόμενα εκφράζονται με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής. Ένα τέτοιο είναι και η μεταβολή του πληθυσμού στη Γη. Εμπλέκουμε λοιπόν τους μαθητές στην μελέτη αυτού του φαινομένου και μέσω αυτού ανακαλύπτουν τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης. Συγκεκριμένα, με χρήση του λογισμικού FP οι μαθητές κατασκευάζουν ζεύγη τιμών (έτος, πληθυσμός της γης σε δισεκατομμύρια) στο παράθυρο «πίνακας» τα οποία αποστέλλουν ως σημεία στο παράθυρο «γράφημα». Τίθεται λοιπόν ο προβληματισμός, εάν θα μπορούσε να εκτιμηθεί ο πληθυσμός της Γης σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Αυτό θα απαιτούσε τη σύνδεση των σημείων με έναν «σωστό» τρόπο, ώστε να δημιουργηθεί μια συνεχής ομαλή καμπύλη. Η αναζήτηση του «σωστού» τρόπου οδηγεί τελικά στον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης από τους ίδιους τους μαθητές, ο οποίος καλύπτει και την έννοια της δύναμης με άρρητο εκθέτη. Ακολουθεί η μελέτη των ιδιοτήτων της εκθετικής συνάρτησης, μέσω των κατάλληλων εργαλείων του λογισμικού. Οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασία μάθησης της εκθετικής συνάρτησης και των ιδιοτήτων της μέσα από τη μαθηματοποίηση των δεδομένων του αρχικού πίνακα. Κάνουν αναπαράσταση στο επίπεδο πολλών σημείων της

συγκεκριμένης συνάρτησης πριν βγάλουν γενικότερο συμπέρασμα για τη μορφή που έχει κάτι που με την παραδοσιακή διδασκαλία είναι δύσκολο να επιτευχθεί. Χρησιμοποιούν το σχήμα ως εργαλείο για να βγάλουν συμπεράσματα και για πρώτη φορά μαθαίνουν τη χρησιμότητα υπολογισμού δύναμης με ρητό εκθέτη. Έτσι οι μαθητές κατανοούν την έννοια του συνεχούς που έχει μία συνεχής συνάρτηση και αντιλαμβάνονται ότι στο x μπορούν να δοθούν τιμές από ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και όχι μόνο διακεκριμένες ακέραιες τιμές όπως συνηθίζεται να γίνεται για οικονομία διδακτικού χρόνου.

- **Προστιθέμενη αξία:** Η διδακτική αξιοποίηση τεχνολογικών εργαλείων δίνει νέες ευκαιρίες για δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων τα οποία βελτιώνουν τις παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις, αλλά κυρίως εισάγουν νέες μορφές και ευκαιρίες μάθησης. Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο διαφοροποιείται από το παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών και φιλοδοξεί να συμβάλει στη βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους. Η εισαγωγή της τεχνολογίας στην μαθησιακή διαδικασία μετασχηματίζει και τις διδακτικές πρακτικές και τα ίδια τα μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο. Στις παραδοσιακές διδασκαλίες τα μαθηματικά αντικείμενα αναπαρίστανται με στατικό τρόπο σε χαρτί, στον πίνακα, ή σε διαφάνειες. Ο μαθητής με την πρότασή μας αντιλαμβάνεται τα μαθηματικά αντικείμενα με δυναμικό τρόπο, δηλαδή ως γεννήτορες μαθηματικών φαινομένων, μέσα στα οποία μπορεί να αναζητήσει σχέσεις μεγθών, να διατυπώσει εικασίες και συμπεράσματα για το νόμο που διέπει το συγκεκριμένο φαινόμενο. Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να βοηθήσει τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι τα μαθηματικά αποτελούν αντικείμενο διερεύνησης (δυνατότητες διερευνητικής μάθησης) και να καταλήξουν στα δικά τους συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και επιστημονική τεκμηρίωση. Η εργασία των μαθητών σε ομάδες και η συνεργασία μεταξύ των μαθητών της κάθε ομάδας αναμένεται να συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση. Ο εκπαιδευτικός που θα επιλέξει να διδάξει βασικές έννοιες των Μαθηματικών στο πλαίσιο αυτού του σεναρίου απαιτείται από παραδοσιακός καθηγητής μετωπικών

διδασκαλιών να γίνει συνεργάτης των μαθητών του, καθοδηγητής της έρευνας και της επιστημονικής εγκυρότητας των συμπερασμάτων τους αλλά και ερευνητής ο ίδιος.

