Λάθη και παρανοήσεις στα Μαθηματικά του Λυκείου

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης
Ηράκλειο Κρήτης
asygelakis@gmail.com

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να επισημάνει ορισμένα «σκοτεινά» σημεία στη διδασκαλία των μαθηματικών του Λυκείου και να τα διαλευκάνει μέσα από παραδείγματα που έχουν αντληθεί από βιβλία και από εξετάσεις ενδοσχολικές ή πανελλήνιες. Ο (αξιωματικός) τρόπος ορισμού των πραγματικών αριθμών στην Α Λυκείου και ιδιότητες που μπορούν να αποδειχθούν από τους μαθητές στη διάρκεια του μαθήματος, η «διάταξη» των μιγαδικών, η ανάγκη επαλήθευσης σε διάφορες περιπτώσεις ασκήσεων και θέματα με προβληματική εκφώνηση από τις πανελλήνιες εξετάσεις είναι μερικά από τα θέματα που υπάρχουν στις σελίδες που ακολουθούν.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Ερώτημα: Πως ορίζονται οι πραγματικοί αριθμοί στο Λύκειο; Ποιες είναι οι θεμελιώδεις προτάσεις (αξιώματα) που χρησιμοποιούνται και ποιες είναι οι προτάσεις που μπορούμε να αποδείξουμε με τη βοήθεια αυτών; Για παράδειγμα η ισότητα $(-1)\cdot(-1)=1$ αποδεικνύεται ή θεωρείται θεμελιώδης;
Για το σκοπό αυτό θα αναφέρουμε εν συντομία τις τέσσερις ομάδες στις οποίες κατατάσσονται τα αξιώματα για τον ορισμό των πραγματικών: 2 αξιώματα ισότητας, 7 αξιώματα σώματος, 3 αξιώματα διάταξης, 1 αξίωμα συνέχειας.
Αξίωμα Ισότητας: A_1) Δύο αριθμοί $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ καλούνται ίσοι, τότε και μόνο όταν αποτελούν διάφορες ονομασίες ενός και του αυτού αριθμού που οφείλονται στους διάφορους τρόπους κατασκευής αυτού. Για την ισότητα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

α) $\alpha=\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ (ανακλαστική)
β) $\alpha=\beta\Leftrightarrow\beta=\alpha$ (συμμετρική)
γ) $\alpha=\beta$ και $\beta=\gamma\Rightarrow\alpha=\gamma$ (μεταβατική)

Π.χ. Λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας έχουμε $3 = 3 = 3 = \cdots$ Ας σημειώσουμε ότι υπάρχουν μη πραγματικοί «αριθμοί» για τους οποίους δεν ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα. Ας πούμε για το ∞ δε μπορούμε να γράψουμε $\infty = \infty$.

<u>Αξιώματα Σώματος:</u> B_1) Υπάρχει ένα σύνολο αριθμών, το οποίο καλούμε σύνολο των πραγματικών αριθμών και το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$, το οποίο είναι μη κενό, μεταξύ των στοιχείων του οποίου έχουν οριστεί δύο πράξεις, η πρόσθεση $(+)$ και πολλαπλασιασμός $(\cdot)$ βάσει των οποίων σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών α,β αντιστοιχούν δύο νέοι αριθμοί $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ (ή αβ), που καλούνται άθροισμα και γινόμενο των α, β αντίστοιχα. Το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ είναι επίσης πραγματικοί αριθμοί που ορίζονται μονοσήμαντα από τους α, β.

B_2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ και $\alpha\beta = \beta\alpha$.

B_3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ και $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

<u>Αξιώματα Σώματος:</u> B_4) (Υπαρξη ουδέτερων στοιχείων) Υπάρχουν δύο διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί αριθμοί που ονομάζονται μηδέν (0) και ένα (1) οι οποίοι έχουν αντίστοιχα τις ιδιότητες: $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ και $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. (Το ότι είναι μοναδικοί μπορεί να προκύψει ως συνέπεια των αξιωμάτων).

B_5) Για κάθε πραγματικό αριθμό α, υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός β με την ιδιότητα $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται αντίθετος του α, αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικός και τον συμβολίζουμε με $-\alpha$.

B_6) Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός β, ώστε $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται αντίστροφος του α, αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικός και συμβολίζεται με α^{-1}.

B_7) Ο πολλαπλασιασμός επιμερίζεται ως προς την πρόσθεση δηλαδή $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Μερικές από τις προτάσεις που μπορούν να αποδειχθούν (και από τους μαθητές) λόγω των παραπάνω:

1) (Νόμος της διαγραφής - πρόσθεση) $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$.

(Συνέπεια της παραπάνω είναι η μοναδικότητα του 0 στο αξίωμα B_4 και η μοναδικότητα του αντίθετου στο αξίωμα B_5)

2) $-\alpha = -\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

3) Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β υπάρχει μοναδικός αριθμός x, ώστε $\beta + x = \alpha$.

