3^o Καλοκαιρινό σχολείο Μαθηματικών
Λεπτοκαρυά Πιερίας 2009

Ασκήσεις
στη
Θεωρία Αριθμών

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης
ags@math.uoc.gr

Ιούλιος 2009

1 Μαθηματική Επαγωγή

1.1 Ασκήσεις Α΄ Ομάδας

Άσκηση 1.1 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό* $n \geq 1$ *ισχύει*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Άσκηση 1.2 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό* $n \geq 1$ *ισχύει*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Άσκηση 1.3 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό* $n \geq 1$ *ισχύει*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Άσκηση 1.4 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό* $n \geq 1$ *ισχύει*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Άσκηση 1.5 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό* $n \geq 1$ *ισχύει*

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Άσκηση 1.6 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό* $n \geq 1$ *ισχύει*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Άσκηση 1.7 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό* $n \geq 1$ *ισχύει*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Να γενικεύσετε το αποτέλεσμα και να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

Άσκηση 1.8 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό* $n \geq 1$ *ισχύει*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Άσκηση 1.9 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 1$ ισχύει*

$$\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = 2^n.$$

Άσκηση 1.10 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 4$ ισχύει $3^n > n^2$.*

Άσκηση 1.11 *(i) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $a > -1$ και οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 1$, ισχύει $(1+a)^n \geq 1 + na$.*

(ii) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό n ισχύει $2^n + 5^n + 7^n > 11n$.

Άσκηση 1.12 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 2$ ισχύει*

$$2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots n\cdot 2^{n-1} = (n-1)\cdot 2^n.$$

Άσκηση 1.13 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό n ισχύει*

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Άσκηση 1.14 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό n ισχύει*

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Άσκηση 1.15 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 1$ ο αριθμός*

$$A_n = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$$

είναι πολλαπλασιο του 7.

Άσκηση 1.16 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 1$ ο αριθμός*

$$A_n = 2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$$

είναι πολλαπλασιο του 9.

Άσκηση 1.17 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 1$ ο αριθμός*

$$A_n = 10^n + 18n - 1$$

είναι πολλαπλασιο του 27.

Άσκηση 1.18 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό n ο αριθμός*

$$A_n = 2^{4n} + 29^{2n+1}$$

είναι πολλαπλασιο του 15.

1.2 Ασκήσεις Β΄ Ομάδας

Άσκηση 1.19 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 3$ ισχύει $n^{n+1} > (n+1)^n$.*

Άσκηση 1.20 *Να αποδείξετε ότι εαν a, b, c είναι τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ABC με $\angle A = 90^\circ$, τότε $a^n > b^n + c^n$.*

Άσκηση 1.21 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 1$ και οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει*

$$(a+b)^n = C_n^n a^n b^0 + C_{n-1}^n a^{n-1} b^1 + C_{n-2}^n a^{n-2} b^2 + \cdots + C_2^n a^2 b^{n-2} + C_1^n a^1 b^{n-1} + C_0^n a^0 b^n,$$

όπου $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (Ορίζουμε 0!=1 και $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^\star$).

Άσκηση 1.22 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 2$ ισχύει*

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Άσκηση 1.23 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 2$ ισχύει*

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}.$$

Άσκηση 1.24 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 1$, ο αριθμός*

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}$$

είναι άρτιος ακέραιος και ο αριθμός

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\right)$$

είναι ακέραιος.

Άσκηση 1.25 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 1$ ισχύει*

$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} < \frac{1}{3n}.$$

Άσκηση 1.26 *Δείξτε οτι για κάθε φυσικό n υπάρχουν n διαφορετικοί ανα δύο διαιρέτες του $n!$ των οποίων το άθροισμα είναι $n!$.*

Άσκηση 1.27 *Να αποδείξετε ότι εαν k περιττός τότε $2^{n+2} | k^{2^n} - 1$ για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 1$.*

Άσκηση 1.28 *Ισχύει ότι για οποιοδήποτε φυσικό n ο αριθμός $n^2 + n + 41$ είναι πρώτος ;*

Άσκηση 1.29 *Να αποδείξετε επαγωγικά ότι εάν ένα σύνολο περιέχει $n \geq 1$ στοιχεία, τότε τα υποσύνολά του είναι σε πλήθος 2^n.*

2 Διαιρετότητα

2.1 Ασκήσεις Α΄ Ομάδας

Άσκηση 2.1 *Να δείξετε ότι το άθροισμα και η διαφορά δύο περιττών αριθμών ή δύο άρτιων είναι πάντα άρτιος.*

Άσκηση 2.2 *Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του* $17^{50} + 33^{100}$ *δια του 8.*

Άσκηση 2.3 *Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του* $25^{40} + 17^{30}$ *δια του 8.*

Άσκηση 2.4 *Αν ο ακέραιος* a *δεν είναι πολλαπλασιο του 5, να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του* a^4 *δια 5 είναι ίσο με 1. Κατόπιν να δείξετε ότι αν οι ακέραιοι* a, b *δεν είναι πολλαπλάσια του 5, τότε ο* $a^4 - b^4$ *είναι πολλαπλάσιο του 5.*

Άσκηση 2.5 *Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού*

(i) 2^{2009}

(ii) 3^{1821}

(iii) 71^{1453}

(iv) 777^{333}

Άσκηση 2.6 *Αν ο αριθμός* n *είναι φυσικός, να δείξετε ότι ο αριθμός* $A = n(n^2 + 2)$ *είναι πολλαπλάσιο του 3.*

Άσκηση 2.7 *Αν ο αριθμός* n *είναι φυσικός, να δείξετε ότι ο αριθμός* $A = n(n^2 + 5)$ *είναι πολλαπλάσιο του 6.*

Άσκηση 2.8 *Αν οι* a, b *είναι ακέραιοι και τέτοιοι ώστε ο αριθμός* $a^2 + b^2$ *να είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι καθένας εκ των* a, b *είναι πολλαπλάσιο του 3.*

Άσκηση 2.9 *Αν για τρεις ακεραίους* a, b, c *ο αριθμός* $a^2 + b^2 + c^2$ *είναι πολλαπλασιο του 5, να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους* a, b, c *είναι πολλαπλασιο του 5.*

Άσκηση 2.10 *Αν οι* a, b *είναι ακέραιοι και τέτοιοι ώστε ο αριθμός* $a^4 + b^4$ *να είναι πολλαπλάσιο του 7, να αποδείξετε ότι καθένας εκ των* a, b *είναι πολλαπλάσιο του 7.*

Άσκηση 2.11 *Αν κανένας από τους ακεραίους* a, b, c *δεν είναι πολλαπλάσιος του 3, να δείξετε ότι ο αριθμός* $a^2 + b^2 + c^2$ *είναι πολλαπλάσιο του 3.*

Άσκηση 2.12 *Για ποιους ακεραίους* k *ο αριθμός* $5k + 2$ *είναι πολλαπλάσιο του 4* ;

Άσκηση 2.13 *Βρείτε όλους τους 2-ψήφιους αριθμούς που έχουν ακριβώς 3 διαιρέτες.*

Άσκηση 2.14 *Βρείτε όλους τους φυσικούς που έχουν ακριβώς 4 διαιρέτες με την προϋπόθεση ότι το γινόμενο των διαιρετών τους είναι 225.*

Άσκηση 2.15 *Βρείτε όλους τους 4-ψήφιους που έχουν ακριβώς 5 διαιρέτες.*

Άσκηση 2.16 *Βρείτε όλα τα πολλαπλάσια του 10 που έχουν ακριβώς 6 διαιρέτες.*

Άσκηση 2.17 *Βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό που έχει ακριβώς 42 διαιρέτες.*

Άσκηση 2.18 *Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν 3-ψήφιοι φυσικοί που είναι πολλαπλάσια του 35 και οι οποίοι να έχουν ακριβώς 9 διαιρέτες.*

Άσκηση 2.19 *Βρείτε πρώτους αριθμούς x, y, z που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός*

$$n = 11^x \cdot 19^y \cdot 31^z,$$

να έχει ακριβώς 144 διαιρέτες.