- **Γνωστικά – Διδακτικά προβλήματα:** Η κατασκευή γραφικών παραστάσεων είναι μία δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία, καθώς απαιτεί ακρίβεια τόσο στον υπολογισμό όσο και στο σχεδιασμό των αντίστοιχων τιμών μιας συνάρτησης. Η χρήση του λογισμικού διευκολύνει τη διαδικασία αυτή εφόσον δίνει χρόνο στους μαθητές για πειραματισμό, ανακάλυψη και διερεύνηση ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ γραφικών παραστάσεων. Επίσης ο τρόπος μαθηματοποίησης ενός προβλήματος είναι αρκετά δύσκολη διαδικασία για τους μαθητές αφού δεν έρχονται συχνά αντιμέτωποι με τέτοιου είδους προβλήματα. Ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης απαιτεί το πέρασμα από τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη σε δυνάμεις με άρρητο εκθέτη. Η προσέγγιση του βιβλίου γίνεται μόνο αλγεβρικά, δίνοντας τιμές που πλησιάζουν όλο και περισσότερο στη ζητούμενη δύναμη, ενώ μια γεωμετρική εικόνα της διαδικασίας προσέγγισης θα βοηθούσε την κατανόηση της έννοιας. Τέλος, το ότι η βάση δεν μπορεί να είναι 0 ή αρνητικός αριθμός δε γίνεται εύκολα κατανοητό από τους μαθητές.

4. Πλαίσιο εφαρμογής.

- Σε ποιους απευθύνεται: Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ Λυκείου
- Χρόνος υλοποίησης: Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2-3 διδακτικές ώρες.
- Χώρος υλοποίησης: Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών ώστε οι μαθητές να συνεργάζονται σε ομάδες των τριών κάνοντας χρήση υπολογιστών και φύλλων εργασία που έχει μοιράσει ο διδάσκοντας. Η επιλογή από το διδάσκοντα να το υλοποιήσει στην αίθουσα διδασκαλίας με τη χρήση βιντεοπροβολέα θα ακύρωνε μεγάλο μέρος της προστιθέμενης αξίας.
- Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
<p>Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τη θεωρία περί ευθείας, παράστασης σημείων στο επίπεδο, την έννοια του πίνακα τιμών, την έννοια της γραφικής παράστασης συνάρτησης, την έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα και την έννοια της δύναμης με ρητό εκθέτη.</p>	<p>Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις απαιτούμενες λειτουργικότητες και τις βασικές λειτουργίες του Function Probe και ιδιαίτερα την συμπλήρωση μιας στήλης μέσω μια άλλης, την αλλαγή κλίμακας σε ένα γράφημα. τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων, τη λειτουργία της οριζόντιας παραμόρφωσης μιας γραφικής παράστασης και της μεταφοράς. στοιχειώδη χειρισμό του προγράμματος.</p>

- Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:** Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους), βιβλίο (για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες), φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον καθηγητή και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων, οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού που θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό.
- Κοινωνική ενοργήστρωση της τάξης:**

ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ	Ο ΔΙΔΑΣΚΩΝ
<p>Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες των τριών ατόμων στις θέσεις εργασίας, καθοδηγούμενοι από το φύλλο εργασίας το οποίο θα πρέπει να αφήνει αρκετά μεγάλη ελευθερία να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σε αυτά συνεργατικά. Οι μαθητές χειρίζονται μόνοι τους τις συναρτησιακές σχέσεις των μεγεθών, αξιοποιώντας τα εργαλεία του λογισμικού. Διενεργούν πειράματα με αυτά και κατασκευάζουν έτσι τα δικά</p>	<p>Ο διδάσκων στη διάρκεια υλοποίησης του σεναρίου θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να διευκολύνει την επιχειρηματολογία, να προκαλεί συζητήσεις στην ολομέλεια της τάξης και να ενθαρρύνει τους μαθητές να συνεχίσουν τη διερεύνηση.</p>

τους νοήματα παρατηρώντας, ερμηνεύοντας, γενικεύοντας. Παύουν να είναι παθητικοί δέκτες μιας γνώσης και αποκτούν ερευνητική στάση απέναντι στα Μαθηματικά	
---	--

- Σκοπός της δραστηριότητας:

