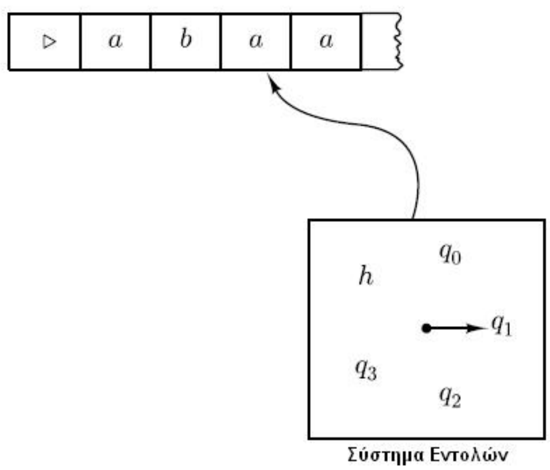
Ισοδυναμία των Μηχανών Turing (TM)

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης *

11 Απριλίου 2006

1 Βασική μορφή Μηχανών Turing (BTM)

Η βασική μορφή της Μηχανής Turing (BTM) αποτελείται από ένα σύνολο εντολών, μία ταινία που έχει αριστερό άκρο αλλά δεν έχει δεξί τέλος (όπως λέμε είναι τύπου $\mathbb{N}$), η οποία διαιρείται σε κελιά, και μία κεφαλή η οποία μπορεί να μετακινείται με τρόπο που θα ορίσουμε παρακάτω (Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Πρότυπο Βασικής Μηχανής $Turing$

Σε ένα βήμα η BTM, ανάλογα με το σύμβολο το οποίο θα διαβάσει η κεφαλή και με την εντολή που πρέπει να εκτελέσει βλέποντας αυτό το σύμβολο (από το σύνολο των εντολών), μπορεί να κάνει τα εξής:

- Να αλλάζει την κατάσταση στην οποία βρισκόταν
- Να αλλάζει κάποιο σύμβολο στο κελί της ταινίας που διαβάζει αντικαθιστώντας το με κάποιο άλλο σύμβολο (μπορεί και το ίδιο) ή να μετακινήσει την κεφαλή της, αριστερά ή δεξιά κατά ένα κελί

*Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Επειδή όπως άναφέραμε, η μηχανή έχει αριστερό άκρο, η μηχανή πρέπει να μπορεί αναγνωρίζει την θέση αυτή, καθώς δεν μπορεί να μετακινηθεί αριστερότερα. Έτσι τοποθετούμε το ειδικό σύμβολο $\triangleright$ στο αριστερότερο κελί της μηχανής ώστε όταν το διαβάζει να μετακινεί την κεφαλή της οπωσδήποτε δεξιά. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τα σύμβολα $-1, +1$ για να δηλώσουμε ότι η κεφαλή της μηχανής μετακινείται μία θέση αριστερά ή δεξιά αντίστοιχα. Αυτά τα σύμβολα δεν θα περιέχονται στο αλφάβητο το οποίο θα ορίσουμε παρακάτω.

Η μηχανή έχει γραμμένη την είσοδο που δίνουμε, γράφοντας κάθε ένα σύμβολο της εισόδου σε ένα κελί ξεκινώντας αμέσως μετά από το ειδικό σύμβολο $\triangleright$ και δεξιότερα. Τα υπόλοιπα κελιά της μηχανής περιέχουν το κενό σύμβολο, για το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\sqcup$. Η κεφαλή επιτρέπεται να μετακινήσει την κεφαλή κατα ένα κελί δεξιά ή αριστερά σε κάθε βήμα, άρα μετά από πεπερασμένου πλήθους βήματα, μόνο πεπερασμένου πληθους κελιά θα έχει σαρώσει η κεφαλή. Τώρα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε τον τυπικό ορισμό της **Βασικής Μορφής Μηχανής Turing (BTM)**.

Ορισμός 1.1 ***Μηχανή Turing*** $\mathcal{M}$, *είναι μία* 5*-άδα* $\langle K, \Sigma, \delta, s, H \rangle$ *όπου:*

- K *είναι το σύνολο των καταστάσεων.*
- Σ *είναι το αλφάβητο των συμβόλων που χρησιμοποιούνται και το οποίο περιέχει το κενό σύμβολο* $\sqcup$ *καθώς επίσης και το* $\triangleright$ *αλλά όχι τα* $-1, +1$.
- $s \in K$ *είναι η αρχική κατάσταση της* $\mathcal{M}$.
- $H \subseteq K$ *είναι το σύνολο των τελικών καταστάσεων και τέλος,*
- $\delta : (K - H) \times \Sigma \to K \times (\Sigma \cup \{-1, +1\})$ *είναι η συνάρτηση μετάβασης η οποία είναι τέτοια, ώστε*

  (i) *Για κάθε* $q \in K - H$ *εαν* $\delta(q, \triangleright) = (p, b)$, *τότε* $b = +1$.