Άσκηση 2.20 *Βρείτε το φυσικό αριθμό της μορφής $n = 3^a \cdot 5^b \cdot 7^c$, αν ο $27n$ έχει 36 διαιρέτες περισσότερους από το n και ο $49n$ έχει 12 διαιρέτες περισσότερους από το n.*

Άσκηση 2.21 *Να βρείτε για ποιους ακεραίους αριθμούς n ο αριθμός $n + 1$ διαιρεί τον $n^2 + 1$.*

Άσκηση 2.22 *Να βρείτε για ποιους ακεραίους αριθμούς $n \neq 3$ ο αριθμός $n - 3$ διαιρεί τον $n^3 - 3$.*

Άσκηση 2.23 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \geq 1$ ο αριθμός $A = 2^n \cdot 5^n + 1988$ είναι πολλαπλάσιο του 18.*

Άσκηση 2.24 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό n ο αριθμός $A = n^5 - n$ είναι πολλαπλασιο του 30.*

Άσκηση 2.25 *Εαν ο αριθμός $3a + 5b$ είναι πολλαπλάσιο του 17 για κάποιους ακεραίους a, b τότε να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $4a + b$ είναι πολλαπλάσιο του 17. Ισχύει το αντίστροφο* ;

Άσκηση 2.26 *Εαν ο αριθμός $5a + 7b$ είναι πολλαπλάσιο του 31 για κάποιους ακεραίους a, b τότε να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $11a + 3b$ είναι πολλαπλάσιο του 31.*

Άσκηση 2.27 *Αποδείξτε το κριτήριο διαιρετότητας του 3 και του 9.*

Άσκηση 2.28 *Βρείτε τον αριθμό x ώστε ο αριθμός $\overline{2x5}$ να είναι πολλαπλάσιο του 3 (αντίστοιχα του 9).*

Άσκηση 2.29 *Δείξτε ότι η διαφορά δύο διαδοχικών κύβων είναι πάντα περιττός.*

Άσκηση 2.30 *Βρείτε το τελευταίο ψηφίο του 7^{2009}.*

Άσκηση 2.31 *Να δείξετε ότι ο αριθμός $A = 2007^{2009} + 2008^{2010} + 2009^{2011}$ είναι πάντα πολλαπλάσιο του 15.*

Άσκηση 2.32 *Δείξτε ότι για καθε $n \in \mathbb{N}$ ο αριθμός $A = 5^{2n+3} \cdot 9^{n+2} + 3^{2n+1} \cdot 25^{n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 17.*

Άσκηση 2.33 *Δείξτε ότι ο αριθμός $A = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 13.*

Άσκηση 2.34 *Βρείτε τους θετικούς ακεραίους x, y που είναι τέτοιοι ώστε $45 \mid \overline{4xy}$.*

Άσκηση 2.35 *Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός n που να ικανοποιεί την ισότητα*

$$n(n-1) + (n-1)(n+1) + n(n+1) + 3n^5 = 3000000.$$

(Διαγωνισμός «Ο Θαλής» 1996)

Άσκηση 2.36 *Να δείξετε ότι $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.*

Άσκηση 2.37 *Αν ο n είναι περιττός φυσικός, τότε να δείξετε ότι $\frac{n(n+1)}{2} | n!$.*

Άσκηση 2.38 *Αν $\frac{n(n+1)}{2} \not| n!$, τότε ο $n+1$ είναι πρώτος.*

Άσκηση 2.39 *Να δείξετε ότι $1897 \mid 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$.*

Άσκηση 2.40 *Να δείξετε ότι $1001 \mid 1^{2009} + 2^{2009} + \cdots + 1000^{2009}$.*

Άσκηση 2.41 *Να δείξετε ότι ο αριθμός $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{1986}$ είναι πολλαπλάσιο του 156.*

Άσκηση 2.42 *Να δείξετε ότι για ν' 1 ο αριθμός $A = 15^{n+1} + 3^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 27.*

Άσκηση 2.43 *Να δείξετε ότι ο αριθμός $\underbrace{111\ldots1}_{91\ \text{άσσοι}}$ είναι σύνθετος.*

Άσκηση 2.44 *Να δείξετε ότι $5 \mid 1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99}$.*

Άσκηση 2.45 *Να δείξετε ότι αν* a, b *ακέραιοι με* $ab \neq 1$ *τότε ο αριθμός* $a^4 + 4b^4$ *είναι σύνθετος.*

Άσκηση 2.46 *Να δείξετε ότι* $100 \mid 11^{10} - 1$.

Άσκηση 2.47 (i) *Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός* n *τέτοιος ώστε ο* $n^3 + 3n$ *να είναι περιττός.*

(ii) *Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί* $x,\ y$ *τέτοιοι ώστε*

$$5x^3 - 4y^2 - 6xy + 15x + 6y - 5 = 0.$$

(Διαγωνισμός «Ο Θαλής» 1996)

Άσκηση 2.48 *Είναι γνωστό ότι ο αριθμός 27000001 έχει ακριβώς 4 γνήσιους διαιρέτες. Να βρείτε το άθροισμά τους.*

Άσκηση 2.49 *Να δείξετε ότι εαν* $a^3|b^2$ *τότε* $a|b$. *Εαν* $a^2|b^3$ *τότε μπορούμε να βγάλουμε σαν συμπέρασμα ότι* $a|b$;

Άσκηση 2.50 *Να αποδείξετε ότι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του* $n!$ *είναι πάντα άρτιο για* $n \geq 2$.

Άσκηση 2.51 *Να βρεθεί η μεγαλύτερη δύναμη του 15 που διαιρεί το 60!.*

Άσκηση 2.52 *Σε πόσα μηδενικά λήγει ο αριθμός 169!* ;

Άσκηση 2.53 *Σε πόσα μηδενικά λήγει ο αριθμός* $\dfrac{500!}{200!}$;

Άσκηση 2.54 (i) *Πόσοι ακέραιοι μεταξύ του 500 και του 2000 διαιρούνται και από το 3 αλλά και από το 7* ;

(ii) *Πόσοι ακέραιοι μεταξύ του 500 και του 2000 διαιρούνται από το 3 ή από το 7* ;

(iii) *Πόσοι ακέραιοι μεταξύ του 500 και του 2000 δεν διαιρούνται από το 3 ή από το 7* ;

Άσκηση 2.55 *Μια παλιά και δυσδιάκριτη απόδειξη γράφει ότι 36 κοτόπουλα αγοράστηκαν αντί του ποσού* $x73.9y$ **•**. *Λαμβάνοντας υπόψη ότι καθένα κοτόπουλο κοστίζει λιγότερο από 10* **•**, *να βρεθούν τα ψηφία που λείπουν.*

Άσκηση 2.56 *Ο 7-ψήφιος αριθμός* $72x20y2$ *όπου οι* x, y *είναι ψηφία, διαιρείται από το 72. Ποιές είναι οι δυνατές τιμές που μπορούν να πάρουν τα* x, y ;

Άσκηση 2.57 *Υποθέτουμε ότι ο 792 διαιρεί τον ακέραιο που έχει δεκαδική αναπαράσταση* $13xy45z$. *Να βρεθούν τα ψηφία* x, y, z.