Απόδειξη: Ύπαρξη: Από το B_5 υπάρχει αριθμός (ο –β) ώστε $(-\beta)+\beta=\beta+(-\beta)=0$. Άρα (αξ. B_3) $\beta+(\alpha+(-\beta))=(\alpha+(-\beta))+\beta=\alpha+((-\beta)+\beta)=\alpha$. Θέτουμε $x=\alpha+(-\beta)$ και τότε θα είναι $\beta+x=\beta+(\alpha+(-\beta))=\alpha$.
Μοναδικότητα: Έστω ότι υπάρχει z για τον οποίο $\beta+z=\alpha$. Τότε θα είναι $\beta+z=\beta+x$ άρα $z=x$.
Σχόλιο: Ο μοναδικός αυτός αριθμός x ονομάζεται διαφορά του β από το α και συμβολίζεται με $\alpha-\beta$.
4) $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$, $-(-\alpha)=\alpha$, $-(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(-\beta)$
5) $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$, $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$, $(\alpha\beta)^{-1}=\alpha^{-1}\cdot\beta^{-1}$
6) $\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$
Απόδειξη: Είναι $\alpha\cdot 0=\alpha\cdot(0+0)=\alpha\cdot 0+\alpha\cdot 0$ και από το νόμο της διαγραφής έχουμε $\alpha\cdot 0=0$
7) $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$
8) (Νόμος της διαγραφής – πολ/σμός) αν $\alpha\neq 0$ και $\alpha\beta=\alpha\gamma$ τότε $\beta=\gamma$.
9) Εάν $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ τότε υπάρχει ένας και μόνο αριθμός $\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε $\alpha\gamma=\beta$. Ο αριθμός αυτός γ ονομάζεται πηλίκο των β και α και συμβολίζεται με $\frac{\beta}{\alpha}$ ή και με $\beta:\alpha$.
Παρατήρηση: Εάν $\alpha\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$ τότε ο αντίστροφος x του α είναι το πηλίκο $\frac{1}{\alpha}$ και θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $\frac{1}{\alpha}$ για τον αντίστροφο του α.
10) $(-\alpha)\beta=\alpha(-\beta)=-(\alpha\beta)$ και $(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$
Απόδειξη
Είναι $\beta+(-\beta)=0$. Άρα $\alpha[\beta+(-\beta)]=\alpha\cdot 0=0$. Οπότε $\alpha\beta+\alpha(-\beta)=0$ δήλαδή ο $\alpha(-\beta)$ είναι αντίθετος του αβ δηλαδή $\alpha(-\beta)=-(\alpha\beta)$. Όμοια $(-\alpha)\beta=-(\alpha\beta)$. Για την απόδειξη του $(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$ θέτουμε στην $\alpha(-\beta)=-(\alpha\beta)$ όπου β το $-\beta$ και χρησιμοποιούμε την $-(-\alpha)=\alpha$.
Πόρισμα: $(-1)(-1)=1$
Αξιώματα Διάταξης: Η έννοια της θετικότητας εισάγεται αξιωματικά με τον ακόλουθο τρόπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών το οποίο ονομάζεται σύνολο των θετικών αριθμών για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:
Γ_1) Εάν α, β θετικοί αριθμοί τότε και οι αριθμοί $\alpha+\beta$ και αβ είναι επίσης θετικοί.
Γ_2) Εάν $\alpha\neq 0$ πραγματικός αριθμός τότε ένας μόνο από τους α, -α είναι θετικός.
Γ_3) Ο αριθμός 0 δεν είναι θετικός.

Σύμβαση: Συμφωνούμε να λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος του πραγματικού αριθμού β αν και μόνο αν ο αριθμός $\alpha - \beta$ είναι θετικός και γράφουμε $\alpha > \beta$. Λέμε επίσης ότι ο πραγματικός αριθμός α είναι μικρότερος του αριθμού β, αν και μόνο αν $\beta > \alpha$ και γράφουμε $\alpha < \beta$.

Μερικές από τις προτάσεις που μπορούν να αποδειχθούν λόγω των παραπάνω αξιωμάτων:
1) Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του 0 και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 0$ είναι θετικός.
Απόδειξη: Έστω α θετικός. Τότε αφού $\alpha - 0 = \alpha =$ θετικός άρα $\alpha > 0$.
Αντίστροφα αν $\alpha > 0$ τότε από τον ορισμό η διαφορά $\alpha - 0$ είναι θετικός και αφού $\alpha - 0 = \alpha$ άρα ο α είναι θετικός.
Σημείωση: Στο εξής το γεγονός $\alpha =$ θετικός θα συμβολίζεται με $\alpha > 0$.
2) (Θεώρημα της τριχοτομίας) Εάν α, β πραγματικοί τότε θα αληθεύει μία και μόνο μία από τις σχέσεις $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$.
Απόδειξη: Εφόσον οι α, β είναι πραγματικοί άρα και οι $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$ θα είναι επίσης πραγματικοί και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
i) $\alpha - \beta = 0$. Τότε $\alpha = \beta + 0 = \beta$
ii) $\alpha - \beta \neq 0$. Τότε βάσει του Γ_2 μόνο ένας εκ των $\alpha - \beta$, $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$ θα είναι θετικός. Εάν ο $\alpha - \beta$ είναι θετικός, τότε $\alpha > \beta$. Σε αυτή την περίπτωση δεν γίνεται να έχουμε και $\beta > \alpha$ διότι τότε ο $\beta - \alpha$ θα ήταν θετικός που αντιβαίνει στο αξίωμα Γ_2. Εάν τώρα ο $\beta - \alpha$ είναι θετικός έχουμε $\beta > \alpha$ και όμοια όπως πριν δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα $\alpha > \beta$.
3) (Μεταβατική Ιδιότητα) Εάν για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι σχέσεις $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ τότε θα ισχύει $\alpha < \gamma$.
Απόδειξη: Αφού $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ άρα $\beta - \alpha > 0$ και $\gamma - \beta > 0$. Άρα από το αξίωμα Γ_1 είναι $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) > 0$ δηλαδή $\gamma - \alpha > 0$ που δίνει την $\alpha < \gamma$.
Σχόλιο: Λόγω της παραπάνω προκύπτει και ότι αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε θα ισχύει $\alpha > \gamma$.
4) Ο αριθμός 1 είναι θετικός.
Απόδειξη: Όπως είδαμε στην ιδιότητα 2, μία από τις σχέσεις $1 > 0$, $1 = 0$, $1 < 0$ ισχύει. Όμως από τον ορισμό των 0,1 είναι $1 \neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $1 < 0$. Τότε ο αριθμός $0 - 1 = -1$ είναι θετικός. Όμως από το αξίωμα Γ_1 ο αριθμός $(-1)(-1)$ είναι επίσης θετικός δηλαδή ο 1 είναι θετικός, άτοπο. Συνεπώς $1 > 0$.