  (ii) *Για κάθε* $q \in K - H$ *και* $a \in \Sigma$, *εαν* $\delta(q, a) = (p, b)$, *τότε* $b \neq \triangleright$.

Εαν $q \in K - H, a \in \Sigma$, και $\delta(q, a) = (p, b)$, τότε η μηχανή $\mathcal{M}$ όταν βρεθεί στην κατάσταση q και διαβάσει το σύμβολο a θα περάσει σε μια (νέα) κατάσταση p, και (i) είτε το b είναι σύμβολο του Σ οπότε η $\mathcal{M}$ θα γράψει στη θέση του a, το b είτε (ii) εαν $b \in \{-1, 1\}$, η μηχανή $\mathcal{M}$ θα κινήσει την κεφαλή κατά μία θέση δεξιά ή αριστερά. Καθώς η δ είναι συνάρτηση, η λειτουργία της $\mathcal{M}$ είναι ντετερμινιστική και θα σταματήσει μόνο όταν η $\mathcal{M}$ εισέλθει σε τελική κατάσταση. Ας σημειωθεί ότι με τα $(\mathrm{i}), (\mathrm{ii})$ της συνάρτησης δ,εξασφαλίζουμε ότι η μηχανή μόλις δει το σύμβολο $\triangleright$, θα μετακινηθεί οπωσδήποτε δεξιά και το σύμβολο αυτό δεν μπορεί να σβηστεί από το πρώτο κελί. Είναι καθαρά και μόνον για βοηθητικό σκοπό.

Θα περιγράψουμε τώρα πιο φορμαλιστικά την λειτουργία της μηχανής. Για να δούμε καταρχήν την κατάσταση της μηχανής σε κάποιο συγκεκριμένο βήμα $\mathcal{M}$, χρειαζόμαστε το σύνολο των καταστάσεων, το περιεχόμενο της ταινίας εκείνη τη στιγμή καθώς επίσης και την θέση της κεφαλής. Καθώς όλη η ταινία, εκτός από πεπερασμένου πλήθους κελιά, είναι κενή, το περιεχόμενο της ταινίας μπορεί να περιγραφεί από μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων. Αυτή την ακολουθία επιλέγουμε να την σπάσουμε σε δύο μέρη ως προς το κελί που διαβάζουμε ως εξής: στο αριστερότερο αυτού του κελιού το οποίο περιέχει και το περιεχόμενο του κελιού που διαβάζουμε, και στο υπόλοιπο (πιθανόν και κενό) δεξιότερο μέρος του κελιού αυτού. Επιπλέον, απαιτούμε το δεξί μέρος να μην τελειώνει σε $\sqcup$, έτσι ώστε κανένα από αυτά τα 2 μέρη να μην αντιστοιχεί σε ίδιο συνδιασμό θέσης κεφαλής-περιεχομένου ταινίας. (έτσι κι αλλιώς, όλα τα κελιά τα δεξιότερα του τελευταίου, δεχόμαστε ότι περιέχουν $\sqcup$).

Ορισμός 1.2 ***Στιγμιότυπο*** *μίας μηχανής $\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, s, H\rangle$, είναι ένα στοιχείο του $K \times \triangleright\Sigma^* \times (\Sigma^*(\Sigma - \{\sqcup\}) \bigcup \{e\})$.*

Παράδειγμα 1.1 *Καθώς λοιπόν όλα τα στιγμιότυπα πρέπει να ξεκινούν με το σύμβολο $\triangleright$ και ποτέ να μην τελειώνουν με $\sqcup$ (εκτός εαν το κελί του οποίου βρίσκουμε το στιγμιότυπο περιέχει το $\sqcup$), τα $(q, \triangleright a, aba), (h, \triangleright \sqcup \sqcup\sqcup, \sqcup a)$ και $(q, \triangleright \sqcup a \sqcup \sqcup, e)$ είναι στιγμιότυπα, ενώ τα $(q, \triangleright baa, a, bc\sqcup)$ και $(q, \sqcup aa, ba)$ δεν είναι.*

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $(q, w\underline{a}u)$ για το στιγμιότυπο (q, wa, u), όπου το υπογραμμισμένο στοιχείο στον παραπάνω συμβολισμό, δείχνει την θέση της κεφαλής. Ένα στιγμιότυπο θα λέγεται **τελικό στιγμιότυπο**, εαν η κατάσταση στην οποία βρίσκεται είναι τελική.