2.2 Ασκήσεις Β΄ Ομάδας

Άσκηση 2.58 *Να αποδείξετε ότι αν* $n \geq 3$ *περιττός φυσικός, τότε ο αριθμός* $2^n + 1$ *είναι σύνθετος.*

Άσκηση 2.59 *Να δείξετε ότι ο αριθμός* $\underbrace{111\ldots}_{n\ \text{άσσοι}}2\underbrace{111\ldots}_{n\ \text{άσσοι}}$ *είναι σύνθετος για κάθε* $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

(Διαγωνισμός «Ο Ευκλείδης» 1997)

Άσκηση 2.60 *Σε τετραγωνισμένο χαρτί* 50×50 *τοποθετούμε τους αριθμούς* $1,\ 2,\ 3, \ldots 2500.$ *Να εξετάσετε εαν είναι δυνατό να τοποθετήσουμε τους αριθμούς αυτούς έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης να είναι:*

(i) *περιττός αριθμός.*

(ii) *αριθμός μη διαιρετός από το 5.*

(Διαγωνισμός «Ο Θαλής» 1997)

Άσκηση 2.61 *Να αποδείξετε ότι εαν ο φυσικός αριθμός* $n > 4$ *είναι σύνθετος, τότε*

$$n|(n-1)!$$

Άσκηση 2.62 *Να αποδείξετε ότι για κάθε* n *σύνθετο με* $n > 4$ *ισχύει* $2n|(n-1)!$ ***(JBMO 2006)***

Άσκηση 2.63 *Βρείτε τους θετικούς ακεραίους που ικανοποιούν την εξίσωση*

$$9(x^2 + y^2 + 1) + 2(3xy + 2) = 2005.$$

(JBMO 2005)

Άσκηση 2.64 *Για τους ακεραίους* $x,\ y$ *ισχύει ότι* $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000.$ *Να δείξετε ότι* $x + y = 10.$ ***(JBMO 2000)***

Άσκηση 2.65 *Καλούμε έναν αριθμό ημιπρώτο, εάν είναι σύνθετος αλλά όχι διαιρετός από τους 2,3 και 5. Οι τρεις μικρότεροι είναι οι 49,77,91. Υπάρχουν 168 πρώτοι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 1000. Πόσοι ημιπρώτοι είναι μικρότεροι του 1000* ;

Άσκηση 2.66 *Έστω* $n = 2^{31} \cdot 3^{19}$. *Πόσοι θετικοί διαιρέτες του* n^2 *είναι μικρότεροι του* n *αλλά δε διαιρούν το* n;.

Άσκηση 2.67 *Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι k για τους οποίους ο αριθμός $k^{\frac{1}{k-7}}$ είναι ακέραιος.*

Άσκηση 2.68 *Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 5 ζευγάρια από διαδοχικούς θετικούς ακεραίους τέτοιους ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών σε κάθε ζευγάρι διαιρεί τον αριθμό $2^{2006}+1$. **(BMO Shortlist 2006)***

Άσκηση 2.69 *Έστω $A=\{0,1,2,\ldots,n\}$ όπου $n\in\mathbb{N}$. Έστω S το σύνολο των τριάδων (a_1,a_2,a_3) όπου $a_1,a_2,a_3\in A$ για τις οποίες $|a_1-a_2|=|a_2-a_3|$. Να βρεθεί ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου S **(BMO Shortlist 2006)***

Άσκηση 2.70 *Να βρεθούν όλες οι τριάδες (m,n,p) θετικών ρητών αριθμών που είναι τέτοιες ώστε οι αριθμοί $m+\dfrac{1}{np}$, $n+\dfrac{1}{pm}$, $p+\dfrac{1}{mn}$ να είναι ακέραιοι. **(BMO 2006)***

Άσκηση 2.71 *Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2(2006m^2+2007mn+2008n^2)$ με m,n θετικούς ακεραίους δεν είναι ποτέ τέλειο τετράγωνο ακεραίου. **(Παραλλαγή θέματος διαγωνισμού «Ο Αρχιμήδης» 1994)**.*

Άσκηση 2.72 *Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε*

$$\sqrt{k+2006^n}+\sqrt{k}=\left(\sqrt{2007}+1\right)^n.$$

(Παραλλαγή θέματος 2ης Προκριματικής Φάσης 1997)

Άσκηση 2.73 *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$ δεν έχει ακέραιες λύσεις. **(1η Προκριματική Φάση 1997)***

Άσκηση 2.74 *Να βρείτε τους θετικούς ακεραίους (x,y) που είναι τέτοιοι ώστε $y|x^2+1$ και $x^2|y^3+1$.*

(Μεσογειακός 2002)

Άσκηση 2.75 *Μπορούμε να φτιάξουμε μία ακολουθία από n διαδοχικούς σύνθετους αριθμούς για οποιοδήποτε n ;*

Άσκηση 2.76 *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n που είναι τέτοιοι ώστε ο $n!$ να λήγει σε ακριβώς 40 μηδενικά.*

Άσκηση 2.77 *Αν N είναι ένας αριθμός του οποίου το δεκαδικό ανάπτυγμα έχει 3^n ίδια ψηφία, να αποδείξετε ότι $3^n|N$.*

Άσκηση 2.78 *Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ δεν είναι ακέραιος για οποιαδήποτε τιμή του ακεραίου $n>1$.*

3 Τέλειες δυνάμεις ακεραίων

3.1 Ασκήσεις Α' Ομάδας

Άσκηση 3.1 *Να δείξετε ότι για $n \geq 1$ ο αριθμός $\underbrace{111\ldots1}_{2n\ \text{άσσοι}} - \underbrace{222\ldots2}_{n\ 2-\text{άρια}}$ είναι τετράγωνο ακεραίου.*

Άσκηση 3.2 *Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, ο αριθμός $\underbrace{444\ldots4}_{n\ 4-\text{άρια}}\ \underbrace{888\ldots8}_{n-1\ 8-\text{άρια}}\ 9$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.*

Άσκηση 3.3 *Να βρεθούν όλα τα δυνατά υπόλοιπα που μπορεί να αφήσει ένα τέλειο τετράγωνο όταν διαιρεθεί με το 13.*

Άσκηση 3.4 *Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 7y^3 = 2003$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.*

Άσκηση 3.5 *Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + y^4 = 7$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.*

Άσκηση 3.6 *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 4x - 19^{96} - 96^{19} - 2000 = 0$ δεν έχει ακέραια λύση.*

Άσκηση 3.7 *Αν οι αριθμοί $a,\ a+d,\ a+2d$ είναι πρώτοι > 3, να δείξετε ότι $6 \mid d$.* ***(Διαγωνισμός «Ο Θαλής» 1997)***

Άσκηση 3.8 *Να αποδείξετε ότι στο σύνολο $\{11, 111, 1111, \ldots\}$ δεν υπάρχουν τέλεια τετράγωνα.*

Άσκηση 3.9 *Να βρείτε όλους τους πρώτους p που είναι τέτοιοι ώστε ο $17p+1$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.*

Άσκηση 3.10 *Να αποδείξετε ότι εαν $(a,b) = 1$ και το γινόμενο $ab = 1$ είναι μία τέλεια $k-$δύναμη, τότε να αποδείξετε ότι κάθε ένα από τα a, b είναι τέλεια $k-$δύναμη.*

Άσκηση 3.11 (i) *Έστω a, b, c θετικοί ακέραιοι. Να δείξετε ότι εάν οι ab, bc, ac είναι τέλειοι κύβοι τότε κάθε ένας από τους a, b, c είναι τέλειος κύβος.*

(ii) *Να εξετάσετε τί συμβαίνει εάν στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε τέλεια $k-$ δύναμη για k οποιοδήποτε ακέραιο αντί για τέλειο κύβο.*

Άσκηση 3.12 *Υποθέτουμε ότι οι $q_1, q_2, \ldots, q_n$ είναι περιττοί πρώτοι αριθμοί. Μπορεί ο αριθμός $N = (q_1 q_2 \cdots q_n)^2 + 1$ να είναι τέλειο τετράγωνο ;*

Άσκηση 3.13 *Να αποδείξετε ότι οποιοσδήποτε αριθμός της μορφής $4k+3$ δεν μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα δύο τετραγώνων.*

Άσκηση 3.14 *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 2y^2 = 10$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.*