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ	ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΣ
<p>Απώτερος διδακτικός σκοπός είναι η ανακάλυψη, διερεύνηση, κατανόηση και εφαρμογή βασικών ιδιοτήτων της εκθετικής συνάρτησης μέσω κατασκευής και μελέτης του αντίστοιχου μαθηματικού μοντέλου που δίνεται στο φύλλο εργασίας των μαθητών.</p> <p>Απώτερος στόχος είναι να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να εμβαθύνουν στις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης και παράλληλα να διερευνήσουν το πως μπορούν να αξιοποιήσουν τις συγκεκριμένες ιδιότητες για να λύσουν δικά τους προβλήματα.</p>	<p>Να μάθουν να πειραματίζονται με τις περιεχόμενες μαθηματικές έννοιες (γραφική παράσταση ευθείας, παράσταση σημείων στο επίπεδο, συμμετρία ως προς άξονα κλπ) θέτοντας ερωτήματα και κάνοντας διάφορες εικασίες.</p> <p>Να τους δοθεί η ευκαιρία να οργανώσουν τα δεδομένα τους από τη διερεύνηση ώστε να διευκολυνθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων.</p> <p>Να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας για να συζητούν τις παρατηρήσεις τους, να διατυπώνουν συμπεράσματα και κανόνες, να κατασκευάζουν σχέσεις για να συνδέσουν τα διάφορα μεγέθη και να παρουσιάσουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες.</p>

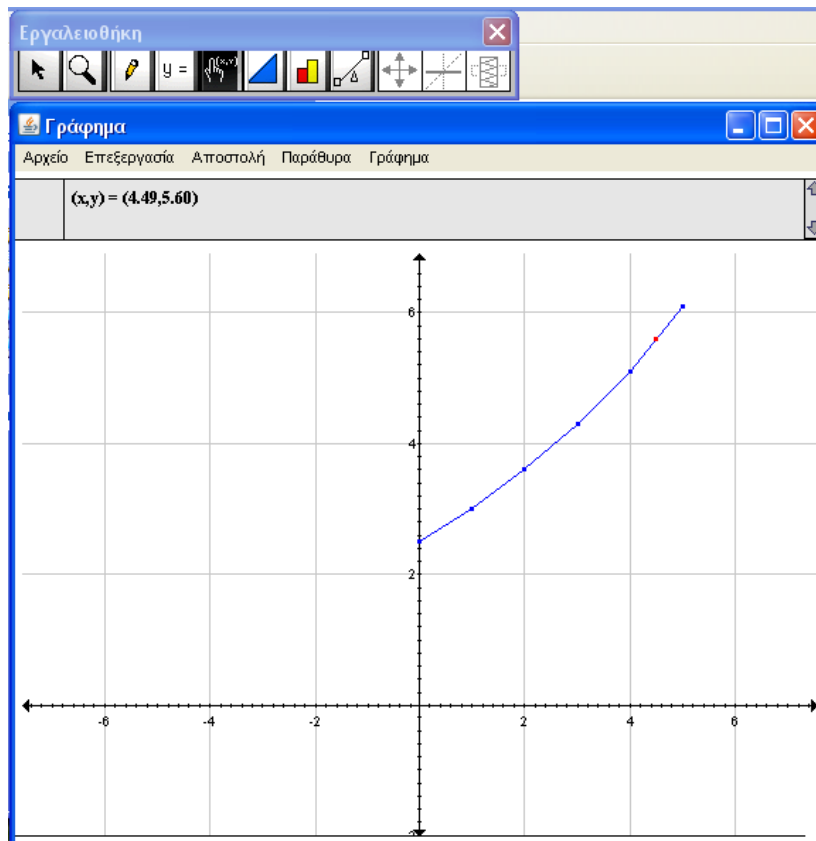
5. Ανάλυση της δραστηριότητας.

Ροή δραστηριοτήτων

1η φάση: Η πρώτη φάση αφορά στην ενημέρωση των μαθητών για τις γενικές γραμμές του σεναρίου και του προβληματισμού που πρόκειται να τους απασχολήσει κατά τη διάρκεια ανακάλυψης του μαθηματικού μοντέλου που περιγράφεται από τον πίνακα εξέλιξης τους παγκόσμιου πληθυσμού.