Ορισμός 1.3 *Έστω $\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, s, H\rangle$ μία μηχανή $Turing$ και έστω δύο στιγμιότυπα της $\mathcal{M}$, $(q_1, w_1\underline{a_1}u_1)$ και $(q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$, όπου $a_1, a_2 \in \Sigma$. Τότε γράφουμε*

$$(q_1, w_1\underline{a_1}u_1) \vdash_M (q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$$

αν-ν[1] *για κάποιο $b \in \Sigma \bigcup \{-1, 1\}, \delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ και είτε*

1. *$b \in \Sigma, w_1 = w_2, u_1 = u_2$ και $a_2 = b$ είτε,*
2. *$b = -1, w_1 = w_2a_2$, και είτε*
   (i) *$u_2 = a_1u_1$, εαν $a \neq \sqcup$ ή $u_1 \neq e$,*
   (ii) *$u_2 = e$, εαν $a = \sqcup$ και $u_1 = e$*
3. *$b = +1, w_2 = w_1a_1$ και είτε*
   (i) *$u_1 = a_2u_2$ ή*
   (ii) *$u_1 = u_2 = e$ και $a_2 = \sqcup$.*

Ορισμός 1.4 *Εαν δύο στιγμιότυπα σχετίζονται με την σχέση $\vdash_M$ όπως περιγράφτηκε παραπάνω, λέμε ότι το δεύτερο προκύπτει από το πρώτο σε ένα βήμα ενώ εαν ένα στιγμιότυπο προκύπτει από κάποιο άλλο σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων (συμπεριλαμβάνοντας και τα μηδενικά βήματα), τότε λέμε ότι το δεύτερο είναι*

[1]συντομογραφία του ¨αν και μόνο αν¨.

επόμενο *του πρώτου και σχετίζονται με την σχέση* $\vdash_M^*$ *αντί της* $\vdash_M$. *Πιο συγκεκριμένα λέμε ότι το στιγμιότυπο* C_1 *παράγει το* C_2 *ή ότι το* C_2 *είναι επόμενο του* C_1, *εαν* $C_1 \vdash_M^* C_2$. ***Υπολογισμός*** *από την* $\mathcal{M}$ *είναι μία ακολουθία στιγμιοτύπων* $C_0, C_1, \ldots, C_n$ *για κάποιο* $n \geq 0$ *για την οποία ισχύει*

$$C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M C_2 \vdash_M \cdots \vdash_M C_n$$

Τότε λέμε ότι ο υπολογισμός έχει ***μήκος*** n, *ή ότι αποτελείται από* n ***βήματα*** *και γράφουμε* $C_0 \vdash_M^n C_n$.

2 Συνδιασμός Μηχανών Turing (BTM)

Οι μηχανές $Turing$ που μπορούμε να παράγουμε με τον προηγούμενο ορισμό, είναι πολύ απλές, τόσο, ώστε τελικά η αναπαράστασή τους να γίνεται εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση, ειδικά όταν οι απαιτήσεις του προβλήματος αυξάνονται. Χρειαζόμαστε λοιπόν μία αναπαράσταση μηχανών $Turing$ η οποία να είναι παραστατικότερη και διαυγέστερη. Η ιδέα είναι να προσπαθήσουμε να συνδιάσουμε πολλές μηχανές $Turing$ με κάποιο τρόπο, ώστε ένα δύσκολο πρόβλημα να μπορεί να αναλυθεί σε άλλα μικρότερα. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να φτιάξουμε ένα ρεπερτόριο από βασικές μηχανές $Turing$ τις οποίες χρησιμοποιούμε συχνότερα, και κάνοντας χρήση αυτών να ¨δημιουργήσουμε¨ μία καινούρια.

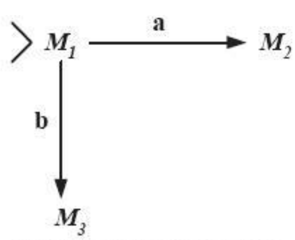
Βασικές Μηχανές Turing: Ξεκινούμε την μελέτη τους από τις πολύ απλές. Εκείνες οι μηχανές που απλά γράφουν ένα σύμβολο (symbol-writing machines) και εκείνες που απλά μετακινούν την κεφαλή δεξιά ή αριστερά (head-moving machines). Έστω αλφάβητο Σ της μηχανής μας. Για κάθε $a \in \Sigma \cup \{-1, +1\} - \{\triangleright\}$, ορίζουμε την μηχανή $Turing$ $M_a = (\{s, h\}, \Sigma, \delta, s, \{h\})$, όπου για κάθε $b \in \Sigma - \{\triangleright\}$, έχουμε $\delta(s, b) = (h, a)$. Εξ'ορισμού $\delta(s, \triangleright) = (s, +1)$. Αυτό σημαίνει ότι το μόνο που κάνουν αυτές οι μηχανές είναι να εκτελούν σε κάθε βήμα το αντίστοιχο a (γράφοντας το σύμβολο a, εαν $a \in \Sigma$, μετακινώντας κατά a την κεφαλή εαν $a \in \{-1, +1\}$) και αμέσως μετά τερματίζουν. Εξ'ορισμού υπάρχει μία μοναδική εξαίρεση στην παραπάνω λειτουργία της μηχανής. Εαν το σύμβολο που θα σαρώσει η μηχανή είναι το $\triangleright$ τότε, απαραίτητα η μηχανή θα μετακινηθεί προς τα δεξιά.