Αξίωμα συνέχειας: Εάν ένα σύνολο Ε πραγματικών αριθμών είναι άνω φραγμένο, τότε υπάρχει μεταξύ των άνω φραγμάτων ένα ελάχιστο. Δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός Μ τέτοιος ώστε
i) Το Μ είναι άνω φράγμα του Ε δηλαδή $x \leq M$, για κάθε $x \in E$.
ii)$M \leq M'$ για κάθε άνω φράγμα M' του Ε.

Συμπέρασμα: Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να κατανοήσουν ότι για την ανάπτυξη μίας μαθηματικής θεωρίας είναι αναγκαίες κάποιες αρχικές παραδοχές (αξιώματα). Τροχοπέδη για την κατανόηση του τρόπου ορισμού των πραγματικών αριθμών αποτελεί το γεγονός ότι πολλές ιδιότητες προήλθαν από μηχανική εφαρμογή στην επίλυση προβλημάτων στο Δημοτικό. Ιδανικό μάθημα για να γίνει μία εισαγωγή στην έννοια των αξιωμάτων είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Εξάλλου ο μαθητής έρχεται σε επαφή και με άλλα σύνολα τα οποία είναι εφοδιασμένα με πράξεις και έχουν δομή (σύνολο διανυσμάτων, σύνολο μιγαδικών αριθμών, σύνολο συναρτήσεων).
Θα πρέπει να εντάξουμε στη διδασκαλία μας τον επαγωγικό συλλογισμό στο Λύκειο (από τα θεμέλια που είναι τα αξιώματα και στηριζόμενοι σε αυτά, παράγουμε νέες προτάσεις που με τη βοήθειά τους θα δώσουν νέες προτάσεις). Αυτό είναι ευκαιρία να γίνει είτε στη Γεωμετρία ήδη από την Α Λυκείου, είτε στο κεφάλαιο των διανυσμάτων στη Β Λυκείου.
Το τελευταίο μπορούμε να το καταφέρουμε να το εντάξουμε στη διδασκαλία μας, αποφεύγοντας ασκήσεις τεχνικού χαρακτήρα οι οποίες στηρίζονται σε στείρες μεθοδολογίες και καλούπια που στερούν από το μαθητή τη δημιουργικότητα.

Διάταξη στους μιγαδικούς

Δεν είναι λίγες οι φορές που συναντάμε σε βιβλία θέματα του τύπου

Δίνεται ο αριθμός $z = \lambda^2 - 4 + (\lambda^2 + 3\lambda - 4)i$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $z > 0$.

Η συνηθισμένη προσέγγιση στο συγκεκριμένο θέμα είναι η ακόλουθη:

Για τον $z = \lambda^2 - 4 + (\lambda^2 + 3\lambda - 4)i$ είναι:

$$\mathrm{Re}(z) = \lambda^2 - 4 \quad \text{και}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \lambda^2 + 3\lambda - 4$$

Αφού ισχύει $z > 0$, ο z θα είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή $\mathrm{Im}(z) = 0$ και επιπλέον $\mathrm{Re}(z) > 0$. Έχουμε:

η οποία καταλήγει στη «λύση» λ=4.

Όπως είναι γνωστό δε μπορεί να οριστεί διάταξη στο σώμα των μιγαδικών αριθμών. Τι σημαίνει όμως «διάταξη» σε ένα σώμα;

Ορισμός: Ένα σώμα F θα λέμε ότι είναι διατεταγμένο αν υπάρχει υποσύνολο P του F ώστε να ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

α) Για οποιοδήποτε $x \in F$ ισχύει ακριβώς μία από τις ιδιότητες $x \in P$ ή $-x \in P$ ή $x = 0$.

β) Αν $x, y \in P$ τότε $x + y \in P$ και $xy \in P$.