2η φάση: Ο στόχος εδώ είναι να εντοπίσουν οι μαθητές το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού στη Γη. Μέσω αυτού θα γίνει ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης. Δίνεται λοιπόν ένας πίνακας που καταγράφει τον πληθυσμό της Γης ανά δεκαετία, ξεκινώντας από το 1950 και φτάνοντας μέχρι το 2000. Αρχικά ζητείται από τους μαθητές να αποτυπώσουν τα ζεύγη τιμών (δεκαετία μετά το 1950, πληθυσμός σε δισεκατομμύρια) σε πίνακα στο Function Probe και να τα αποστείλουν ως σημεία στο γράφημα (εδώ θα προηγηθεί διαπραγμάτευση για το που θα τοποθετηθεί το σημείο 1950 πάνω στον άξονα x 's. Μία πρόταση που θα πρέπει να κάνει ο διδάσκων είναι να θεωρήσουν το 1950 ως 0, το 1960 ως 1, το 1970 ως 2 κτλ.). Αυτό που καταρχήν παρατηρούν, είναι η αυξητική τάση που έχει ο πληθυσμός. Ο στόχος είναι να εντοπίσουν το μαθηματικό μοντέλο (συνάρτηση) που ερμηνεύει αυτήν την εξέλιξη. Οι μαθητές δοκιμάζοντας διάφορους τρόπους (εύρεση συντελεστή διεύθυνσης ευθειών που διέρχονται από δύο σημεία, παράσταση σημείων στο επίπεδο κτλ) καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα σημεία αυτά δε βρίσκονται σε ευθεία οπότε η αναζήτηση του μοντέλου είναι αρκετά απαιτητική και γίνεται μεθοδευμένα με τα κατάλληλα ερωτήματα.

Αρχικά ζητείται μια εκτίμηση για το ποιος θα μπορούσε να είναι ο πληθυσμός το 1995, χρονολογία που δεν καταγράφεται στον πίνακα. Ο διδάσκων ενθαρρύνει τους μαθητές να δώσουν την εντολή «σύνδεση σημείων» στο λογισμικό, που θα σχηματίσει μια τεθλασμένη γραμμή. Από κει, με το εργαλείο επιλογής σημείου, μπορούν να βρουν την τεταγμένη του σημείου με τετμημένη ίση με 4.5 (στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια τέτοια απόπειρα που δίνει την απάντηση (4.49, 5.6)



Η διάταξη των σημείων πάνω στο επίπεδο δε δημιουργεί βεβαιότητα για την καμπύλη, πάνω στην οποία ανήκουν και στο σημείο αυτό ο διδάσκων προτείνει στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το λόγο των τιμών της ακολουθίας με τη βοήθεια του FP (σχήμα) και να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι οι λόγοι πλησιάζουν με μεγάλη προσέγγιση τον αριθμό 1,2. Η παραπάνω διαπίστωση θα οδηγήσει τους μαθητές να γράψουν τον τύπο $Q(t) = 2,5 \cdot (1,2)^t$, $t = 0,1,2,3,4,5$ και να απαντήσουν έτσι στην επόμενη ερώτηση που αφορά τον προσδιορισμό του μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει το παραπάνω πρόβλημα

t	Q	RQ
δεκαετία μετά το 1950	πληθυσμός δισε	
0	2.5	1.2
1	3	1.2
2	3.6	1.19
3	4.3	1.19
4	5.1	1.2
5	6.1	

Με αφορμή την επόμενη ερώτηση που αφορά σε στοιχεία του παγκόσμιου πληθυσμού κατά έτος, θα ακολουθήσει συζήτηση με τους μαθητές για τον τρόπο με τον οποίο θα κάνουμε ακόμα πιο λεπτομερή τον πίνακά μας ώστε να έχουμε πιο ακριβή στοιχεία. Για το λόγο αυτό οι μαθητές χρησιμοποιώντας τον μαθηματικό τύπο που έχουν ήδη βρει θα χρησιμοποιήσουν γέμισμα του πίνακα με τιμές από το 0 έως το 5 με βήμα 0.1 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα που θα έχουν θα είναι ο παγκόσμιος πληθυσμός ανά έτος από το 1950 έως το 2000.