Επειδή οι μηχανές που απλά γράφουν ένα σύμβολο χρησιμοποιούνται πολύ συχνα, θα συντομεύσουμε τα ονόματά τους και απλά θα γράφουμε a αντί για M_a. Αυτό σημαίνει ότι εαν $a \in \Sigma$ τότε αυτή η μηχανή θα συμβολίζεται απλά με a. Οι μηχανές που απλά μετακινούν την κεφαλή αριστερά ή δεξιά M_{-1}, M_{+1} θα συμβολίζονται στο εξής: L και R αντίστοιχα.

Όμως πώς μπορεί να γίνει ένας τέτοιος συνδιασμός βασικών μηχανών $Turing$, και με ποιό τρόπο χρησιμοποιώντας αυτές θα δημιουργήσουμε μία καινούρια ;

Μία πολύ καλή ιδέα την οποία χρησιμοποιούμε και στα πεπερασμένα Automata, είναι να ενώσουμε τις καταστάσεις των μηχανών ώστε να μπορούμε από τη λειτουργία της μίας να μεταβούμε σε λειτουργία της άλλης. Οπωσδήποτε δεν επιδιώκουμε εκκίνηση της επόμενης μηχανής εαν δεν σταματήσει η πρώτη· η δεύτερη μηχανή τότε, ξεκινάει την λειτουργία της από την αρχική της κατάσταση με την ταινία και την θέση της κεφαλής εκεί όπου είχε σταματήσει η πρώτη.

Έτσι λοιπόν, εαν για παράδειγμα M_1, M_2 και M_3 είναι τρεις μηχανές $Turing$, τότε η μηχανή που φαίνεται στο Σχήμα 2 λειτουργεί ως εξής: Ξεκινάει η λειτουργία της από την αρχική κατάσταση της M_1, λειτουργεί κανονικά όπως θα λειτουργούσε η M_1 μέχρι να σταματήσει· εαν το σύμβολο που διαβάζει τότε η κεφαλή είναι το a, ξεκινά την λειτουργία της η M_2 και λειτουργεί όπως θα λειτουργούσε η M_2, διαφορετικά, εαν το σύμβολο που διαβάζει τότε η κεφαλή είναι το b, τότε ξεκινά τη λειτουργία της η M_3 και λειτουργεί όπως θα λειτουργούσε η M_3.



Σχήμα 2: Συνδυασμός Μηχανών $Turing$

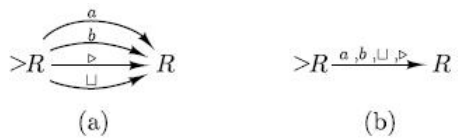
Γίνεται λοιπόν καθαρότερος ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να το κάνουμε αυτό. Μένει λοιπόν να ορίσουμε αυστηρότερα μηχανή $\mathcal{M}$ που η λειτουργία της συνίσταται στην λειτουργία των υπολοίπων τριών μηχανών M_1, M_2 και M_3.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $M_1 = \langle K_1, \Sigma, \delta_1, s_1, H_1 \rangle$, $M_2 = \langle K_2, \Sigma, \delta_2, s_2, H_2 \rangle$ και $M_3 = \langle K_3, \Sigma, \delta_3, s_3, H_3 \rangle$. Θα υποθέσουμε τώρα, ότι τα σύνολα των καταστάσεων K_1, K_2, K_3 είναι ξένα μεταξύ τους, κάτι το οποίο είναι αρκετά βολικό για να μην επέλθει σύγχυση. Τότε η μηχανή που προκύπτει από τον συνδιασμό των υπολοίπων τριών θα είναι η $\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, s, H \rangle$, όπου