Άσκηση 3.15 *Να δείξετε ότι εαν ο n έχει περιττό πλήθος διαιρετών τότε ο n είναι τέλειο τετράγωνο.*

Άσκηση 3.16 *Εαν ένας αριθμός n γραφτεί σαν άθροισμα κάποιων ακεραίων τότε το άθροισμα των κύβων αυτών των ακεραίων είναι ισότιμο με $n \pmod 6$.*

3.2 Ασκήσεις Β΄ Ομάδας

Άσκηση 3.17 *Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί n για τους οποίους η παράσταση*

$$A = n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 6n$$

είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού. ***(Διαγωνισμός «Ο Αρχιμήδης» 1997)***

Άσκηση 3.18 *Να αποδείξετε ότι η ισοτιμία $x^2 \equiv -1 \pmod p$ έχει λύση με p πρώτο αριθμό, αν και μόνο αν ο p είναι της μορφής $p = 4k+1$ για κάποιο ακέραιο αριθμό k.*

Άσκηση 3.19 *Εαν ο p είναι πρώτος τότε να δείξετε ότι ο αριθμός $A = 7p + 3^p - 4$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.* ***(JBMO 2007)***

Άσκηση 3.20 *Να δείξετε ότι ο αριθμός*

$$A = \underbrace{111\ldots1}_{1997\ \text{άσσοι}}\ \underbrace{222\ldots2}_{1997\ \text{δυάρια}}\ 5$$

είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου. ***(JBMO 1998)***

Άσκηση 3.21 *Να βρεθούν οι ακέραιοι $n \geq 1$ ώστε ο $n^2 + 3^n$ να είναι τέλειο τετράγωνο.* ***(JBMO 2000)***

Άσκηση 3.22 *'Εστω n θετικός ακέραιος. 'Ενας αριθμός A έχει $2n$ ψηφία καθένα από τα οποία είναι το 4 και ένας αριθμός B έχει n ψηφία καθένα από τα οποία είναι το 8. Να δείξετε ότι ο αριθμός $A + 2B + 4$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.* ***(JBMO 2003)***

Άσκηση 3.23 *Αν οι θετικοί ακέραιοι $x,\ y$ είναι τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $3x+4y$ και $4x+3y$ να είναι τέλεια τετράγωνα, να δείξετε ότι οι αριθμοί $x,\ y$ είναι και οι δύο πολλαπλάσια του 7.*

Άσκηση 3.24 *Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους a, b ο αριθμός $(36a + b)(a + 36b)$ δεν είναι δύναμη του 2.*

Άσκηση 3.25 *Να προσδιορίσετε τον πρώτο αριθμό p που είναι τέτοιος ώστε η παράσταση $A = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.*

Άσκηση 3.26 *Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο περιττού αριθμού είναι πάντοτε της μορφής $8n + 1$.*

Εφαρμογές

(i) *Αν οι a, b, c, m είναι ακέραιοι να αποδείξετε ότι ο αριθμός $a^2 + b^2 + c^2$ δεν είναι ποτέ της μορφής $8m + 7$.*

(ii) *Να δείξετε ότι η παράσταση $2^n + 3^n + 4^n$ δεν είναι ποτέ τέλειο τετράγωνο ακεραίου για $n > 1$ και περιττό.*

(iii) *Εάν οι a, b, c είναι ακέραιοι με $a^2 = b^2 + c^2$ τότε να δείξετε ότι $4|b$ ή $4|c$.*

(iv) *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^m - 1 = x^n$ δεν έχει ακέραιες λύσεις αν $m, n > 1$.*

(v) *Να αποδείξετε ότι για a, n φυσικούς, η παράσταση*

$$A = (a + 1)^n + (a + 2)^n + (a + 3)^n + (a + 4)^n$$

δεν είναι ποτέ τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

(vi) *Αν οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_{1998}$ είναι φυσικοί και ικανοποιούν την ισότητα*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{1997}^2 = a_{1998}^2,$$

να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από αυτούς είναι άρτιοι. ***(JBMO 1998)***

(vii) *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^2 - y^2 = 5^z$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.*

Άσκηση 3.27 *Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε ακεραίου είναι της μορφής $3m$ ή $3m + 1$.*

Εφαρμογές

(i) *Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.*

(ii) *Να δείξετε ότι η παράσταση $2^n + 3^n + 4^n$ δεν είναι ποτέ τέλειο τετράγωνο ακεραίου για n άρτιο.*

(iii) *Εάν a, b, c ακέραιοι με $a^2 = b^2 + c^2$, τότε $3|bc$.*

(iv) *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^2 - y^2 = 1998$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.*

(v) *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε ακέραιο n, ο αριθμός $A = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ είναι πολλαπλάσιο του 9.*

(vi) *Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των κύβων εννέα διαδοχικών ακεραίων διαιρείται από το 27.*

Άσκηση 3.28 *Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε ακεραίου είναι της μορφής $5m$ ή $5m \pm 1$.*
Εφαρμογές

(i) *Εάν a, b, c ακέραιοι με $a^2 = b^2 + c^2$ τότε $5|abc$.*

(ii) *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 5y^2 = 200$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.*

(iii) *Για $n > 3$ φυσικό, ο αριθμός $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!$ δεν είναι ποτέ τέλειο τετράγωνο ακεραίου.*

(iv) *Εάν οι a, b είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε $5|a^4 + b^4$, τότε να δείξετε ότι $5^4|a^4 + b^4$.*

(v) *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + xy + y^2 = 5z^2$ δεν έχει λύση στους ακεραίους.*

Άσκηση 3.29 *Να αποδείξετε ότι ο κύβος οποιουδήποτε ακεραίου είναι της μορφής $7m$ ή $7m \pm 1$.*
Εφαρμογές

(i) *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + y^3 = 2006$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.*

(ii) *Για $n > 1$ φυσικό, ο αριθμός $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!$ δεν είναι ποτέ τέλειος κύβος ακεραίου.*

(iii) *Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ δεν είναι ποτέ τέλειος κύβος ακεραίου.*

(iv) *Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = 1 + 2^n + 2^{2n}$ δεν είναι ποτέ τέλειος κύβος ακεραίου.*

(v) *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $19x^3 - 84y^2 = 1984$ δεν έχει λύσεις στους ακεραίους **(Ρωσία 1984)**.*

(vi) *Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = 2^n + 3^n + 5^n + 6^n$ δεν είναι ποτέ τέλειος κύβος ακεραίου.*

(vii) *Εάν οι αριθμοί* a, b, c *είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε* $7|a^3 + b^3 + c^3$ *τότε* $7|abc$.

Άσκηση 3.30 *Να αποδείξετε ότι ο κύβος οποιουδήποτε ακεραίου είναι της μορφής* $9m$ *ή* $9m \pm 1$.

Εφαρμογές

(i) *Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων τριών διαδοχικών ακεραίων δεν είναι ποτέ τέλειος κύβος ακεραίου.*

(ii) *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση* $x^3 + y^3 + z^3 = 2003$ *δεν έχει ακέραιες λύσεις.*

(iii) *Εάν οι αριθμοί* a, b, c *είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε* $9|a^3 + b^3 + c^3$ *τότε* $3|abc$.

(iv) *Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι ακέραιοι που δε γράφονται σαν άθροισμα τριών τέλειων κύβων ακεραίων αριθμών.*

(v) *Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 123456 καθώς και οποιοσδήποτε 6-ψήφιος προκύψει από την αντιμετάθεση των ψηφίων του, δεν είναι τέλειος κύβος ακεραίου.*

(vi) *Εάν οι αριθμοί* a, b, c *είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε* $3^2|a^3 + b^3 + c^3$ *να αποδείξετε ότι* $3^6|a^3 + b^3 + c^3$.