Πλέον οι μαθητές μπορούν με μεγαλύτερη ακρίβεια να υπολογίσουν τον πληθυσμό της γης το 1995 βρίσκοντας στον παραπάνω πίνακα την τιμή που έχει το Q όταν $t=4,5$. Εδώ ο διδάσκων θα επισημάνει ότι θέτοντας $t=4,5$ υποθέτουν ότι η γραφική παράσταση άρα και το φαινόμενο εξελίσσεται ομαλά χωρίς εκπλήξεις. Αυτή η παραδοχή θα επιτρέψει αργότερα να τοποθετήσουν στη θέση του t οποιονδήποτε αριθμό και να απαντήσουν σε επόμενα ερωτήματα. Ο διδάσκων είναι σκόπιμο να θέσει ερωτήματα για την εύρεση του παγκόσμιου πληθυσμού στη μέση κάποιου έτους ή στο πρώτο τρίμηνο κάποιου άλλου ώστε να δημιουργηθεί στους μαθητές η εικόνα του συνεχούς και όχι της διακριτής και αποσπασματικής πληροφορίας που παρέχουν τα απομονωμένα σημεία του γραφήματος. Με αυτό τον τρόπο γίνεται και χρήση της γνωστής ιδιότητας υπολογισμού δύναμης με ρητό εκθέτη. Πλέον οι μαθητές θα κάνουν χρήση του μαθηματικού τύπου της συνάρτησης που έχουν βρει ώστε δίνοντας κατάλληλες τιμές στη μεταβλητή t να βρίσκουν τον αντίστοιχο παγκόσμιο πληθυσμό οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Επειδή όμως οι τετμημένες κυμαίνονται μεταξύ των τιμών 0 έως 5, γίνεται συζήτηση για το νόημα που έχουν οι αρνητικές τιμές και αναμένεται να αναφερθεί ότι έχουν το νόημα δεκαετιών που βρίσκονται πριν από το 1950 (ανάλογα γίνεται σχόλιο και για το νόημα των τετμημένων των μεγαλύτερων του 5 που έχουν το στοιχείο της πρόβλεψης).

Οι μαθητές ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο κατασκευής γραφικής παράστασης συνάρτησης για να κατασκευάσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης, να παρατηρήσουν τις ιδιότητές της και να συγκρίνουν με την «πρόχειρη» γραφική παράσταση που μέχρι τώρα είχαν κατασκευάσει. Στο σημείο αυτό ο διδάσκων και αμέσως πριν από την τελευταία ερώτηση, θα απομονώσει το μοντέλο $Q(t) = 2,5 \cdot (1,2)^t$, θα το μετασχηματίσει σε συνάρτηση $f(x) = 2,5 \cdot (1,2)^x$ και θα προτείνει την ονομασία εκθετική συνάρτηση. Στην συνέχεια θα επισημάνει στους μαθητές την ανάγκη να είναι θετική η βάση της δύναμης και θα αφήσει το περιθώριο προβληματισμού για διάφορα θέματα που αφορούν το γράφημα της παραπάνω εκθετικής (πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, σημεία τομής με τους άξονες, μονοτονία, ασύμπτωτες κτλ)

Τέλος, δίνεται στους μαθητές η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ώστε να γίνει διάκριση της περίπτωσης όπου η βάση είναι μεγαλύτερη του 1 από αυτή όπου είναι μικρότερη του 1 αλλά και να εμπλακούν μόνα τους σε διαδικασίες ανακάλυψης πριν τη δεύτερη διδακτική ώρα που θα ολοκληρωθούν οι βασικές έννοιες της εκθετικής.

3η φάση: Στόχος εδώ είναι η μελέτη και γραφική παράσταση της γενικότερης μορφής της εκθετικής $f(x) = a^x$ στις περιπτώσεις όπου $a > 1$ και $0 < a < 1$. Οι μαθητές στην προηγούμενη φάση έχουν ήδη διακρίνει τις δύο βασικές μορφές της εκθετικής συνάρτησης δηλαδή τη γνησίως αύξουσα και τη γνησίως φθίνουσα και εκμεταλλευόμενοι αυτό το γεγονός τους ζητάμε αρχικά να σχεδιάσουν στο FP τις γραφικές παραστάσεις δύο εκθετικών συναρτήσεων, της $f(x) = 2^x$ και της $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ και έπειτα να κάνουν τις παρατηρήσεις τους γύρω από ο,τιδήποτε αφορά τις ιδιότητες των συναρτήσεων ξεχωριστά (πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία, σημεία τομής με τους άξονες, ασύμπτωτος, «1-1» κλπ) αλλά και

συγκριτικά (άξονες συμμετρίας, κοινό σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ κλπ). Εδώ καλό είναι να ζητήσουμε από τους μαθητές να εκφράσουν τα συμπεράσματα αυτά σε αυστηρή μαθηματική ορολογία π.χ. «Αν $a > 1$ τότε η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα ενώ αν $0 < a < 1$ τότε είναι γνησίως φθίνουσα».