- $K = K_1 \bigcup K_3 \bigcup K_3$
- $s = s_1$
- $H = H_2 \bigcup H_3$
- Για κάθε σύμβολο $\sigma \in \Sigma$ και $q \in K - H$, η συνάρτηση μετάβασης $\delta(q, \sigma)$ ορίζεται ως ακολούθως:
  1. Εαν $q \in K_1 - H_1$ τότε $\delta(q, \sigma) = \delta_1(q, \sigma)$
  2. Εαν $q \in K_2 - H_2$ τότε $\delta(q, \sigma) = \delta_2(q, \sigma)$
  3. Εαν $q \in K_3 - H_3$ τότε $\delta(q, \sigma) = \delta_3(q, \sigma)$
  4. Τέλος, εαν $q \in H$ - η μόνη περίπτωση που έχει μείνει -, τότε $\delta(q, \sigma) = s_2$ εαν $\sigma = a$, $\delta(q, \sigma) = s_3$ εαν $\sigma = b$ και $\delta(q, \sigma) \in H$ διαφορετικά.

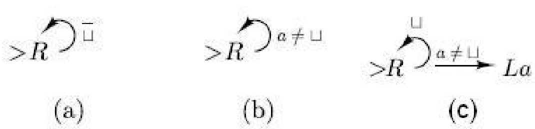
Προφανώς η μηχανή $\mathcal{M}$ με τον τρόπο που ορίστηκε παραπάνω, είναι μία μηχανή $Turing$. Τώρα λοιπόν, έχουμε όλα τα συστατικά, για να συνδιάσουμε βασικές μηχανές $Turing$ και να πάρουμε πιο πολύπλοκες. Μπορούμε να συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο και να συνδιάσουμε ήδη συνδιασμένες μηχανές $Turing$ για την δημιουργία καινούριων μηχανών κ.ο.κ.

Παράδειγμα 2.1 *Το σχήμα $2.1(a)$ δείχνει μία μηχανή η οποία περιέχει δύο αντίγραφα της μηχανής R. Η μηχανή που δείχνει το σχήμα αυτό μετακινεί την κεφαλή προς τα δεξιά ένα κελί και μετά, εαν το κελί αυτό περιέχει $a, b, \triangleright, \sqcup$ τότε μετακινεί την κεφαλή μία θέση ακόμη προς τα δεξιά.*



Είναι βολικό να παραστήσουμε μία τέτοια μηχανή με την μηχανή που φαίνεται στο σχήμα $2.1(b)$. Έτσι ένα βέλος που δείχνει πολλά σύμβολα, είναι το ίδιο με πολλά βέλη κάθε ένα από τα οποία έχει ένα και μόνο σύμβολο. Εαν ένα βέλος έχει όλα τα σύμβολα του αλφαβήτου Σ τότε τα σύμβολα αυτά μπορούμε να τα παραλείψουμε[2]. Μπορούμε για να απλουστεύσουμε περισσότερο τα πράγματα να παραλείποντας ακόμη και το βέλος εαν ξέρουμε ότι το αλφάβητο Σ είναι το $\Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$. Έτσι το σχήμα $2.1(b)$ παίρνει τη μορφή RR ή ακόμη απλούστερα R^2.

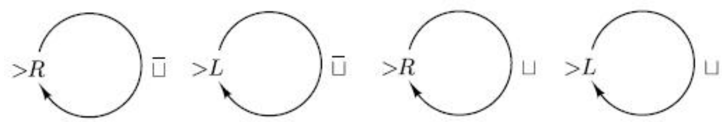
Παράδειγμα 2.2 *Εαν $a \in \Sigma$ είναι οποιοδήποτε σύμβολο, μπορούμε μερικές φορές να παραλείψουμε πολλαπλά βέλη και περιγραφές αυτών, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\overline{a}$ το οποίο σημαίνει: ¨οποιοδήποτε σύμβολο εκτός του a¨. Τότε η μηχανή που απεικονίζεται στο σχήμα $2.2(a)$ σαρώνει την ταινία και μετακινεί την κεφαλή προς τα δεξιά μέχρι να βρει $\sqcup$. Θα συμβολίζουμε αυτή την πολύ χρήσιμη μηχανή με $R_\sqcup$.*



Άλλη μία πολύ χρήσιμη συντόμευση της ίδιας μηχανής του σχήματος $2.2(a)$, είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα $2.2(b)$. Τώρα το $a \neq \sqcup$ διαβάζεται ως ¨οποιοδήποτε σύμβολο a εκτός του $\sqcup$. Το πλεονέκτημα αυτού του συμβολισμού είναι ότι το a μπορεί να χρησιμοποιηθεί πλέον οπουδήποτε στο διάγραμμα ως το όνομα της μηχανής. Για να το δείξουμε αυτό καλύτερα, το σχήμα $2.2(c)$, απεικονίζει μία μηχανή η οποία σαρώνει τα σύμβολα που βλέπει και μετακινείται προς τα δεξιά μέχρι να βρει ένα μη κενό κελί. Όταν το βρει, αντιγράφει το σύμβολο αυτού του κελιού, στο κελί που βρίσκεται αμέσως αριστερότερα από αυτό.

