ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης
Εθνομαρτύρων 25, 71409
Ηράκλειο Κρήτης
asygelakis@gmail.com

Στη μνήμη του Θεόδωρου Καζαντζή
για τα 10 χρόνια από το θάνατό του

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αρχίζει με μία ιστορική αναδρομή σε διάφορα προβλήματα της θεωρίας αριθμών καθώς επίσης και σε διάφορους τύπους παραγωγής πρώτων αριθμών (όχι απαραίτητα όλων). Συνεχίζει με αναδρομικούς ή κλειστούς τύπους που δίνουν είτε μόνο μερικούς, είτε όλους τους πρώτους αριθμούς. Καταλήγει στην απόδειξη ενός από τους πολλούς τύπους που δίνουν σε **κλειστή** μορφή το n-οστό πρώτο αριθμό, για οποιαδήποτε τιμή του φυσικού αριθμού n. Επειδή η απόδειξη περιέχει στοιχειώδη Θεωρία Αριθμών (πλην ενός ισχυρού λήμματος των J. B. Rosser και L. Schoenfeld ([16]), που αποδείχθηκε το 1962 και θα θεωρηθεί δεδομένο), μπορεί να την παρακολουθήσει μέχρι το τέλος οποιοσδήποτε γνωρίζει την πολύ βασική θεωρία. Στόχος της εργασίας είναι να διαφωτίσει το τοπίο γύρω από το θέμα παραγωγής πρώτων αριθμών και να ανασκευάσει την πλάνη που κυκλοφορεί ανάμεσα σε συναδέλφους, ότι τέτοιοι τύποι δεν υπάρχουν (βλέπε π.χ. Άλγεβρα Β΄ Λυκείου σχόλιο σελ. 90 έκδοση 2008, ΟΕΔΒ). Οφείλω πολλές ευχαριστίες στο Μιχάλη Λάμπρου, Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης και στο Γιάννη Θωμαΐδη, Σχολικό Σύμβουλο, για τις σημαντικές παρατηρήσεις τους στην τελική διαμόρφωση του κειμένου.

1. <u>Ιστορική Αναδρομή</u>

Τα μαθηματικά ξεκίνησαν και συνεχίζουν να αναπτύσσονται, λόγω των προβλημάτων και προβληματισμών που τίθενται από τους μαθηματικούς. Υπάρχει πλήθος διάσημων άλυτων προβλημάτων στη Θεωρία Αριθμών και αρκετά από αυτά αφορούν το θεμέλιο λίθο των αριθμών, τους πρώτους αριθμούς. Είναι η ελκυστική φύση των προβλημάτων, η πολλές φορές απλή διατύπωσή τους που οδηγεί στην αναζήτηση της απόδειξής τους, όχι πάντοτε για πρακτικούς λόγους, αλλά και για την προσωπική ευχαρίστηση του λύτη. Στην πορεία των προσπαθειών για την απόδειξη ανοικτών προβλημάτων δεν είναι λίγες οι φορές που προκύπτουν νέα προβλήματα και διατυπώνονται νέες εικασίες που στέκονται αφορμή για τη διαρκή ανάπτυξη των μαθηματικών. Άλλοτε, όταν οι εικασίες αυτές αποδεικνύονται, πολλοί ερευνητές αναζητούν απλούστερες λύσεις ή απαντήσεις σε πιο γενικευμένα προβλήματα που έχουν ως βάση τους τις αρχικές εικασίες. Παρά το γεγονός ότι οι πρώτοι αριθμοί και οι γενικές ιδιότητές τους είναι γνωστές από την εποχή του Ευκλείδη, εντούτοις μέχρι το 1800 δεν ήταν γνωστή η κατανομή τους. Δεν είναι μάλιστα τυχαίο που ο μέγας μαθηματικός L. Euler έγραψε ([5]):
« Οι μαθηματικοί προσπάθησαν μάταια έως σήμερα να ανακαλύψουν κάποια τάξη στην ακολουθία των πρώτων αριθμών και έχουμε λόγο να πιστεύουμε ότι παραμένει ένα μυστήριο στο οποίο το ανθρώπινο μυαλό δε θα διεισδύσει ποτέ ».
Οι πρώτοι που διατύπωσαν μία εικασία για την κατανομή των πρώτων αριθμών ήταν οι Gauss και Legendre: Αν συμβολίσουμε με $\pi(x)$ το πλήθος των πρώτων αριθμών από το 1 έως και το φυσικό αριθμό x, τότε για μεγάλες τιμές του x, ο αριθμός $\pi(x)$ είναι περίπου ίσος με $\frac{x}{\ln x}$ ή με άλλα λόγια $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$. Η εικασία αυτή, γνωστή και ως *«θεώρημα των πρώτων αριθμών»* (prime number theorem), αποδείχθηκε ανεξάρτητα το 1896 από τους Hadamard και Poussin ([11]) με τη βοήθεια της συνάρτησης ζήτα του Riemann, ενώ απλούστερες αποδείξεις του ίδιου αποτελέσματος ακολούθησαν από τους Selberg ([20]) και Erdos το 1949 ([3]).

Ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» του, με την απόδειξη που παραθέτει για την απειρία των πρώτων αριθμών, είναι και ο πρώτος που αναρωτήθηκε και προσπάθησε να βρει έναν πρώτο αριθμό μεγαλύτερο από τους δοσμένους. Μπορεί το θεώρημα να είναι υπαρξιακό, αλλά δεν παύει να είναι ο πρόγονος τύπων που δίνουν πρώτους αριθμούς.

Παρακάτω παρατίθενται μερικά αποτελέσματα και παραδείγματα πολυωνύμων που παράγουν πρώτους αριθμούς, για να περάσουμε σε μερικούς από τους τύπους παραγωγής όλων ή άπειρων πρώτων αριθμών.

Το 1752 ο Goldbach ([8]) απέδειξε ότι δεν υπάρχει μη σταθερό πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές το οποίο να παράγει μόνο πρώτους αριθμούς για όλες τις ακέραιες τιμές της μεταβλητής. Η απόδειξη είναι αρκετά απλή: Εάν υπήρχε τέτοιο πολυώνυμο $P(x)$, τότε θα έπρεπε να ίσχυε $P(1) \equiv 0 (\bmod p)$ για κάποιο πρώτο αριθμό p. Σε αυτήν την περίπτωση, για κάθε ακέραιο αριθμό k ισχύει $P(1+kp) \equiv 0 (\bmod p)$, πράγμα που δείχνει ότι ο $P(1+kp)$ δε θα ήταν πρώτος αριθμός (θα ήταν διαιρετός από το p) εκτός εάν $P(1) = P(1+kp)$ για άπειρες τιμές του k. Τότε όμως το πολυώνυμο θα ήταν σταθερό, άτοπο.

Ο Euler, το 1771 ([4]) βρήκε το πολυώνυμο $n^2 - n + 41$[1] το οποίο παράγει πρώτους αριθμούς για $n = 0,...,40$ και από τότε έχουν βρεθεί αρκετά πολυώνυμα που παράγουν πρώτους αριθμούς για διαδοχικές τιμές του n. Μέχρι σήμερα εκείνο που παράγει τους περισσότερους, είναι το