Στο επόμενο ερώτημα απομονώνουμε την περίπτωση όπου $a > 1$ και δίνουμε έτοιμες τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $g(x) = (1,2)^x$, $h(x) = 3^x$ και ζητάμε από τους μαθητές τρόπους με τους οποίους μπορούν να αντιστοιχίσουν τον τύπο της συνάρτησης με τη γραφική της παράσταση. Εδώ οι μαθητές μπορούν να επινοήσουν διάφορους τρόπους για να βρουν τη σωστή αντιστοίχιση. Για παράδειγμα για $x=1$, τη μεγαλύτερη τιμή παίρνει η συνάρτηση $h(x) = 3^x$ κτλ. Με παρόμοιο τρόπο θα δοθούν απαντήσεις και στο επόμενο ερώτημα όπου μελετούμε την περίπτωση $0 < a < 1$. Ο στόχος των ερωτήσεων αυτών είναι να συνδέσουν οι μαθητές τη μορφή της γραφικής παράστασης με την τιμή της βάσης a της εκθετικής συνάρτησης.

Σημαντικό επίσης είναι να μπορούν οι μαθητές να λύνουν εκθετικές εξισώσεις γι' αυτό δίνεται ιδιαίτερο βάρος στην ιδιότητα που έχει η εκθετική (και κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση) να έχει το πολύ ένα σημείο τομής με οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία. Στο σημείο αυτό μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να διατυπώσουν το γενικότερο κανόνα (που κρύβει την έννοια της «1-1» συνάρτησης) δηλαδή: «Αν $a^{x_1} = a^{x_2}$ τότε $x_1 = x_2$ » (ουσιαστικά πρόκειται για αντιθετοαντιστροφή του ορισμού).

Αφού σχολιαστεί και πάλι η ιδιότητα αυτή ζητάμε από τους μαθητές να λύσουν απλές εκθετικές εξισώσεις όπου η εύρεση της λύσης είναι προφανής.

Για να γίνει όμως καλύτερη κατανόηση της δύναμης του συνεχούς που έχει η εκθετική συνάρτηση και το ότι το σύνολο τιμών της είναι όλοι οι θετικοί πραγματικοί θέτουμε προς διαπραγμάτευση την εξίσωση $3^x = 11$ της οποίας η λύση δεν είναι προφανής αλλά λόγω της γραφικής παράστασης γίνεται (διαισθητικά τουλάχιστον) προφανές ότι υπάρχει. Αφού λοιπόν οι μαθητές ανακαλύψουν ότι η λύση της ζητούμενης εξίσωσης είναι ένας αριθμός μεταξύ του 2 και του 3, θα γεμίσουν με τιμές τον πίνακα του FP ώστε να βρουν ένα εκθέτη x για τον οποίο η τιμή της συνάρτησης $f(x) = 3^x$ προσεγγίζει τον αριθμό 11. Το αναμενόμενο είναι οι μαθητές να γεμίσουν τον πίνακα με τιμές από το 2 έως το 3 με βήμα 0.1 για να βρουν ότι ο ζητούμενος αριθμός βρίσκεται μεταξύ των 2,1 και 2,2 (σχήμα 1) οπότε αμέσως μετά

με ένα γέμισμα με τιμές από το 2,1 έως το 2,2 και βήμα 0.01 βρίσκουν ότι ο ζητούμενος αριθμός βρίσκεται μεταξύ των 2,18 και 2,19 κοκ (κοιτάζετε τα αντίστοιχα σχήματα). Στόχος είναι να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι μπορούμε να πάρουμε οσοδήποτε καλή προσέγγιση. Με τη συγκεκριμένη ερώτηση γίνεται και σύνδεση με το κεφάλαιο των λογαρίθμων που ακολουθεί.

Αρχείο Επεξεργασία	
x	$y=3^x$
2.1	10.05
2.2	11.21
2.3	12.51
2.4	13.97
2.5	15.59
2.6	17.4
2.7	19.42
2.8	21.67
2.9	24.19
3	27

Αρχείο Επεξεργασία	
x	$y=3^x$
2.1	10.0451
2.11	10.1561
2.12	10.2683
2.13	10.3817
2.14	10.4964
2.15	10.6123
2.16	10.7296
2.17	10.8481
2.18	10.9679
2.19	11.0891
2.2	11.2116

Τέλος, οι επόμενες δύο εξισώσεις έχουν ως στόχο να επεξεργαστούν οι μαθητές εκθετικές εξισώσεις στις οποίες ο εκθέτης είναι πλέον μία παράσταση του x. Συγχρόνως θα εφαρμόσουν ιδιότητες των δυνάμεων για να μετασχηματίσουν κατάλληλα τις δύο εξισώσεις.