[2] Η αριστερότερη μηχανή για βολικούς λόγους, είναι πάντοτε η αρχική.

Παράδειγμα 2.3 *Μηχανές που βρίσκουν κελιά με συγκεκριμένο περιεχόμενο φαίνονται στα σχήμα 2.3. Συγκεκριμένα:*



(a) $R_{\sqcup}$ (b) $L_{\sqcup}$ (c) $R_{\overline{\sqcup}}$ (d) $L_{\overline{\sqcup}}$

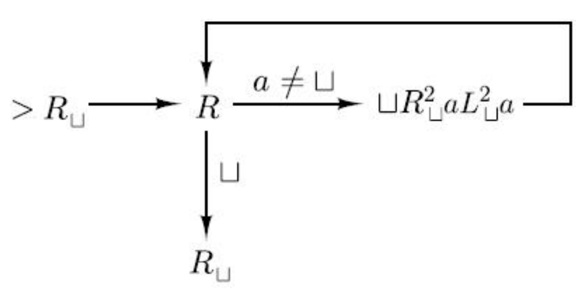
α *Η $R_{\sqcup}$, η οποία βρίσκει το πρώτο κελί που περιέχει $\sqcup$ αμέσως δεξιότερα από το κελί το οποίο σαρώνεται εκείνη τη στιγμή.*

β *Η $L_{\sqcup}$, η οποία βρίσκει το πρώτο κελί που περιέχει $\sqcup$ αμέσως αριστερότερα από το κελί το οποίο σαρώνεται εκείνη τη στιγμή.*

ς *Η $R_{\overline{\sqcup}}$, η οποία βρίσκει το πρώτο μη κενό κελί που περιέχεται αμέσως δεξιότερα από το κελί το οποίο σαρώνεται εκείνη τη στιγμή.*

δ *Η $L_{\overline{\sqcup}}$, η οποία βρίσκει το πρώτο μη κενό κελί που περιέχεται αμέσως αριστερότερα από το κελί το οποίο σαρώνεται εκείνη τη στιγμή.*

Παράδειγμα 2.4 *Θα δώσουμε σαν τελευταίο παράδειγμα την μηχανή C που αντιγράφει την είσοδο που της δείνουμε αφήνοντας ένα κενό ενδιάμεσα copying machine. Πιο συγκεκριμένα, εαν η C ξεκινά με είσοδο w (δηλαδή αμέσως αριστερότερα αυτής και εκεί απ'οπου βρίσκεται η κεφαλή της ταινίας, περιέχεται το $\sqcup$ και αμέσως δεξιότερα υπάρχουν απεριόριστα κενά, ενώ η είσοδος w δεν περιέχει η ίδια κενά). Τότε η μηχανή θα σταματήσει αφού το περιεχόμενό της γίνει το $w \sqcup w$. Τότε λέμε ότι η C μετέτρεψε το $\underline{\sqcup}w\sqcup$ στο $\sqcup w \sqcup w\underline{\sqcup}$. Ένα διάγραμμα που να περιγράφει αυτή τη μηχανή δίνεται στο σχήμα 2.4*



3 Υπολογίζοντας με τη βοήθεια Μηχανών Turing

Στο κεφάλαιο αυτό, θα αναφερθούμε στις μηχανές $Turing$ ως αποδέκτες γλωσσών. Γιάυτό το λόγο οι μηχανές που θα δούμε θα ικανοποιούν κάποιες προυποθέσεις.

Η αρχική είσοδος της ταινίας, δεν περιέχει κενά ενδιάμεσα και είναι γραμμένη δεξιότερα του συμβόλου $\triangleright$ αφήνοντας ένα κενό ενδιάμεσα και άπειρα κενά δεξιότερα της αρχικής εισόδου. Επίσης υποθέτουμε ότι η κεφαλή της ταινίας, τοποθετείται στο κελί το οποίο περιέχει το $\sqcup$, ανάμεσα στο αρχικό σύμβολο της ταινίας $\triangleright$ και στην αρχική είσοδο· και η μηχανή ξεκινά την λειτουργία της από την αρχική της κατάσταση. Εαν $\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, s, H \rangle$ είναι μία μηχανή $Turing$ και $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$, τότε το **αρχικό στιγμιότυπο** της M με είσοδο w, είναι $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$. Με αυτή τη σύμβαση μπορούμε να ξεκινήσουμε να ορίσουμε με ποιό τρόπο οι μηχανές $Turing$ μπορούν να οριστούν, ώστε να αναγνωρίζουν γλώσσες.