---

[1] Στο βιβλίο Άλγεβρας της Ε΄ Γυμνασίου, ενός από τα καλύτερα βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν τη δεκαετία του 1970 στα σχολεία (έκδοση ΣΤ΄, 1975 σ.34), ο συγγραφέας Η. Ντζιώρας γράφει (η επισήμανση είναι δική μας): «Εν κλασσικόν παράδειγμα τοιαύτης πλάνης είναι η **ψευδής πρότασις** του Euler: Εάν ν φυσικός αριθμός, τότε ο αριθμός $\nu^2 + \nu + 41$ είναι πρώτος». Η αναφορά αυτή υπήρξε αφετηρία για διάφορες μυθοπλασίες όπως «η πλάνη του Euler», «το πάθημα του Euler», «ο Euler δεν ήξερε τέλεια επαγωγή» κλπ που έχουν συμπεριλάβει πολλοί μεταγενέστεροι συγγραφείς σε βιβλία τους ή εργασίες δημοσιευμένες σε περιοδικά. Φυσικά κάτι τέτοιο δεν υφίσταται αφού ο ίδιος ο Euler είχε αποδείξει ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές που να παράγει μόνο πρώτους αριθμούς (μετά από γράμμα του Goldbach to 1752 με κάποιες παρατηρήσεις). Αναρωτήθηκε δε και έθεσε το πρόβλημα της κατασκευής απλών πολυωνύμων που να παράγουν όσο το δυνατόν περισσότερους πρώτους και μία από τις λύσεις ήταν το παραπάνω τριώνυμο. Αυτή τη βιβλιογραφική αναφορά μου έδωσε ο σχολικός σύμβουλος Γ. Θωμαΐδης. Τέτοιου είδους «πλάνες» συγγραφέων των σχολικών εγχειριδίων και όχι μόνο, είναι αρκετές. Η επισήμανση αυτών, δεν είναι ο κύριος σκοπός της εργασίας, καταδεικνύει όμως πού μπορεί να οδηγήσουν εσφαλμένες αναφορές σε ψευδή γεγονότα. Από διδακτικής άποψης λοιπόν είναι ορθότερο να γίνει αλλαγή στο σχόλιο της σελ. 90 του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου έκδοση 2008 που εσφαλμένα γράφει: «Υπάρχουν ακολουθίες, για τις οποίες μέχρι τώρα δε γνωρίζουμε ούτε έναν τύπο για το γενικό τους όρο ούτε έναν αναδρομικό τύπο. Μια τέτοια ακολουθία είναι π.χ. η ακολουθία των πρώτων αριθμών: 2,3,5,7,11,13,…»

$\frac{1}{4}\left(n^5-133n^4+6729n^3-158379n^2+1720294n-6823316\right)$ που παράγει 57 **διακεκριμένους** πρώτους αριθμούς για $n=0,1,...,56$ ([7]). Το 1837 ο Dirichlet ([2]) έδειξε ότι για οποιουσδήποτε πρώτους μεταξύ τους ακεραίους a,b υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί στην ακολουθία $a, a+b, a+2b, a+3b,...$ Με άλλα λόγια υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί οι οποίοι είναι όροι, όχι απαραίτητα διαδοχικοί, αριθμητικής προόδου. Αργότερα, το 2004 οι Green και Tao ([6]) έδειξαν ότι για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο n, η ακολουθία των πρώτων αριθμών περιέχει n διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Το 2008 βρέθηκε ([1]) η μεγαλύτερη γνωστή ακολουθία τέτοιων πρώτων:

$$6171054912832631 + 81737658082080n \text{ για } n=0,1,...,24.$$

Το 1976, οι Jones, Daihachiro, Hideo, Douglas, βρήκαν ένα πολυώνυμο 25^{ου} βαθμού και 26 μεταβλητών, του οποίου οι θετικές τιμές είναι ακριβώς το σύνολο των πρώτων αριθμών ([9]). Πρόκειται ουσιαστικά για μια ισοδύναμη αναπαράσταση των πρώτων αριθμών με το θετικό σύνολο τιμών ενός πολυωνύμου πολλών μεταβλητών. Από εκείνο το διάστημα κι έπειτα, έχει αποδειχθεί ότι μπορεί να ελαττωθεί ο βαθμός του πολυωνύμου αλλά να αυξηθεί το πλήθος των μεταβλητών καθώς επίσης και πλήθος άλλων βελτιώσεων χωρίς να είναι γνωστό ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μεταβλητών που απαιτούνται (το σίγουρο είναι ότι πρέπει να είναι περισσότερες από 2).

Πρέπει να τονιστεί, ότι υπάρχει πλήθος τύπων που παράγουν πρώτους αριθμούς. Οι απλούστεροι από αυτούς εξαρτώνται από μία σταθερά-φάντασμα ενώ οι συνθετότεροι αποτελούνται από πολύπλοκα και πολλαπλά αθροίσματα ή γινόμενα που κάνουν τους εν λόγω τύπους υπολογιστικά αδόκιμους τη στιγμή κατά την οποία με χρήση απλού «κοσκινίσματος» θα μπορούσαμε να βρούμε γρηγορότερα το n-οστό πρώτο αριθμό. Παρακάτω παρατίθενται μερικοί ενδεικτικοί τύποι, δημοσιευμένοι σε πολύ δημοφιλή περιοδικά. Ας σημειωθεί ότι υπάρχουν αρκετοί ακόμη, οι οποίοι είναι βελτιώσεις προηγούμενων ή καινούριοι, των οποίων η υπολογιστική πολυπλοκότητα συνεχίζει να παραμένει μεγάλη.