γ) $0 \notin P$

Αν $x, y \in F$ θα γράφουμε $x > y$ αν και μόνο αν $x - y \in P$ οπότε αν $x \in P$ θα έχουμε $x - 0 > 0$ δηλαδή $x > 0$ ενώ αν $-x \in P$ θα γράφουμε $x < 0$. (Στην πρώτη περίπτωση θα λέμε τον x θετικό ενώ στη δεύτερη αρνητικό)

Είναι εύκολο από τον προηγούμενο ορισμό να βγάλουμε και τις υπόλοιπες γνωστές ιδιότητες τις διάταξης. Για παράδειγμα αν $x > 0$ και $y < 0$ τότε $xy < 0$ κτλ. Επίσης είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η μονάδα ενός διατεταγμένου σώματος είναι πάντοτε θετικός.

Απόδειξη: Από τον ορισμό της μονάδας είναι $1 \neq 0$. Άρα μία από τις σχέσεις $1 > 0$ ή $1 < 0$ μπορεί να ισχύει. Αν υποθέσουμε ότι $1 < 0$ τότε $0 - 1 > 0$ δηλαδή $-1 > 0$. Όμως τότε από την ιδιότητα β πρέπει $(-1)(-1) > 0$ δηλαδή $1 > 0$, άτοπο διότι υποθέσαμε ότι $1 < 0$. Άρα τελικά $1 > 0$.

Αν λοιπόν μπορούσαμε να ορίσουμε διάταξη στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τότε θα υπήρχε κάποιο σύνολο P (το σύνολο των «θετικών» στοιχείων του συνόλου των μιγαδικών) στο οποίο να ισχύουν οι προηγούμενες ιδιότητες. Από τις ιδιότητες έχουμε άμεσα ότι: 1>0 και $i > 0$ ή $i < 0$ ή $i = 0$.

Απόδειξη: Αρχικά είναι $i \neq 0$ διότι αν ήταν $i = 0$ θα είχαμε $i \cdot i = 0$ δηλαδή $-1 = 0$, δηλαδή $1 = 0$ άτοπο.

Αν ήταν $i > 0$ τότε $i \cdot i > 0$ δηλαδή $-1 > 0$, άτοπο.

Αν ήταν $i < 0$ τότε $-i > 0$ άρα $(-i) \cdot (-i)$>0 δηλαδή -1>0, άτοπο.
Άρα το σύνολο των μιγαδικών δεν είναι διατεταγμένο σώμα.

Φυσικά μπορούμε να ορίσουμε άλλη διάταξη στο σύνολο των μιγαδικών ώστε να το μετατρέψουμε σε ολικά διατεταγμένο σώμα. Ένα παράδειγμα είναι η «λεξικογραφική» διάταξη (ας συμβολίσουμε με « $\prec$ » την έννοια «μικρότερος από» με τη νέα διάταξη):

$$\alpha + \beta i \prec \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha < \gamma \text{ ή } (\alpha = \gamma \text{ και } \beta < \delta)$$

Όμως οποιαδήποτε διάταξη η οποία δε μετατρέπει το σώμα σε διατεταγμένο, δε «συνεργάζεται» καλά με τις πράξεις. Συνεπώς δεν έχει νόημα να ρωτάμε πότε δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι άνισοι αφού δεν μπορεί να οριστεί «καλή» διάταξη.

Είναι βέβαια λογικό να αναρωτηθεί κάποιος: Αφού στο $\mathbb{R}$ έχουμε ορίσει «καλή» διάταξη άρα θα είναι:

$$\alpha + \beta i \leq \gamma + \delta i \Leftrightarrow \beta = \delta = 0 \; και \; \alpha \leq \gamma$$

Κάτι τέτοιο είναι τελείως αυθαίρετο αφού είναι σα να λέμε: «Αφού δε μπορούμε να έχουμε μία καλή διάταξη στους μιγαδικούς, άρα όποτε μας λένε να τους συγκρίνουμε θα απαιτούμε πρώτα να ανήκουν κάπου όπου θα μπορούμε να τους συγκρίνουμε και κατόπιν θα τους συγκρίνουμε».
Όμως δεν είναι μόνο το $\mathbb{R}$ το μόνο υποσύνολο του C που έχουμε ικανοποιητική διάταξη. Υπάρχουν και άλλα σύνολα λ.χ. οι ευθείες, όπου μπορούμε να έχουμε διάταξη (τη συνηθισμένη όπως και στην ευθεία των πραγματικών, γραμμική διάταξη).
Τι θα λέγαμε σε ένα μαθητή που θα ρώταγε: «Και γιατί να ανήκουν στον άξονα x΄x και να μην ανήκουν στον άξονα y΄y; Δηλαδή να είναι:

$$\alpha + \beta i \leq \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0 \text{ και } \beta \leq \delta.$$

ή ακόμη:

$$\alpha + \beta i \leq \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \beta, \; \gamma = \delta \; και \; \alpha \leq \gamma.$$

Συμπέρασμα:
Διάταξη στους μιγαδικούς που να είναι συμβατή με τις πράξεις **δε** μπορεί να οριστεί.
Ασκήσεις όπως η αρχική, οι οποίες δεν επιδέχονται μονοσήμαντη απάντηση, μπερδεύουν αντί να απλοποιούν τα πράγματα και πρέπει να αποφεύγονται ως λανθασμένες.