Ορισμός 3.1 *Έστω μηχανή $Turing$, $\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, s, H \rangle$, έτσι ώστε το $H = \{q_y, q_n\}$ περιέχει δύο διακεκριμένες τελικές καταστάσεις (q_y, q_n για ¨ναι¨ και ¨οχι¨ αντίστοιχα). Οποιοδήποτε τελικό στιγμιότυπο του οποίου η κατάσταση είναι q_y, ονομάζεται **κατάσταση αποδοχής**, ενώ οποιοδήποτε τελικό στιγμιότυπο του οποίου η κατάσταση είναι q_n, ονομάζεται **κατάσταση απόρριψης**. Λέμε ότι η μηχανή $\mathcal{M}$ **αποδέχεται** μία είσοδο $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$, εαν το $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής, ενώ λέμε ότι η μηχανή $\mathcal{M}$ **απορρίπτει** μία είσοδο w, εαν το $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ οδηγεί σε κατάσταση απόρριψης.*

*Ας είναι $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ ένα αλφάβητο το οποίο ονομάζουμε **αλφάβητο εισόδου** της μηχανής $\mathcal{M}$· με το να πάρουμε το Σ_0 να είναι υποσύνολο του $\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$, επιτρέπουμε στην μηχανή μας να χρησιμοποιείσει περισσότερα σύμβολα εκτός αυτών που εμφανιζόταν στις εισόδους της. Λέμε ότι η $\mathcal{M}$ **αποφασίζει** μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$, εαν για κάθε λέξη $w \in \Sigma_0^*$ το ακόλουθο είναι αληθές: ¨Εαν $w \in L$, τότε η μηχανή $\mathcal{M}$ αποδέχεται την w και εαν $w \notin L$ τότε η μηχανή $\mathcal{M}$ την απορρίπτει¨. Τέλος, ονομάζουμε μία γλώσσα L, **αναδρομική** εαν υπάρχει μηχανή $Turing$ που την αποφασίζει.*

Αυτό σημαίνει ότι μία μηχανή $Turing$ αποφασίζει μία γλώσσα L, εαν όταν ξεκινήσουμε με είσοδο w, πάντα σταματά και βρίσκεται σε μία τελική κατάσταση η οποία είναι είναι είτε η q_y εαν $w \in L$ και q_n εαν $w \notin L$. Ας σημειωθεί ότι δεν μπορούμε να εγγυηθούμε τίποτα, για το τί συμβαίνει εαν η είσοδος στη μηχανή περιέχει κενά ή το αρχικό σύμβολο $\triangleright$ (αυτός είναι και ο λόγος που τα εξαιρούμε παραπάνω).

Υπάρχει ένα λεπτό σημείο σε σχέση με τις μηχανές $Turing$ που αποφασίζουν μία γλώσσα· με τους άλλους αποδέκτες γλωσσών που υπάρχουν (ακόμα και με τους μη ντετερμινιστικούς), ένα από τα δύο μπορεί να συμβεί: Είτε η μηχανή αποδέχεται την είσοδο ή την απορρίπτει. Μία μηχανή $Turing$ από την άλλη, παρόλο που έχει δύο τελικές καταστάσεις $\{q_y, q_n\}$, πάντα έχει την επιλογή να αποφύγει μία απάντηση ¨ναι¨ ή ¨οχι¨, αποτυγχάνοντας να τερματίσει. Δηλαδή, δοσμένης μιας μηχανής $Turing$, μπορεί να μην αποφασίζει μία γλώσσα - και δεν υπάρχει προφανής τρόπος που το κάνει αυτο. Όμως υπάρχει κάποιος λόγος που έχει αυτό το ¨ελάττωμα¨ η μηχανή $Turing$, κάτι το οποίο δεν είναι στο σκοπό αυτής της εργασίας να αναλύσει.

3.1 Αναδρομικές Συναρτήσεις

Καθώς οι μηχανές $Turing$ μπορούν να γράφουν πάνω στις ταινίες τους, μπορούν να δώσουν μία συνθετότερη έξοδο εκτός από ένα απλό ¨ναι¨ ή ¨όχι¨.