Ο πρώτος τύπος που κάνει την εμφάνισή του, είναι ο τύπος του Mills το 1947 ([10]) ο οποίος παράγει μεν πρώτους αριθμούς, δυστυχώς όμως δεν τους παράγει όλους. Συγκεκριμένα ο Mills έδειξε ότι υπάρχει θετικός αριθμός A για τον οποίο ο $\left\lfloor A^{3^n} \right\rfloor$ είναι πάντοτε πρώτος αριθμός. Με την προϋπόθεση ότι είναι αληθής η εικασία του Riemann, η μικρότερη τιμή που παίρνει το A είναι η σταθερά θ (γνωστή ως σταθερά του Mill). Ο εν λόγω τύπος (όπου [x] συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x) γίνεται τότε

$$f(n) = \left[\theta^{3^n} \right],$$

όπου $\theta = 1.306377883863080...$ Οι πρώτες τιμές που παίρνει είναι οι 2, 11, 1361, 2521008887, 16022236204009818131831320183, … όλοι πρώτοι αριθμοί.

Το 1952, ο Sierpinski ([15]) απέδειξε έναν ακόμη τύπο: Εάν $a = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{p_m}{10^{2^m}} \right)$ (η σειρά αυτή συγκλίνει), τότε ο n-οστός πρώτος αριθμός δίνεται από τον τύπο

$$p_n = \left[10^{2^n} a \right] - 10^{2^{n-1}} \left[10^{2^{n-1}} a \right].$$

Ο τύπος αυτός ουσιαστικά δε βρίσκει χρησιμότητα, διότι για να υπολογίσει κάποιος το n-οστό πρώτο αριθμό δε χρειάζεται μόνο τους $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ αλλά και τους $p_n, p_{n+1,...}$

Το 1964 ο Willans ([15]) έδωσε τον παρακάτω τύπο για τη χαρακτηριστική συνάρτηση των πρώτων αριθμών ο οποίος στηρίζεται στο θεώρημα του Wilson. Για κάθε ακέραιο $j \geq 1$ θέτουμε $F(j) = \left[\cos^2 \pi \frac{(j-1)!+1}{j} \right]$ κι έτσι για κάθε $j > 1$ έχουμε $F(j) = 1$ αν ο j είναι πρώτος αριθμός ενώ $F(j) = 0$ αν ο j είναι σύνθετος. Ας σημειωθεί ότι $F(1) = 1$. Τότε ο τύπος που δόθηκε για το n-οστό πρώτο αριθμό είναι ο

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left[\left[\frac{n}{\sum_{j=1}^{m} F(j)} \right]^{\frac{1}{n}} \right]$$

Εάν είναι γνωστός ο p_{n-1} τότε ο Willans ([15]) έδωσε και τον αναδρομικό τύπο

$$p_n = 1 + p_{n-1} + F'(p+1) + F'(p+1)F'(p+2) + \cdots + \prod_{j=1}^{p} F'(p+j)$$

όπου $F'(j) = 1 - F(j)$.

Το 1961 ο Srinivasan ([12]) έδωσε τον τύπο $p_{n+1} = \left[\dfrac{\displaystyle\sum_{d|p_1p_2\cdots p_n} \frac{\mu(d)d2^d}{\left(2^d-1\right)^2} - 2^{-1}}{\displaystyle\sum_{d|p_1p_2\cdots p_n} \frac{\mu(d)}{2^d-1} - 2^{-1}} \right]$

όπου μ είναι η συνάρτηση του Möbius ενώ όμοιους με αυτόν τύπους έδωσε και ο Gandhi το 1966 και 1971 τους οποίους ο Namboodiripad βελτίωσε και γενίκευσε το 1971 ([12]).

Ένας ακόμη τύπος για το μικρότερο πρώτο αριθμό που είναι μεγαλύτερος από το δοσμένο $m \geq 2$ και οφείλεται στον Ernvall, δημοσιεύθηκε το 1975 ([15]), όταν ο επινοητής του ήταν ακόμη μαθητής: Έστω $d = \left(\left(m!\right)^{m!} - 1\,,\,\left(2m\right)!\right)$. Τότε ορίζουμε $t = \dfrac{d^d}{\left(d^d\,,\,d!\right)}$ και ας είναι a ο μοναδικός ακέραιος που είναι τέτοιος ώστε $d^a \mid t$ αλλά $d^{a+1} \nmid t$. Έτσι, ο μικρότερος πρώτος αριθμός p που είναι μεγαλύτερος από τον m είναι ο

$$p = \frac{d}{\left(\dfrac{t}{d^a}\,,\,d\right)}.$$

Για $m = p_{n-1}$ παίρνουμε τον αναδρομικό τύπο που μας δίνει τον p_n.