Συναρτήσεις

Σε ένα διαγώνισμα της περσινής σχολικής χρονιάς (σχολικό έτος 2012-2013, Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ηρακλείου, τμήμα θετικής κατεύθυνσης, βλέπε [5] για ολόκληρο το διαγώνισμα) ζητήθηκε το παρακάτω θέμα από τους μαθητές:

Θέμα $\mathbf{B}^o$

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x)+e^{f(x)}=x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **(Μονάδες 10)**

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=2$. **(Μονάδες 13)**

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2012)x^3-f(2)x^2+x-1}{f(-2012)x^2-f(3)x+5}$. **(Μονάδες 12)**

Για την επίλυση του θέματος B2 οι περισσότεροι μαθητές έβαλαν όπου $f(x)$ το μηδέν και βρήκαν ότι $x=2$ *«η οποία είναι και η μοναδική λύση της εξίσωσης επειδή η f είναι μονότονη»*. Το πρόβλημα με αυτή τη «λύση» είναι ότι το μόνο που έχει αποδειχθεί είναι ότι *«αν η συνάρτηση μηδενίζεται σε κάποιο σημείο τότε πρέπει $x=2$»*. Δεν έχει αποδειχθεί όμως ότι πράγματι είναι λύση.

Ορθή λύση: Για $\mathrm{x}=2$ η αρχική γίνεται $\mathrm{f}(2)+\mathrm{e}^{\mathrm{f}(2)}=1$ δηλαδή το $\mathrm{f}(2)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\mathrm{x}+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=1$ και επειδή η συνάρτηση $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\mathrm{x}+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-1$ είναι γνησίως μονότονη με προφανή (άρα μοναδική) ρίζα το 2, άρα $\mathrm{f}(2)=0$.

Εν τη ρύμη του λόγου…

Συνηθίζουμε να γράφουμε και να λέμε ότι *«μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη επειδή προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγισίμων συναρτήσεων»*. Και μέχρι ένα σημείο αυτό ευσταθεί αν στο νου μας έχουμε τις 4 πράξεις.

Για τη μεν συνέχεια μιας συνάρτησης ισχύει (βλέπε [2] σελ. 190)

> Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο και οι συναρτήσεις:
>
> $f+g$, $c\cdot f$, όπου $c\in\mathbb{R}$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$
>
> με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

κάτι το οποίο δεν υφίσταται για την παράγωγο, καθώς ενδέχεται η f να είναι παραγωγίσιμη αλλά να μην είναι οι συναρτήσεις $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$.

Παράδειγμα: η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 και στο -1 όπως και η συνάρτηση $g(x)=|x^2-5x+6|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2 και στο 3. Ένα παράδειγμα «καλής» συνάρτησης είναι η $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ παρά το ότι η $y = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Επίλυση συναρτησιακής

Το πρόβλημα της επαλήθευσης εμφανίζεται πολλές φορές και σε προβλήματα επίλυσης συναρτησιακών εξισώσεων.
Παράδειγμα: Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2f(x+y) = f(x-y) + 2x^3,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Λύση: Η παραπάνω συναρτησιακή για $y = 0$ δίνει $f(x) = x^3$.
(Το μόνο που έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής είναι ότι ΑΝ υπάρχει τέτοια συνάρτηση ΤΟΤΕ αυτή οφείλει να είναι η $f(x) = x^3$).
Όμως η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν επαληθεύει την αρχική σχέση.

Μάλιστα για όσους θυμούνται τις εξετάσεις της Α Δέσμης του 1997, είχε τεθεί το εξής θέμα:
«*Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει*

$$g(x+y) = e^x g(y) + e^y g(x) + xy + \alpha,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι $g(0) = -\alpha$.
ii. Να αποδείξετε ότι $g'(x) = g(x) + g'(0)(e^x + x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.»
Δυστυχώς οι υποθέσεις της άσκησης είναι ασύμβατες οπότε τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει, ωστόσο, *«ουδόλως επηρεάζουν την επίλυση του θέματος»*.

Είμαι σίγουρος ότι πολλοί θα θυμούνται της απαράμιλλης κομψότητας άσκηση των εξετάσεων του 2012:

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\displaystyle \ell n x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot |f(x)|$

Στην άσκηση αυτή μεταξύ άλλων ζητείται να αποδειχθεί ότι $f(x) = e^{-x}(lnx - x)$. Και φυσικά αν κάποιος λύνοντας την άσκηση καταλήξει

στην παραπάνω συνάρτηση και μόνο έχει ολοκληρώσει την απόδειξη του ερωτήματος. Όμως ικανοποιεί η συγκεκριμένη συνάρτηση τις υποθέσεις της άσκησης και συγκεκριμένα την υπόθεση ότι $\int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$;
Το ερώτημα αυτό είναι εύλογο καθώς το αποτέλεσμα της άσκησης θα ήταν το ίδιο ακόμη αν η φορά στην παραπάνω ανισότητα ήταν ανεστραμμένη και χρησιμοποιούσαμε το θεώρημα Fermat για να φτάσουμε σε αυτό. Η απάντηση είναι θετική και πρόκειται για μία όμορφη (αλλά δύσκολη) άσκηση μέσα στη σχολική ύλη.