(vii) *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι* a, b, c *που είναι τέτοιοι ώστε* $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$. ***(JBMO 2001)***

Άσκηση 3.31 *Να αποδείξετε ότι το γινόμενο οποιουδήποτε τεσσάρων διαδοχικών ακεράιων δεν είναι ποτέ τέλειο τετράγωνο* [1]

Άσκηση 3.32 (i) *Να αποδείξετε ότι κανένας αριθμός της μορφής* $8k+7$ *όπου* k *ακέραιος, δεν μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα τριών τετραγώνων.*

(ii) *Να κάνετε χρήση του παραπάνω αποτελέσματος για να δείξετε ότι κανένας αριθμός της μορφής* $4^m(8k+7)$ *όπου* m *θετικός ακέραιος και* k *ακέραιος, δεν μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα τριών τετραγώνων.*

Άσκηση 3.33 *Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο* n *που είναι τέτοιος ώστε ο* $\frac{n}{3}$ *να είναι τέλειος κύβος, ο* $\frac{n}{5}$ *να είναι τέλεια πέμπτη δύναμη και ο* $\frac{n}{7}$ *να είναι τέλεια έβδομη δύναμη.*

[1] Στην πραγματικότητα αυτό είναι μερικό αποτέλεσμα ενός γενικότερου πολύ ισχυρού θεωρήματος που οφείλεται στους Erdos και Selfridge (1975) σύμφωνα με το οποίο το γινόμενο οποιονδήποτε διαδοχικών ακεραίων δεν είναι ποτέ τέλεια $k-$ δύναμη για οποιονδήποτε $k \geq 2$.

Άσκηση 3.34 *Να εξετάσετε εαν υπάρχουν θετικές ακέραιες τιμές του x ώστε οι παραστάσεις*

(i) $-5^x + 5^5 + 5^x$

(ii) $2^4 + 2^7 + 2^x$

να γίνονται τέλεια τετράγωνα. ***(Διαγωνισμός «Ο Αρχιμήδης» 1995)***

4 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης και Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

4.1 Ασκήσεις Α΄ Ομάδας

Άσκηση 4.1 *Για οποιουσδήποτε μη μηδενικούς ακεραίους a, b, να δείξετε ότι*

$$(a, b) = [a, b] \Leftrightarrow |a| = |b|.$$

Άσκηση 4.2 *Αν a, b, c φυσικοί και $(a, b, c)[a, b, c] = abc$ να δείξετε ότι*

$$(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1.$$

Άσκηση 4.3 *Για οποιουσδήποτε φυσικούς a, b, c να αποδειχθούν οι ισότητες:*

(i) $(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)]$,

(ii) $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$.

Άσκηση 4.4 *Για οποιουσδήποτε μη μηδενικούς ακεραίους a, b, c να δείξετε ότι*

$$([a, b], [b, c], [c, a]) = [(a, b), (b, c), (c, a)].$$

Άσκηση 4.5 *Αν οι φυσικοί m, n είναι πρώτοι μεταξύ τους, να δείξετε ότι*

$$\big(m^2 + n^2, m + n)\big) \in \{1, 2\}.$$

Άσκηση 4.6 *Δείξτε ότι $(15n^2 + 8n + 6, 30n^2 + 21n + 13) = 1$ για κάθε n φυσικό.*

Άσκηση 4.7 *Έστω a, b, c φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε η παράσταση*

$$K = \frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{c} + \frac{c+1}{a}$$

είναι φυσικός. Να αποδείξετε ότι $(a, b, c) \leq \sqrt[3]{ab + bc + ca}$.

Άσκηση 4.8 *Να αποδείξετε ότι το κλάσμα* $\dfrac{n^4+3n^2+1}{n^3+2n}$ *είναι ανάγωγο για κάθε* $n \in \mathbb{Z}^\star$.

Άσκηση 4.9 *Έστω* a, b, c, d *θετικοί ακέραιοι με* $b \neq d$. *Να δείξετε ότι εάν τα κλάσματα* $\dfrac{a}{b}$ *και* $\dfrac{c}{d}$ *είναι ανάγωγα τότε η παράσταση* $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ *δεν είναι ακέραιος.*

Άσκηση 4.10 *Να δείξετε ότι οι αριθμοί* $n!+1$ *και* $(n+1)!+1$ *είναι πρώτοι μεταξύ τους.*

Άσκηση 4.11 *Εαν* $(a,b)=1$ *τότε να δείξετε ότι* $(a+b, a-b)=1$ *ή* 2.

Άσκηση 4.12 *Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό* n, *τα παρακάτω ζεύγη αριθμών είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους:*

(i) $6n+5$ *και* $7n+6$,

(ii) $10n+3$ *και* $15n+4$,

(iii) $4 \cdot 7^n + 3$ *και* $5 \cdot 7^n + 4$.

Άσκηση 4.13 *Εαν* $(a,b)=1$ *και* $c|a+b$, *να δείξετε ότι* $(a,c)=(b,c)=1$.

Άσκηση 4.14 *Να δείξετε ότι εαν* $(b,c)=1$ *και* $m|b$ *τότε* $(m,c)=1$.

Άσκηση 4.15 *Με τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο βρείτε το (93,51) καθώς επίσης και ακεραίους* a, b *που είναι τέτοιοι ώστε* $93a+51b=(93,51)$.

Άσκηση 4.16 *Βρείτε τους φυσικούς* a, b *που είναι τέτοιοι ώστε* $a+b=1089$ *και* $(a,b)=121$.

Άσκηση 4.17 *Βρείτε τους φυσικούς* a, b *που είναι τέτοιοι ώστε* $ab=1600$ *και*

$$[a,b]=4\cdot(a,b).$$

Άσκηση 4.18 *Βρείτε τους φυσικούς* a, b *με* $a<b$ *που είναι τέτοιοι ώστε* $[a,b]-(a,b)=34$.

Άσκηση 4.19 *Εαν τοποθετήσουμε τους μαθητές ενός σχολείου σε σειρά 2,3,4,5 ή 6 μαθητών τότε περισσεύει κάθε φορά ένας μαθητής αλλά εαν τους τοποθετήσουμε σε σειρά των 7, τότε όλες οι σειρές είναι πλήρεις και δεν περισσεύει κανένας μαθητής. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μαθητών που μπορεί να έχει το σχολείο.*

Άσκηση 4.20 *Να δείξετε ότι εαν* b *θετικός ακέραιος τότε ακριβώς* (b,n) *από τους αριθμούς* $n, 2n, 3n, \ldots, bn$ *είναι πολλαπλάσια του* b.

Άσκηση 4.21 *Ποιός είναι ο ελάχιστος θετικός ρητός αριθμός που μπορεί να εκφραστεί στη μορφή* $\dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{36}$ *με* x, y *ακεραίους ;*

4.2 Ασκήσεις Β΄ Ομάδας

Άσκηση 4.22 *Για οποιουσδήποτε φυσικούς a, m, n με $a \geq 2$, να δείξετε ότι*

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1.$$

Άσκηση 4.23 *Ο αριθμός $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ ορίζεται για $n = 0, 1, 2, \ldots, 1999$. Να βρείτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{1999}$.* ***(JBMO 1999)***

Άσκηση 4.24 *Έστω m, n θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $[m, n] + (m, n) = m + n$. Να δείξετε ότι ένας από τους δύο αριθμούς είναι διαιρετός από τον άλλο.* ***(Ρωσία 1995)***

Άσκηση 4.25 *Να αποδείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ είναι ανάγωγο για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.* ***(IMO 1959)***

Άσκηση 4.26 *Το άθροισμα δύο θετικών ακεραίων είναι ίσο με 5432 και το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους είναι 223020. Να βρείτε τους δύο αριθμούς.*

Άσκηση 4.27 *Εαν $(a, b) = 10$ να βρείτε όλες τις πιθανές τιμές που παίρνει το (a^3, b^4).*

Άσκηση 4.28 *Ας υποθέσουμε ότι ο n είναι θετικός ακέραιος και έχει r διακεκριμένους πρώτους διαιρέτες. Να δείξετε ότι υπάρχουν 2^r διατεταγμένα ζεύγη (x, y) πρώτων μεταξύ τους ακεραίων τέτοια ώστε $xy = n$.*

5 Πρώτοι αριθμοί και τα βασικά θεωρήματά τους

5.1 Ασκήσεις Α΄ Ομάδας

Άσκηση 5.1 *Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί της μορφής $n^3 - 1$ με $n > 1$.*

Άσκηση 5.2 *Να βρεθούν οι τιμές του n για τις οποίες ο αριθμός $n^4 + 4$ είναι πρώτος.*

Άσκηση 5.3 *Να δείξετε ότι αν ο αριθμός p είναι περιττός πρώτος και*

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1},$$

τότε $p \mid a$.