Την ίδια χρονιά, ο Μάκης Παπαδημητρίου ([13]) έδωσε ένα πολύ απλό αναδρομικό τύπο για το n-οστό πρώτο αριθμό στηριζόμενος στην πρόταση του Bertrand ότι μεταξύ των αριθμών n και 2n υπάρχει πάντοτε ένας πρώτος αριθμός p. Συγκεκριμένα αν θέσουμε $p_n = p \geq 3$ τότε ο p_{n+1} πρέπει να είναι ο πρώτος πρώτος αριθμός μεταξύ των ακεραίων $p+2, p+4, \ldots, 2p-1$. Έτσι, αν ορίσουμε $f_x = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{2\left(x-1\right)!}{x} - \left[\dfrac{2(x-1)!}{x}\right]\right)$, που εύκολα δείχνουμε ότι πρόκειται για τη χαρακτηριστική συνάρτηση των περιττών πρώτων αριθμών, λαμβάνουμε τον πολύ απλό αναδρομικό τύπο

$$p_{n+1} = (p+2)f_{p+2} + (p+4)f_{p+4}(1-f_{p+2}) + (p+6)f_{p+6}(1-f_{p+2})(1-f_{p+4}) + \cdots$$
$$+ (2p-1)f_{2p-1}(1-f_{p+2})(1-f_{p+4})\cdots(1-f_{2p-3}).$$

Φαίνεται ότι το 1975 ήταν χρονιά που αρκετοί ασχολήθηκαν με το συγκεκριμένο θέμα. Έτσι ο Regimbal ([14]) έδωσε τον παρακάτω εντυπωσιακό τύπο, που δίνει σε κλειστή μορφή τον k-οστό πρώτο αριθμό

$$p_k = \sum_{m=2}^{2^k} \left[\frac{1}{1 + \left| k - \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{\left[\frac{m}{i}\right]}{\frac{m}{i}} \right]} \right] \sum_{n=2}^{m} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\left[\frac{n}{i}\right]}{\frac{n}{i}} \right]} \right] \right|} \right] m$$

Το 2008 ο E. Rowland έδειξε ([17]) ότι για την ακολουθία a_n που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο $a_n = a_{n-1} + (n, a_{n-1})$ και $a_1 = 7$, οι τιμές της παράστασης $a_n - a_{n-1}$ είναι μόνο μονάδες και πρώτοι αριθμοί. Υπάρχει η εικασία ότι στην ακολουθία αυτή εμφανίζονται όλοι οι πρώτοι αριθμοί αλλά κάτι τέτοιο δεν έχει αποδειχθεί ακόμη. Επίσης για την ίδια ακολουθία με $a_1 = 8$, οι τιμές $a_n - a_{n-1}$ φαίνεται να παίρνουν τιμές που είναι μονάδες ή πρώτοι αριθμοί, όπως παραπάνω, αλλά κι αυτό παραμένει εικασία.

2. Ένας από τους τύπους που δίνει το n-οστό πρώτο αριθμό

Ο τύπος ο οποίος θα παρουσιασθεί αναλυτικότερα, παράγει όλους τους πρώτους αριθμούς, είναι ένας από τους πιο σύγχρονους (2004) και οφείλεται στον M. Ruiz ([18],[19]).

Παρακάτω παρατίθενται μια σειρά από ορισμούς και λήμματα που θα φανούν χρήσιμα στην απόδειξη του θεωρήματος 8 για το οποίο θα γίνει λόγος στη συνέχεια.

Λήμμα 1: Ισχύει $\left[\frac{j}{i}\right]-\left[\frac{j-1}{i}\right]=\begin{cases}1 \text{ αν } i \mid j \\ 0 \text{ διαφορετικά}\end{cases}$ $i=1,2,\ldots,j$ και $j \geq 1$.