Φύλλα Εργασίας

Φύλλο εργασίας για την πρώτη διδακτική ώρα

Η εξέλιξη του παγκόσμιου πληθυσμού από το 1950 μέχρι και το 2000 φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	Πληθυσμός (δισ)
1950	2,5
1960	3
1970	3,6
1980	4,3
1990	5,1
2000	6,1

1) Να περάσετε τα παραπάνω δεδομένα του πίνακα στο FP και να τα αποτυπώσετε ως σημεία στο γράφημα. Να εξετάσετε με οποιονδήποτε τρόπο αν τα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται σε μία ευθεία.

Απάντηση:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2) Να εκτιμήσετε τον πληθυσμό που είχε η γη το 1995 και να περιγράψετε σύντομα τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

Απάντηση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3) Αφού βρείτε το λόγο $\frac{\ll \text{πληθυσμός κάποιου έτους} \gg}{\ll \text{πληθυσμός του αμέσως προηγούμενου} \gg}$ και κάνετε

τις παρατηρήσεις σας, να προσπαθήσετε να βρείτε ένα ικανοποιητικό μοντέλο που να εκφράζει τον πληθυσμό ανά δεκαετία χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα.

Απάντηση:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

4) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω μοντέλο να γεμίσετε τον πίνακα με δεδομένα ανά έτος από το 1950 έως το 2000, να τα αποτυπώσετε ως σημεία στο γράφημα και να τα ενώσετε.

5) Να εκτιμήσετε και πάλι τον πληθυσμό της γης το 1995 χρησιμοποιώντας τον παραπάνω πίνακα. Συμφωνεί με την εκτίμηση που κάνατε στην ερώτηση 2; Που μπορεί να οφείλεται η πιθανή διαφορά;

Απάντηση:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

6) Να προβλέψετε τον πληθυσμό της γης το 2030. Πως μπορούμε να υπολογίσουμε ανά πάσα χρονική στιγμή τον πληθυσμό της γης;

Απάντηση:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

7) Τι νόημα θα μπορούσαν να έχουν, για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι αρνητικές τιμές;

Απάντηση:

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
8) Χρησιμοποιώντας το εργαλείο κατασκευής γραφικής παράστασης συνάρτησης να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης που περιγράφει το παραπάνω μοντέλο. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Εφαρμογή για επιπλέον μελέτη στο σπίτι

Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο εργαλείο κατασκευής γραφικών παραστάσεων του FP και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας για το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, για τη μονοτονία της για το πλήθος των σημείων τομής της με τους άξονες. Σε ποιο αριθμό πλησιάζουν οι αριθμοί $f(x)$ όταν ο αριθμός x γίνεται μικρότερος; .

Φύλλο εργασίας για τη δεύτερη διδακτική ώρα

1) Να κατασκευάσετε με τη βοήθεια του Function Probe τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Τι παρατηρείτε ;

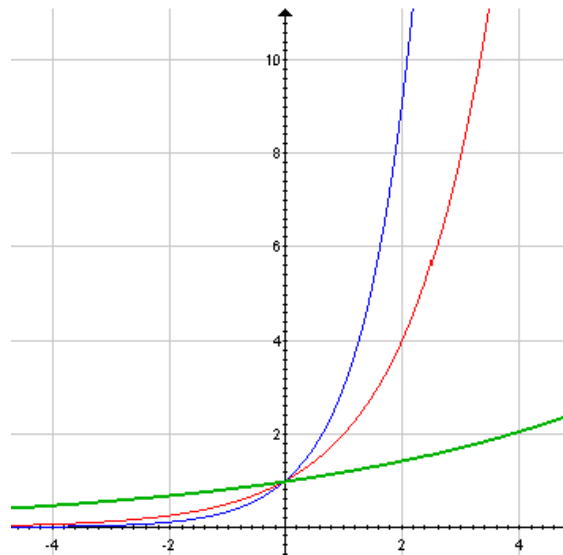
Απάντηση:

.....
.....
.....
.....
.....

.....

.....

2) Στην εικόνα υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $g(x) = (1,2)^x$, $h(x) = 3^x$. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση τον κατάλληλο τύπο της συνάρτησης δικαιολογώντας την απάντησή σας.



Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) Όμοια για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = (0,8)^x, g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Απάντηση:

.....

.....