Άσκηση 5.4 *Να δείξετε ότι αν ο αριθμός $a^n - 1$, $1 < a \in \mathbb{N}$ είναι πρώτος τότε $a = 2$ και ο n είναι επίσης πρώτος. (Πρώτοι αυτής της μορφής ονομάζονται πρώτοι του* ***Mersenne*** *)*

Άσκηση 5.5 *Ας υποθέσουμε ότι οι p και $p+2$ είναι πρώτοι αριθμοί με $p > 3$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους διαιρείται από το 12.*

Άσκηση 5.6 *Να κάνετε χρήση της ισότητας $640 = 5 \cdot 2^7$ για να αποδείξετε ότι ο αριθμός Fermat $F_5 = 2^{2^5} + 1$ διαιρείται από το 641.*

Άσκηση 5.7 *Βρείτε έναν ακέραιο n με $0 \leq n \leq 16$ που είναι τέτοιος ώστε*

$$3^{100} \equiv n \pmod{17}.$$

Άσκηση 5.8 *Ποιό είναι το (ελάχιστο θετικό) υπόλοιπο της διαίρεσης του 55^{142} με το 143* ;

Άσκηση 5.9 *Να δείξετε ότι για οποιοδήποτε μη αρνητικό ακέραιοι αριθμό n, ο αριθμός $A = 3^{6n} - 2^{6n}$ διαιρείται από το 35.*

Άσκηση 5.10 *Υποθέτουμε ότι ο αριθμός p είναι πρώτος και ότι ισχύει $a^p + b^p = c^p$. Να αποδείξετε ότι $p|a+b-c$.*

Άσκηση 5.11 *Εαν p, q διακεκριμένοι περιττοί πρώτοι αριθμοί έτσι ώστε $p-1|q-1$. Εαν $(a, pq) = 1$, να δείξετε ότι $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.*

Άσκηση 5.12 *Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Fermatνα δείξετε ότι κάθε πρώτος $p > 5$ διαιρεί άπειρους αριθμούς της μορφής $999\ldots9$ (δηλαδή αριθμούς που στη δεκαδική τους αναπαράσταση περιέχουν μόνο το ψηφίο 9).*

Άσκηση 5.13 (i) *Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι ακέραιοι n για τους οποίους ο αριθμός $n! - 1$ είναι σύνθετος.*

(ii) *Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι ακέραιοι n για τους οποίους ο αριθμός $n! + 1$ είναι σύνθετος.*

Άσκηση 5.14 *Να δείξετε ότι εάν ο p είναι πρώτος και $1 \leq n \leq p-1$, τότε*

$$(n-1)!(p-n)! \equiv (-1)^n \pmod{p}.$$

Άσκηση 5.15 *Ας υποθέσουμε ότι $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Εαν $N = 2^n - 1$, να δείξετε ότι $2^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$.*

Άσκηση 5.16 *Να αποδείξετε ότι το τελευταίο ψηφίο της τέταρτης δύναμης οποιουδήποτε ακεραίου αριθμού που δε διαιρείται από το 2 ή το 5 είναι το 1.*

Άσκηση 5.17 *Να βρείτε τα δύο τελευταία ψηφία της δεκαδικής αναπαράστασης του 9^{9^9}.*

Άσκηση 5.18 *Να δείξετε ότι εαν ο $p > 3$ είναι πρώτος τότε ο αριθμός $p^2 - 1$ είναι πάντα πολλαπλασιο του 24.*

Άσκηση 5.19 *Να δείξετε ότι εαν ο αριθμός $2^m + 1$ είναι πρώτος (m φυσικός) τότε το m είναι δύναμη του 2.*

Άσκηση 5.20 *Να δείξετε ότι όλοι οι αριθμοί του Fermat με τάξη μεγαλύτερη από 1 (δηλαδή οι αριθμοί $F_n = 2^{2^n} + 1$ με $n > 1$), έχουν τελευταίο ψηφίο το 7.*

Άσκηση 5.21 *Για ποιες τιμές του n ισχύει $\phi(n) = n - 2$;*

Άσκηση 5.22 *Να αποδείξετε ότι εάν d, n ακέραιοι τέτοιοι ώστε $d|n$, τότε $\phi(d)|\phi(n)$.*

Άσκηση 5.23 *Να αποδείξετε ότι $\phi(n) = \phi(2n)$ όταν το n είναι περιττός.*

Άσκηση 5.24 *Εαν n άρτιος τότε $\phi(n) = \dfrac{n}{2}$ αν και μόνο αν $n = 2^k$ για κάποιο ακέραιο $k \geq 1$.*

5.2 Ασκήσεις Β΄ Ομάδας

Άσκηση 5.25 *Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι $n \geq 1$ για τους οποίους ο $n^4 + 4^n$ είναι πρώτος.*

Άσκηση 5.26 (i) *Να βρεθεί ένας κλειστός τύπος για το γινόμενο*

$$P = \left(1 + 2^{2^0}\right)\left(1 + 2^{2^1}\right)\left(1 + 2^{2^2}\right)\cdots\left(1 + 2^{2^n}\right)$$

(ii) *Κάνοντας χρήση του παραπάνω τύπου, να δείξετε ότι για όλους τους θετικούς ακεραίους n ισχύει $2^{2^n} + 1 \mid 2^{2^{2^n}+1} - 2$.*

Άσκηση 5.27 *Αν με p_n συμβολίζουμε τον $n-$οστό πρώτο αριθμό, να δείξετε ότι*

(i) $p_n \leq p_1 \cdots p_{n-1} + 1$ *για* $n \geq 2$,

(ii) $p_{n-1} \geq n + 2$ *για* $n \geq 5$,

(iii) $p_{n-1} \geq 2n + 2$ *για* $n \geq 10$,

(iv) $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$ *για κάθε* n.

Άσκηση 5.28 *Καλούμε έναν αριθμό n τέλειο εάν το άθροισμα των θετικών ακεραίων διαιρετών του (μαζί με το 1 και το n) ισούται με $2n$. Να βρείτε όλους τους τέλειους αριθμούς n που είναι τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $n - 1$ και $n + 1$ να είναι πρώτοι αριθμοί.* ***(JBMO 2006)***

Άσκηση 5.29 *Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς p που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $p^2 + 11$ να έχει ακριβώς 6 διαφορετικούς διαιρέτες (συμπεριλαμβανομένου του 1 και του ίδιου του αριθμού).*

Άσκηση 5.30 *Έστω p πρώτος και $1 \leq k \leq p-1$ ακέραιος. Να δείξετε ότι*

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$

Άσκηση 5.31 *Εάν ο p είναι πρώτος τότε να εξετάσετε εαν ο αριθμός*

$$N = p^{1997} + 1997^p + 1998^{1997+p}$$

είναι πρώτος. ***(Διαγωνισμός «Ο Θαλής» 1997)***

Άσκηση 5.32 (i) *Να αποδείξετε ότι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος της μορφής $4k+3$ έχει ένα πρώτο διαιρέτη της ίδιας μορφής.*

(ii) *Κάνοντας χρήση του παραπάνω αποτελέσματος και μιμούμενος την απόδειξη του Ευκλείδη, να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $4k+3$.*