Συμπέρασμα: Για να μην υπάρχουν προβλήματα σε θέματα συναρτησιακών που τίθενται (ειδικά σε περίπλοκες σχέσεις), ο κατασκευαστής καλό είναι να δημιουργεί την άσκηση έχοντας στο μυαλό του μία τουλάχιστον συνάρτηση που την ικανοποιεί.
Σε προβλήματα που ζητείται η εύρεση του τύπου της f είναι υποχρεωτική η επαλήθευση σε περίπτωση που καταλήξουμε σε αυτήν από μη ισοδύναμη σχέση.
Εάν απλά ζητείται να αποδειχθεί ότι ο τύπος της f είναι ο συγκεκριμένος που αναφέρει το ερώτημα τότε απλά καταλήγοντας σε αυτή τη συνάρτηση, έχει ολοκληρωθεί η απάντηση (ακόμη και στην περίπτωση που δεν επαληθεύει αφού με ψευδή υπόθεση η συνεπαγωγή είναι αληθής).

Θεώρημα Fermat

Άσκηση: Αν ισχύει $a^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $a = e$.
Απόδειξη: Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = a^x - x - 1$ για την οποία $f(0) = 0$ άρα $f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο $x_0 = 0$ και ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat στο 0 άρα πρέπει $f'(0) = 0$ απ' όπου $a = e$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ας αλλάξουμε τώρα στην εκφώνηση τη φορά της ανισότητας ώστε να γίνει $a^x \leq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ζητείται και πάλι να αποδειχθεί ότι $a = e$. Η απόδειξη σε αυτή την περίπτωση είναι ακριβώς η ίδια με μόνη διαφορά ότι το $f(0)$ είναι ολικό μέγιστο για την f.
Ωστόσο παρά το ότι και στις δύο περιπτώσεις λαμβάνουμε $\alpha = e$, εντούτοις δε μπορεί να αληθεύουν ταυτόχρονα και οι δύο παραπάνω ανισότητες $\alpha^x \geq x+1$ και $a^x \leq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Και στις δύο όμως περιπτώσεις η άσκηση είναι σωστή και αυτό διότι η συνεπαγωγή είναι αληθής.

Ερώτηση: Ποια η ομοιότητα στη διαδικασία επίλυσης των παρακάτω ασκήσεων;

Άσκηση: Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $\sqrt{x} = \mathrm{x} - 2$.

Άσκηση: Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει $a^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Στη μεν πρώτη αν η πρώτη σχέση που γράψουμε (χωρίς τους αναγκαίους περιορισμούς) είναι $\left(\sqrt{x}\right)^2 = (x-2)^2$ τότε αυτή είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη και όμοια στη δεύτερη, αν ορίσουμε $f(x) = a^x - x - 1$ και εκμεταλλευτούμε ότι $f'(0) = 0$ τότε και πάλι η τελευταία είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη.

Άρα και στις δύο ασκήσεις είναι απαραίτητη η επαλήθευση.

Ας δούμε ένα θέμα από τις Επαναληπτικές Εξετάσεις του 2004:

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 13

β. Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

Μονάδες 12

Φυσικά στο πρώτο ερώτημα προκύπτει άμεσα με εφαρμογή του θεωρήματος Fermat ότι, αν υπάρχει, τιμή του m τότε πρέπει $m = 10$. Είναι όμως η τιμή $m = 10$ δεκτή; Χρειάζεται επαλήθευση η οποία είναι αρκετά απλή: Για $m = 10$ έχουμε $f(x) = (5^x - 2^x)(2^x - 1) \geq 0$.

<u>Αλληλοεξαρτώμενοι μιγαδικοί</u>

Αφορμή στάθηκε η εξής άσκηση κάποιου βιβλίου:

Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w = \dfrac{z-2i}{2iz+1}$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$.

Επειδή η εικόνα του z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο είναι $|z| = 1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $|w| = 1$

Είναι:

$$|w| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2i}{2iz+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2i|}{|2iz+1|} = 1 \Leftrightarrow |z-2i| = |2iz+1|$$

$$\Leftrightarrow |z-2i|^2 = |2iz+1|^2 \Leftrightarrow (z-2i)(\overline{z-2i}) = (2iz+1)(\overline{2iz+1})$$

$$\Leftrightarrow (z-2i)(\overline{z}+2i) = (2iz+1)(-2i\overline{z}+1)$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} - 4i^2 = -4i^2 z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 1$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + 4 = 4|z|^2 + 1 \Leftrightarrow 3|z|^2 = 3 \Leftrightarrow |z| = 1, \quad \text{που ισχύει.}$$

Αν M και N οι εικόνες των z και w στο μιγαδικό επίπεδο είναι: $|z-w| = (MN)$.

Η απόσταση των σημείων M και N γίνεται μέγιστη όταν τα M και N είναι αντιδιαμετρικά σημεία του μοναδιαίου κύκλου.

Οπότε $(MN) = 2$.

Άρα η μέγιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$ είναι 2.