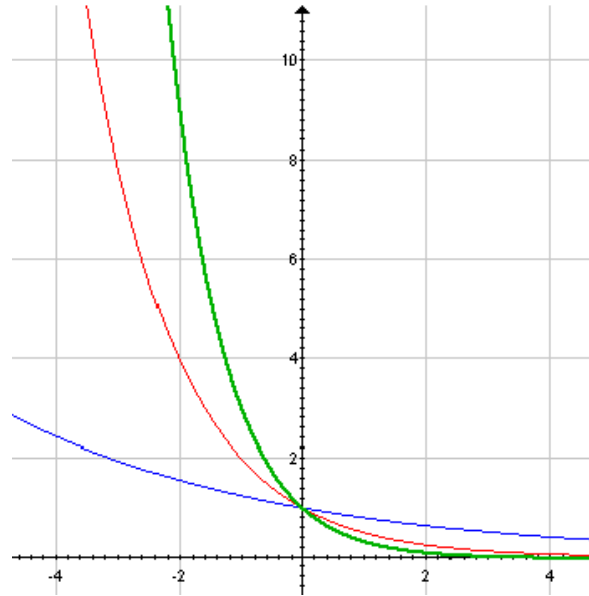
.....

.....

.....

.....

.....



4) Να φέρετε μία ευθεία παράλληλη προς τον $x'x$ σε μία εκθετική συνάρτηση της επιλογής σας. Σε πόσα σημεία μπορεί να κόψει τη γραφική παράσταση; Με βάση την παρατήρηση αυτή να υπολογίσετε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός x σε κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$2^x = 16, \quad 2^x = \frac{1}{16}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$$

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5) Να βρείτε μεταξύ ποιων ακεραίων αριθμών πρέπει να βρίσκεται ο αριθμός x ώστε $3^x = 11$. Με τη βοήθεια του FP να προσεγγίσετε αυτό τον αριθμό.

Απάντηση:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Εφαρμογές:

Να λυθούν οι εξισώσεις: $2^{x^2-1} = 8$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x} = \sqrt{2}$

6. Αξιολόγηση της δραστηριότητας που μπορεί να προκύπτει από την εφαρμογή ή τα ενδεχομένως αδύναμα σημεία της.

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου: Μετά την υλοποίηση του σεναρίου ο διδάσκων ελέγχει κατά πόσο επετεύχθησαν οι στόχοι του σεναρίου. Ένας τρόπος είναι και η κατασκευή κατάλληλων ερωτήσεων και ασκήσεων τις οποίες στο τέλος ο καθηγητής θα απευθύνει προς τους μαθητές για να ελέγξει τον βαθμό κατανόησης των εννοιών που είχαν εμπλακεί και θα παρέμβει διορθωτικά αν αυτό απαιτείται.

Ως προς τα εργαλεία: Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του λογισμικού Function Probe και επισημαίνει τις ενδεχόμενες ιδιαιτερότητες.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης: Ο διδάσκων καλό είναι να κρατάει σημειώσεις για τις δυσκολίες υλοποίησης των διαφόρων δραστηριοτήτων ώστε να είναι σε θέση στο μέλλον, ανάλογα με το διαθέσιμο χρόνο ή το γνωστικό επίπεδο των μαθητών να προβαίνει σε αλλαγές στη ροή, στις δραστηριότητες ή ακόμα και στα ζητούμενα.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα: Ο εκπαιδευτικός μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά την δομή του και σχεδιάζει αν το κρίνει απαραίτητο νέες δυνατότητες και επεκτάσεις.

7. Επέκταση δραστηριότητας

Το συγκεκριμένο σενάριο θα μπορούσε να αποτελέσει τη βάση πάνω στην οποία είναι δυνατόν να οργανωθεί η διδασκαλία της εκθετικής αλλά και της λογαριθμικής συνάρτησης αλλά και της μεθόδου επίλυσης εκθετικών και λογαριθμικών εξισώσεων.

8. Βιβλιογραφία

Η βιβλιογραφία είναι ενδεικτική και δεν έχει την έννοια της θεωρητικής τεκμηρίωσης αλλά είναι αναφορά στα χρησιμοποιούμενα εγχειρίδια.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2010) Άλγεβρα Β Γενικού Λυκείου Αθήνα: ΟΕΔΒ

ΙΤΥ.(2010) Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης. Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03, Β΄ έκδοση Αναθεωρημένη & Εμπλουτισμένη. Πάτρα: ΙΤΥ.

Ματσαγγούρας, Η. (1987). Ομαδοκεντρική Διδασκαλία και Μάθηση. Αθήνα: Γρηγόρης

Ηλεκτρονική εγκυκλοπαίδεια Wikipedia:

http://en.wikipedia.org/wiki/World_population (25-5-2011)

Κρατική υπηρεσία για την απογραφή του πληθυσμού στις ΗΠΑ
<http://www.census.gov/ipc/www/idb/worldpopgraph.php> (25-5-2011)

<http://www.census.gov/ipc/www/idb/worldpopinfo.php> (25-5-2011)