Άσκηση 5.33 *Εαν p πρώτος αριθμός της μορφής $4k+3$ (k φυσικός), να αποδείξετε ότι αν $x, y \in \mathbb{Z}$ και $p | x^2 + y^2$, τότε $p|x$ και $p|y$.* ***(3η Προκριματική Φάση 1996)***

Άσκηση 5.34 *Να αποδείξετε ότι εαν ο n είναι ακέραιος τότε και ο $A = \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{7n}{15}$ είναι ακέραιος.*

Άσκηση 5.35 (i) *Έστω a ακέραιος, u, v θετικοί ακέραιοι και $m > 1$ έτσι ώστε $a^u \equiv 1 \pmod{m}$ και $a^v \equiv 1 \pmod{m}$ τότε $a^d \equiv 1 \pmod{m}$, όπου $d = (u, v)$.*

(ii) *Να δείξετε ότι εαν $n | 2^n - 1$ τότε $n = 1$.*

Άσκηση 5.36 (i) *Να αποδείξετε το αντίστροφο του θεωρήματος Wilson: Εαν $m > 1$ και ο m δεν είναι πρώτος, τότε $(m-1)! \not\equiv -1 \pmod{m}$.*

(ii) *[Ισχυρότερο από το (i)] Εαν $m > 4$ σύνθετος τότε $(m-1)! \equiv 0 \pmod{m}$.*

(iii) *Να βρείτε όλους τους ακεραίους $n > 1$ που είναι τέτοιοι ώστε $n(n+1) | (n-1)!$.*

Άσκηση 5.37 *Να δείξετε ότι για οποιοδήποτε πρώτο p και οποιοδήποτε ακέραιο a, ο αριθμός $a^p + (p-1)!a$ διαιρείται από το p.*

Άσκηση 5.38 *Να δείξετε ότι εαν οι αριθμοί $n, n+2$ είναι πρώτοι τότε*

$$4\left[(n-1)! + 1\right] + n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}.$$

Άσκηση 5.39 *(Liouville 1856) Εαν ο p είναι κάποιος από τους πρώτους 2,3 ή 5 τότε ο αριθμός $(p-1)!+1$ είναι τέλεια δύναμη πρώτου. Να δείξετε ότι αυτό δεν ισχύει για $p>5$ δείχνοντας τα παρακάτω:*

(i) *Εαν $p>5$ τότε $(p-1)^2|(p-1)!$.*

(ii) *Εαν ο αριθμός $(p-1)!+1$ είναι τέλεια δύναμη πρώτου τότε είναι δύναμη του πρώτου p (και όχι κάποιου τυχαίου).*

(iii) *Εαν $(p-1)!+1=p^k$ για κάποιο ακέραιο k τότε $p-1|p^{k-1}+p^{k-2}+\cdots+p+1$. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο εαν $p-1|k$ και τότε η εξίσωση $(p-1)!+1=p^k$ είναι αδύνατη.*

Άσκηση 5.40 (i) *Να δείξετε ότι εαν ο αριθμός p είναι πρώτος και $p \not| a$ τότε ο αριθμός ba^{p-2} είναι λύση της ισοτιμίας $ax \equiv b \pmod{p}$. Να χρησιμοποιήσετε αυτή την τεχνική για να λύσετε την ισοτιμία $5x \equiv 4 \pmod{17}$.*

(ii) *Προσαρμόστε την ιδέα του ερωτήματος (i) ώστε να βρείτε τη λύση της ισοτιμίας $ax \equiv b \pmod{n}$ όταν $(a,n)=1$ και το n δεν είναι απαραίτητα πρώτος αριθμός. Χρησιμοποιήστε αυτό τον τρόπο για να λύσετε την ισοτιμία $5x \equiv 4 \pmod{42}$.*

Άσκηση 5.41 (i) *Ας υποθέσουμε ότι $(a,m)=1$ και $n|t\phi(m)+1$ για κάποιο ακέραιο t. Να αποδείξετε ότι η ισοτιμία $x^n \equiv a \pmod{m}$ έχει μοναδική λύση την a^k όπου $k=\dfrac{t\phi(m)+1}{n}$.*

(ii) *Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα να λύσετε τις ισοτιμίες*

- $x^{11} \equiv 3 \pmod{68}$,
- $x^{13} \equiv 7 \pmod{68}$,
- $x^{23} \equiv 5 \pmod{68}$.

Άσκηση 5.42 (i) *Υποθέτουμε ότι ο m είναι σύνθετος αλλά ότι $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$, όπου $a \not\equiv 1 \pmod{m}$. Να κάνετε χρήση του θεωρήματος Euler και της άσκησης $5.35(i)$ για να δείξετε ότι $a^d \equiv 1 \pmod{m}$ για κάποιο κατάλληλο διαιρέτη d του $n-1$.*

(ii) *Να κάνετε χρήση του προηγούμενου ερωτήματος για να δείξετε ότι εαν υπάρχει a τέτοιο ώστε $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ αλλά $a^{\frac{m-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{m}$, για οποιοδήποτε πρώτο διαιρέτη p του $m-1$, τότε ο m είναι πρώτος.*

Άσκηση 5.43 (i) *Υποθέστε ότι $a=2^k b$ όπου ο b είναι περιττός. Εαν $\phi(x)=a$, να δείξετε ότι ο x έχει το πολύ k διακεκριμένους περιττούς πρώτους παράγοντες.*

(ii) *Να κάνετε χρήση του προηγούμενου ερωτήματος για να χαρακτηρίσετε εκείνους τους ακεραίους n για τους οποίους το $\phi(n)$ δεν είναι διαιρετό από το 4.*

Άσκηση 5.44 (i) *Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος n για τον οποίο $\phi(n) = 14$.*

(ii) *Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος n τέτοιος ώστε $\phi(n) = 2 \cdot 7^k$, όπου $k \geq 1$ ακέραιος (χρησιμοποιήστε την άσκηση $5.43(ii)$ και μετά αποδείξτε ότι ο αριθμός $2 \cdot 7^k + 1$ δεν είναι ποτέ πρώτος).*

(iii) *Να βρείτε κι άλλες περιπτώσεις στις οποίες το διπλάσιο ενός περιττού αριθμού δεν μπορεί να είναι ίσο με το $\phi(n)$ για κάποιο φυσικό αριθμό n.*

6 Ισοτιμίες

6.1 Ασκήσεις Α΄ Ομάδας

Άσκηση 6.1 *Να βρεθεί το υπόλοιπο του 6^{1987} με το 37.*

Άσκηση 6.2 *Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι ώστε $x^2 - 5y^2 = 2$.*

Άσκηση 6.3 *Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 7^{7^7}.*

Άσκηση 6.4 *Να δείξετε ότι κάθε χρόνος (κανονικός ή δίσεκτος) έχει πάντα τουλάχιστον μία Τρίτη και 13.*

Άσκηση 6.5 *Να βρεθούν άπειροι ακέραιοι αριθμοί n τέτοιοι ώστε $7 \mid 2^n + 27$.*

Άσκηση 6.6 *Εάν k θετικός ακέραιος τότε να δείξετε ότι $2^k - 5 \not\equiv 1 \pmod 7$.*

Άσκηση 6.7 *Να βρεθεί (το ελάχιστο θετικό) υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού*

$$1! + 2! + \cdots + 100!$$

με το 45.