Στην παραπάνω λύση λείπουν οι μιγαδικοί z, w που καθιστούν την $|z-w| \leq 2$ ισότητα. Λόγω αλληλεξάρτησης των μιγαδικών z, w η μέγιστη τιμή του μέτρου επιτυγχάνεται όταν οι εικόνες των z, w είναι αντιδιαμετρικά σημεία δηλαδή όταν $w = -z$. Βάζοντας την τελευταία στην αρχική σχέση παίρνουμε διαδοχικά:

$$\begin{cases} w = \dfrac{z-2i}{2iz+1} \\ w = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz^2 + z - i = 0 \\ w = -z \end{cases}$$

απ' όπου βγάζουμε μία εκ των (δύο) λύσεων να είναι η

$(z, w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ η οποία πράγματι ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

Ένα «κακό» παράδειγμα άσκησης: Ας υποθέσουμε, όπως και πριν, ότι ο z κινείται επί του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο μιγαδικός $w = \frac{3z+1}{z+3}$ κινείται επίσης στον ίδιο κύκλο. Δυστυχώς η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ δεν είναι το 2 αφού λόγω της αλληλεξάρτησής τους οι εικόνες των z, w δεν είναι ποτέ αντιδιαμετρικά σημεία.

<u>Με αφορμή ένα θέμα από τις πανελλήνιες εξετάσεις του 2012…</u>

Ας δούμε ένα θέμα των Πανελληνίων Εξετάσεων του 2012 στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής και ας επικεντρωθούμε στο ερώτημα Δ2.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x}$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ2. Έστω $M(x,f(x))$, $x>0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα y'y τέμνει τον ημιάξονα Οx στο σημείο $K(x,0)$ και η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα x'x τέμνει τον ημιάξονα Οy στο σημείο $Λ(0,f(x))$. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, <u>να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.</u>

«Όταν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΚΜΛ γίνεται τετράγωνο **(δεδομένο)** τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο **(ζητούμενο)**».

Ποια ήταν η απόδειξη της Κεντρικής Επιτροπής Εξετάσεων ΓΕΛ 2012;

Δ2. $(ΟΚΜΛ)=(ΟΚ)\cdot(ΟΛ)=|x|\,|f(x)| \underset{f(x)>0}{\overset{x>0}{=}} x\,f(x)=1+\ln^2 x,\ x>0$

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΚΜΛ είναι $E(x)=1+\ln^2 x,\ x>0$

• $E'(x)=(1+\ln^2 x)'=2\frac{\ln x}{x},\ x>0$

• $E'(x)=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x=1$, $E'(x)>0 \Leftrightarrow \dots \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>\ln 1 \overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow} x>1$

Δηλ.

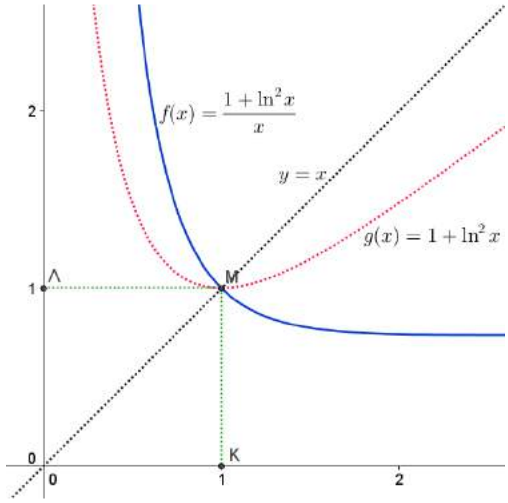
x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		−	0	+	
$E(x)$		↘		↗	

Ελάχιστο $E(1)=1$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο αν $x=1$. Αν $x=1$ τότε κ' $f(1)=1$ δηλ. $(ΟΚ)=(ΟΛ)=1$, άρα ΟΚΜΛ τετράγωνο.

Τι έχει αποδειχθεί; «Αν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει ελάχιστο εμβαδό τότε είναι τετράγωνο». Πιο συγκεκριμένα έχει αποδειχθεί ότι η συνάρτηση E(x) του εμβαδού γίνεται ελάχιστη αν και μόνο αν $x = 1$.Όμως ενδέχεται να υπάρχει και άλλη τιμή του x για την οποία το ΟΚΜΛ να είναι τετράγωνο αλλά το εμβαδό να μην είναι ελάχιστο. Άρα χρειάζεται να αποδειχθεί ότι το ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο αν και μόνο αν $x = 1$ (η μόνη τιμή που το εμβαδό ελαχιστοποιείται). Με άλλα λόγια ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = x$ είναι η $x = 1$. [1]

Μία ολοκληρωμένη προσέγγιση: Στο Δ1 αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Για $0 < x < 1$, έπεται ότι $f(x) > f(1) = 1 \Rightarrow f(x) > 1 > x$. Άρα $f(x) > x$ για $0 < x < 1$. Για $x > 1$, έπεται ότι $f(x) < f(1) = 1 \Rightarrow f(x) < 1 < x$. Άρα $f(x) < x$ για $x > 1$. Τελικά μόνο για $x = 1$ ισχύει $f(x) = x$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.



Σταθήκαμε «τυχεροί» στο παραπάνω πρόβλημα όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα αφού το ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο μόνο όταν η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ του εμβαδού γίνεται ελάχιστη.