Απόδειξη:

- Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $i \mid j$. Τότε $j=k \cdot i$ για κάποιο ακέραιο αριθμό k.

Άρα $\left[\frac{j}{i}\right]=[k]=k$, ενώ $\left[\frac{j-1}{i}\right]=\left[k-\frac{1}{i}\right]=k-1$. Τώρα πλέον το αποτέλεσμα έπεται.

- Ας υποθέσουμε τώρα ότι $i \nmid j$ (άρα σίγουρα $i \neq 1, j$). Τότε από τον αλγόριθμο της ευκλείδειας διαίρεσης υπάρχουν ακέραιοι $0 \neq \upsilon < i$ και k, τέτοιοι ώστε $j=k \cdot i+\upsilon$. Συνεπώς $\left[\frac{j}{i}\right]=\left[k+\frac{\upsilon}{i}\right]=k$ και $\left[\frac{j-1}{i}\right]=\left[k+\frac{\upsilon-1}{i}\right]=k$, οπότε και πάλι το αποτέλεσμα έπεται. □

Ορισμός 2: Με $d(n)=\sum_{k \mid n} 1$ συμβολίζουμε το πλήθος των διαιρετών του αριθμού n.

Πόρισμα 3: Ισχύει $d(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{i}\right]-\left[\frac{n-1}{i}\right]\right)$.

Ορισμός 4: Συμβολίζουμε με F(n) τη χαρακτηριστική συνάρτηση των πρώτων αριθμών δηλαδή

$$F(n)=\begin{cases}1 \text{ αν ο } n \text{ είναι πρώτος} \\ 0 \text{ διαφορετικά}\end{cases}$$

Πόρισμα 5: Ισχύει $F(n)=1+\left[\frac{2-d(n)}{n}\right]$, $n>1$

Απόδειξη:

Άμεση εφαρμογή του ότι $d(n)=2$ αν ο n είναι πρώτος αριθμός ενώ $d(n)>2$ αν ο n είναι σύνθετος. Επίσης $2\le d(n)\le n$ για $n>1$. $\square$

<u>Λήμμα 6:</u> Εάν με $\pi(k)$ συμβολίσουμε το πλήθος των πρώτων αριθμών που δεν υπερβαίνουν τον αριθμό k τότε ισχύει

$$\pi(k)=\sum_{j=2}^{[k]}\left(1+\left[\frac{2-\sum_{i=1}^{j}\left(\left[\frac{j}{i}\right]-\left[\frac{j-1}{i}\right]\right)}{j}\right]\right)$$

<u>Απόδειξη:</u>

Λόγω του Πορίσματος 5, παίρνουμε

$$\pi(k)=\sum_{j=2}^{[k]}F(j) \qquad (1)$$

με τη σύμβαση ότι κάθε άθροισμα $\sum_{i=a}^{b}$ είναι μηδέν αν $a>b$. Συνδυάζοντας την (1) με τα Πορίσματα 3 και 5 παίρνουμε τη σχέση για το $\pi(k)$. $\square$

<u>Λήμμα 7:</u> Εάν με p_n συμβολίσουμε τον n-οστό πρώτο αριθμό, τότε για $n>1$ ισχύουν οι ανισότητες:

i. $\pi\left(2n\ln(n)+2\right)<2n$

ii. $p_n<2n\ln(n)+2$

<u>Απόδειξη:</u>

Οι Rosser και Schoenfeld σε ένα άρθρο τους ([16]), απέδειξαν ότι

a. $p_n>n\ln(n)$ για κάθε φυσικό αριθμό n και

b. $p_n < n\ln(n) + n\left(\ln(\ln(n)) - \frac{1}{2}\right)$ για $n > 20$.