Άσκηση 6.8 *Να αποδείξετε ότι για εαν ο $p \geq 5$ είναι πρώτος τότε ο αριθμός $p^2 + 2$ είναι σύνθετος.*

Άσκηση 6.9 *Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{2^n} + 5$ είναι σύνθετος για οποιοαδήποτε τιμή του θετικού ακεραίου n.*

Άσκηση 6.10 *Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $n^3 + 11n + 1$ δε διαιρείται από κανένα από τους αριθμούς 2,3,5,7 για οποιοδήποτε ακέραιο n.*

6.2 Ασκήσεις Β΄ Ομάδας

Άσκηση 6.11 *Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $n(n-1)$ και $(n+1)^2$ έχουν διαφορετικό άθροισμα ψηφίων.* ***(Διαγωνισμός «Ο Ευκλείδης» 1997)***

Άσκηση 6.12 *Εάν $a \equiv b \pmod{n}$, να δείξετε ότι $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$. Ισχύει το αντίστροφο ;*

Άσκηση 6.13 *Για κάθε θετικό ακέραιο n ορίζουμε $a_n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες τιμές του n για τις οποίες ο a_n είναι περιττός και σύνθετος αριθμός.*

Άσκηση 6.14 *Υπάρχει ζεύγος φυσικών x και y για τους οποίους ισχύει:*

(i) $x^3 + y^4 = 2^{2003}$;

(ii) $x^3 + y^4 = 2^{2005}$;

Άσκηση 6.15 *Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ρητοί αριθμοί x, y, z τέτοιοι ώστε*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0.$$

Άσκηση 6.16 *Για ποιες τιμές του λ το πολυώνυμο $x^3 + 1995x^2 - 1994x + \lambda$ έχει και τις τρεις ρίζες του ακέραιες ;* ***(Διαγωνισμός «Ο Αρχιμήδης» 1994)***

Άσκηση 6.17 *Να αποδείξετε ότι ο αριθμός n^2+n+9 δε διαιρείται με το 25 για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{Z}$.*

Άσκηση 6.18 *Να αποδείξετε ότι οποιοσδήποτε ακέραιος x ικανοποιεί τουλάχιστον μία από τις ισοτιμίες $x \equiv 0 \pmod{2}$, $x \equiv 0 \pmod{3}$, $x \equiv 1 \pmod{4}$, $x \equiv 3 \pmod{8}$, $x \equiv 7 \pmod{12}$, $x \equiv 23 \pmod{24}$.*

Άσκηση 6.19 *Είναι το σύνολο $\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, m^2\}$ πλήρες σύστημα υπολοίπων $modm$;*

Άσκηση 6.20 *Έστω p πρώτος. Να αποδείξετε ότι $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}$.*

Άσκηση 6.21 *Έστω n θετικός ακέραιος με $n \neq 1, 2, 3, 4, 6$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακέραιοι a και b με $1 < a < n-1$ και $1 < b < n-1$ τέτοιοι ώστε $ab \equiv -1 \pmod{n}$.*

7 Διοφαντικές Εξισώσεις

7.1 Ασκήσεις Α΄ Ομάδας

Άσκηση 7.1 *Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση* $3x + 5y = 2$.

Άσκηση 7.2 *Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση* $543312x + 65340y = 1188$.

Άσκηση 7.3 *Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι* x, y *τέτοιοι ώστε* $x^3 = 2^y + 15$;

Άσκηση 7.4 *Να προσδιορίσετε όλους τους ακεραίους* x, y *που ικανοποιούν την εξίσωση* $x^2 = y^2 + 2y + 9$.

Άσκηση 7.5 *Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί* $a, b, c \geq 1$ *με*

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1.$$

Άσκηση 7.6 *Αν* $x,\ y$ *ακέραιοι με* $0 \leq x,\ y \leq 100$, *να λύσετε την εξίσωση*

$$|x + y - 2| + |3x - 2y + 1| + 3x - 2y + 1 = 0.$$

(Διαγωνισμός «Ο Θαλής» 1996)

Άσκηση 7.7 *Να βρεθούν οι θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης* $x^3 - y^3 = xy + 61$. ***(Ολυμπιάδα Ρωσίας)***

Άσκηση 7.8 *Να λυθεί η εξίσωση* $p - x^4 = 4$ *όπου* p *πρώτος και* x *ακέραιος.*

7.2 Ασκήσεις Β΄ Ομάδας

Άσκηση 7.9 *Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση* $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$. ***(Ολυμπιάδα Πολωνίας)***

Άσκηση 7.10 *Εαν* p, q *πρώτοι, να λύσετε την εξίσωση* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{pq}$ *στους θετικούς ακεραίους.*

Άσκηση 7.11 *Να βρεθούν τα ζεύγη ακεραίων* x, y *που ικανοποιούν την εξίσωση*

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2.$$

Άσκηση 7.12 *Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}.$$

Άσκηση 7.13 *Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y, z που ικανοποιούν την εξίσωση*

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=2.$$

Άσκηση 7.14 *Να δείξετε ότι η εξίσωση $a^2+b^2=c^2+3$ έχει άπειρες ακέραιες λύσεις.*

Άσκηση 7.15 *Υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης $x!y!=z!$ στους φυσικούς $x, y, z>5$;*

Άσκηση 7.16 *Δίνεται ο αριθμός $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Να εξετάσετε εάν είναι ρητός.*

Άσκηση 7.17 *Να λυθεί στο σύνολο των ακεραίων $x,\ y$ το σύστημα των εξισώσεων*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=155, & (1) \\ x+y+z=21, & (2) \end{cases}$$

(Διαγωνισμος «Ο Ευκλείδης» 1996)

Άσκηση 7.18 *Να λύσετε στους θετικούς ακεραίους $x,\ y,\ z$ την εξίσωση $2^x+3^y=z^2$.*

Άσκηση 7.19 *Να δείξετε ότι η εξίσωση*

$$(x+1)^2+(x+2)^2+\cdots+(x+2001)^2=y^2$$

δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Άσκηση 7.20 *Να βρείτε όλα τα ζεύγη πρώτων αριθμών (p, q) που είναι τέτοια ώστε*

$$p^3-q^5=(p+q)^2.$$

(Ολυμπιάδα Ρωσίας)

Άσκηση 7.21 *Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5-y^2=4$ δεν έχει ακέραια λύση.* ***(BMO 1998)***

Άσκηση 7.22 *Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί p για τους οποίους το σύστημα*

$$\begin{cases} p+1=2x^2, & (1) \\ p^2+1=2y^2, & (2) \end{cases}$$

έχει λύση στους ακεραίους x, y.

Άσκηση 7.23 *Να δείξετε ότι εαν το n είναι θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε η εξίσωση*

$$x^3-3xy^2+y^3=n$$

να έχει λύση στους ακεραίους (x, y), τότε έχει τουλάχιστον 3 λύσεις. Να δείξετε επίσης ότι η εξίσωση δεν έχει ακέραια λύση όταν $n=2891$. ***(IMO 1982)***

Άσκηση 7.24 *Να λύσετε στους θετικούς ακεραίους την εξίσωση* $3^x - 5^y = z^2$. ***(BMO 2009)***

Άσκηση 7.25 *Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι* x, y, z *όχι όλοι μηδέν και τέτοιοι ώστε να έχουμε* $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Άσκηση 7.26 *Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί* x, y *που είναι τέτοιοι ώστε*

$$1! + 2! + 3! + \cdots + x! = y^2.$$

Άσκηση 7.27 *Αν οι συντελεστές της εξίσωσης* $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$ *είναι ακέραιοι περιττοί αριθμοί, να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης δεν είναι ρητοί αριθμοί.*

Άσκηση 7.28 *Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις (αν υπάρχουν) της εξίσωσης*

$$14x^{12} - 11y^{12} + 3z^{12} - 8w^{12} = 1997^{1996}.$$

(1η Προκριματική Φάση 1997)

Άσκηση 7.29 *Να αποδείξετε ότι:*

(i) *Υπάρχουν ακέραιοι* a, b, c *που είναι τέτοιοι ώστε* $a^2 + b^2 - 8c = 9$.

(ii) *Δεν υπάρχουν ακέραιοι* a, b, c *που είναι τέτοιοι ώστε* $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

(2η Προκριματική Φάση 1997)

Άσκηση 7.30 *Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης*

$$\frac{13}{x^2} + \frac{1996}{y^2} = \frac{z}{1997}.$$

(Διαγωνισμός «Ο Αρχιμήδης» 1997)