<u>Ποια είναι η αρχή του προβλήματος;</u>

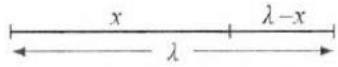
Στο βιβλίο Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής (βλέπε [1]) στη σελίδα 46 διαβάζουμε την άσκηση 6:

6. Ένα σύρμα μήκους λ κόβεται σε δύο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο αντιστοίχως. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι ελάχιστο, όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Στο βιβλίο των λύσεων του βιβλίου, το θέμα λύνεται ως εξής:

[1] Το προβληματικό σημείο της εκφώνησης του θέματος αυτού επισήμανε πρώτος ο Θανάσης Κοντογεώργης (με ψευδώνυμο «socrates»), φοιτητής ΗΜΜΗΥ του Α.Π.Θ. στο σχετικό θέμα στο mathematica.gr. Βλέπε το σχόλιο στη δημοσίευση του «chris» εδώ [6])

Αν x είναι το μήκος του κύκλου, τότε $\lambda - x$ είναι η περίμετρος του τετραγώνου.



Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με μήκος x,

τότε $2\pi\rho = x$, οπότε $\rho = \dfrac{x}{2\pi}$ και το εμβαδό του θα είναι $\pi\rho^2 = \pi\dfrac{x^2}{4\pi^2} = \dfrac{x^2}{4\pi}$.

Επειδή το τετράγωνο θα έχει περίμετρο $\lambda - x$, η πλευρά του θα είναι $\alpha = \dfrac{\lambda - x}{4}$ και το εμβαδόν του $\left(\dfrac{\lambda - x}{4}\right)^2$. Επομένως το άθροισμα των δύο εμβαδών είναι

$$E(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{\lambda - x}{4}\right)^2, \quad 0 \le x \le \lambda .$$

Έχουμε $\quad E'(x) = \dfrac{1}{4\pi}\cdot 2x + 2\left(\dfrac{\lambda - x}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right), \quad$ δηλαδή

$$E'(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot x - \frac{\lambda - x}{8} \quad \text{και} \quad E''(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} > 0 .$$

Έχουμε $\quad E'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}\cdot x - \dfrac{\lambda - x}{8} = 0 \Leftrightarrow 4x - \pi(\lambda - x) = 0$

$$\Leftrightarrow 4x - \lambda\pi + \pi x = 0 \Leftrightarrow (4+\pi)x = \lambda\pi \Leftrightarrow x = \frac{\lambda\pi}{4+\pi} .$$

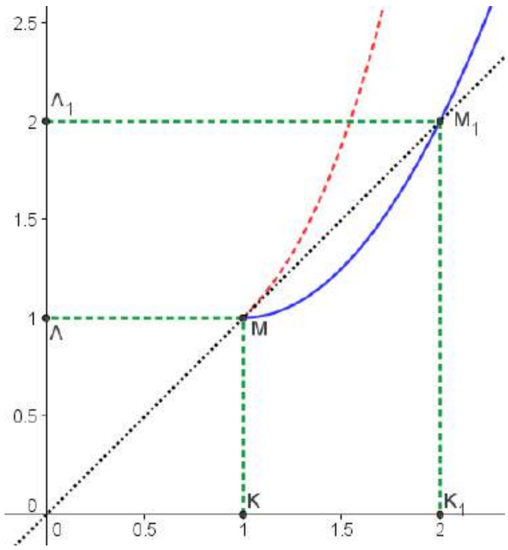
Επομένως όταν $x = \dfrac{\lambda\pi}{4+\pi}$ έχουμε το ελάχιστο εμβαδόν. Όταν όμως $x = \dfrac{\lambda\pi}{4+\pi}$, τότε η διάμετρος του κύκλου είναι $\delta = 2\rho = \dfrac{2}{2\pi}\cdot\dfrac{\lambda\pi}{4+\pi} = \dfrac{\lambda}{4+\pi}$ και η πλευρά του τετραγώνου είναι επίσης

$$\alpha = \frac{\lambda - x}{4} = \frac{1}{4}\left(\lambda - \frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4\lambda + \lambda\pi - \lambda\pi}{4+\pi} = \frac{\lambda}{4+\pi} .$$

που φυσικά είναι ελλιπής όπως θα φανεί και στ επόμενο (αντι) παράδειγμα.

Παράδειγμα «κακής» συνάρτησης αποτελεί η $f(x) = x^2 - 2x + 2,\ x \ge 1$ με αντίστοιχη συνάρτηση εμβαδού την $g(x) = xf(x)$ Όταν το εμβαδό του ορθογωνίου ΟΚΜΛ γίνει ελάχιστο (για $x = 1$) τότε το ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο. Όταν όμως το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο τότε το εμβαδό δε γίνεται απαραίτητα ελάχιστο.

Στο διπλανό σχήμα με μπλε και κόκκινο σημειώνονται οι γραφικές παραστάσεις των f και g αντίστοιχα.



Βιβλιογραφία

[1]. Αδαμόπουλος, Λ κ.α., Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ Γενικού Λυκείου, ΟΕΔΒ (2011)

[2]. Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. *Μαθηματικά Γ Τάξης Γενικού Λυκείου Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*, ΟΕΔΒ (2010)

[3]. Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α., *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α Τάξης Γενικού Λυκείου*, ΟΕΔΒ (2012)

[4]. Καζαντζής Θ.Ν., *Άλγεβρα, Τόμος 1*, Θεσσαλονίκη (1978)

[5]. http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=146913

[6]. http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=131584