Από τη σχέση a. παίρνουμε $p_{2n} > 2n\ln(2n)$ και αφού $\pi(p_{2n}) = 2n$, προκύπτει ότι $\pi(2n\ln(2n)) < 2n$ που οδηγεί και στην πρώτη από τις σχέσεις του Λήμματος για $n > 1$. Για τη δεύτερη, για $n \geq 20$ προκύπτει από τη b. ενώ εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει και για τις τιμές $n = 2, 3, \ldots, 19$. □

<u>Θεώρημα 8</u>: Ισχύει

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{[2n\ln(n)+2]} \left(1 - \left[\frac{\pi(k)}{n}\right]\right), \ n > 1.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Το Λήμμα 7 για $n > 1$ δίνει ότι

$$\left[\frac{\pi(k)}{n}\right] = \begin{cases} 0 & \text{αν } 1 \leq k \leq p_n - 1 \\ 1 & \text{αν } p_n \leq k < 2n\ln(n) + 2 \end{cases}$$

και αμέσως προκύπτει ο τύπος του θεωρήματος αφού στο άθροισμα όσο το k είναι μικρότερο ή ίσο με το $p_n - 1$ προστίθενται μονάδες ενώ όταν το ξεπεράσει και μέχρι να φτάσει στο $2n\ln(n) + 2$, προστίθενται μηδενικά. □

<u>Βιβλιογραφία</u>

[1]. Andersen J., *Primes in Arithmetic Progression Records*, *http://users.cybercity.dk/~dsl522332/math/aprecords.htm*

[2]. Dirichlet P. G. L., *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind,*

unendlich viele Primzahlen enthält Abhand. Ak. Wiss. Berlin 48 (1837).

[3]. Erdos P., *On a New Method in Elementary Number Theory Which Leads to An Elementary Proof of the Prime Number Theorem*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 35 (1949) 374-384.

[4]. Euler L., *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences.* Berlin (1772) 35-36.

[5]. Gamma J. H., *Exploring Euler's constant,* Princeton University Press (2003) 163.

[6]. Green B. and Tao T., *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Annals of Mathematics 167 (2008) 481–547.

[7]. Gupta S. S. http://www.shyamsundergupta.com

[8]. Hardy G. H. and Wright E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed.* Oxford, England Clarendon Press (1979) 18,22.

[9]. Jones J., Daihachiro S., Hideo W., Douglas W., *Diophantine representation of the set of prime numbers*, American Mathematical Monthly 83 (1976) 449–464.

[10]. Mills W. H., *A prime-representing function,* Bulletin of the American Mathematical Society 53 (1947) 604.

[11]. Nagell T., *Introduction to Number Theory*, Second Edition, Chelsea Publishing Company (1981) 55.

[12]. Namboodiripad K. S., *A note on formulae for the n-th prime*, Monatshefte für Mathematik 75 (1971) 256-262.

[13]. Papadimitriou M., *A recursion formula for the sequence of odd primes*, American Mathematical Monthly 82 (1975) 289.

[14]. Regimbal S., *An Explicit Formula for the kth Prime Number*, Mathematics Magazine 48 No. 4 (1975) 230-232.

[15]. Ribenboim P., *The New Book of Prime Number Records.* New York: Springer-Verlag, (1996) 179-183.

[16]. Rosser J. B. and Schoenfeld L., *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, *Ill. J. Math*. 6 (1962) 64-94.

[17]. Rowland E.S., *A Natural Prime-Generating Recurrence*, Journal of Integer Sequences, Vol. 11 (2008).

[18]. Ruiz S. M. and Sondow J., *Formulas for $\pi(x)$ and n-th Prime,* Mathematics Magazine for Grades 1-12, (2004).

[19]. Ruiz S. M., *The general term of the prime number sequence and the Smarandache Prime Function*, Smarandache Notions Journal 11 (2000) 59.

[20]. Selberg A., *An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem,* Annals of Mathematics 50 (1949) 305-313.

Abstract

The current paper begins with a historical background to various problems of number theory as well as various formulas of prime number production (not necessarily all). It continues to recursive or closed formulas which result in either some or all prime numbers. It leads to the proof of one formula (amongst the many existing ones) resulting in the closed form of the nth prime number for any value of the natural number n. Since the proof contains the elementary number theory (except of a powerful lemma of J.B. Rosser and L. Schoenfeld ([16]), which was proved in 1962 and will be taken for granted), we believe that it can be followed by anyone who knows the basic number theory. The purpose of the current work is to elucidate the landscape around the issue of prime numbers production and to refute a fallacy that circulates among colleagues that such formulas do not exist (see eg. Algebra II Lyceum comment p. 90, edition 2008, OEDB). I owe many thanks to Michael Lambrou, Professor at the Department of Mathematics in the University of Crete and John Thomaidis, school advisor, for his valuable contribution to the final layout of this text.