Ορισμός 3.2 *Έστω $\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, s, \{h\} \rangle$ μία μηχανή $Turing$, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ ένα αλφάβητο και $w \in \Sigma_0^*$. Ας υποθέσουμε ότι η $\mathcal{M}$ τερματίζει με είσοδο w, και ότι $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (h, \triangleright\underline{\sqcup}y)$ για κάποιο $y \in \Sigma_0^*$. Τότε το y ονομάζεται **έξοδος της** $\mathcal{M}$ με είσοδο w, και συμβολίζεται με $\mathcal{M}(w)$. Ας σημειωθεί ότι η $\mathcal{M}(w)$ ορίζεται μόνο εαν η $\mathcal{M}$ τερματίζει με είσοδο w, και στην πραγματικότητα το κάνει αυτό σε ένα στιγμιότυπο της μορφής $(h, \triangleright\underline{\sqcup}y)$ για κάποιο $y \in \Sigma_0^*$.*

*Ας πάρουμε τώρα μία οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \Sigma_0^* \to \Sigma_0^*$. Λέμε ότι η $\mathcal{M}$ **υπολογίζει** την συνάρτηση f, εαν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$ ισχύει $\mathcal{M}(w) = f(w)$, το οποίο σημαίνει ότι για κάθε $w \in \Sigma_0^*$, η μηχανή $\mathcal{M}$ τελικά τερματίζει με είσοδο w, και όταν συμβαίνει να τερματίζει, το περιεχόμενο της ταινία της $\mathcal{M}$, είναι το $\triangleright \sqcup f(w)$. Η συνάρτηση f ονομάζεται **αναδρομική**, εαν υπάρχει μηχανή $Turing$ που την υπολογίζει.*

3.2 Αναδρομικώς Απαριθμήσιμες Γλώσσες

Εαν μία μηχανή $Turing$ αποφασίζει μία γλώσσα ή υπολογίζει μία συνάρτηση μπορεί να ληφθεί ότι λειτουργεί ως ένας αλγόριθμος που εκτελεί σωστά και αξιόπιστα μερικούς υπολογισμούς. Θα ορίσουμε ένα τρίτο τρόπο με τον οποίο μία μηχανή $Turing$ μπορεί να αποφασίσει μία γλώσσα:

Ορισμός 3.3 *Έστω $\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, s, H \rangle$ μία μηχανή $Turing$, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ ένα αλφάβητο και ας είναι $L \subseteq \Sigma_0^*$ μία γλώσσα. Λέμε ότι η $\mathcal{M}$ **ημιαποφασίζει** την γλώσσα L, εαν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$ το ακόλουθο είναι αληθές: $w \in L$ αν-ν η μηχανή $\mathcal{M}$ τερματίζει με είσοδο w. Μία γλώσσα L ονομάζεται **αναδρομικώς απαριθμήσιμη** αν-ν υπάρχει μία μηχανή $Turing$ $\mathcal{M}$ που ημιαποφασίζει την L.*

Παραθέτουμε επίσης για την πληρότητα του παραπάνω κειμένου δύο βασικά θεωρήματα χωρίς την αντίστοιχη απόδειξή τους καθώς δεν είναι στο σκοπό αυτής της εργασίας.

Θεώρημα 3.1 *Εαν μία συνάρτηση είναι αναδρομική, τότε είναι και αναδρομικώς απαριθμήσιμη.*

Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει καθώς υπάρχουν αναδρομικώς απαριθμήσιμες συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι αναδρομικές.

Θεώρημα 3.2 *Εαν μία γλώσσα L είναι αναδρομική τότε και το συμπλήρωμά της $\overline{L}$ είναι αναδρομική.*

4 Επεκτάσεις των Μηχανών Turing

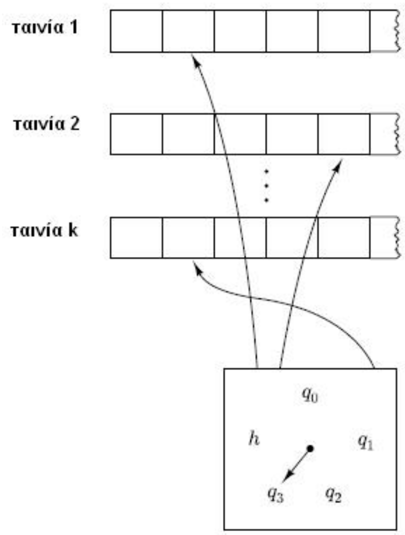
Με πολλά παραδείγματα μηχανών $Turing$ που μπορούμε να δούμε, γίνεται φανερή η δύναμη τους, μολονότι είναι αρκετά αργές και άκομψες στους υπολογισμούς τους. Για να καταλάβουμε καλύτερα την εκπληκτική τους δύναμη, θα προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε με διάφορους τρόπους, το μοντέλο των μηχανών $Turing$ που μέχρι τώρα είδαμε. Θα δούμε επίσης ότι σε κάθε περίπτωση τα επιπρόσθετα χαρακτηριστικά δεν προσθέτουν τίποτα στην κλάση των υπολογίσιμων συναρτήσεων ή αποφασίσιμων γλωσσών. Τα νέα βελτιωμένα μοντέλα μηχανών $Turing$ μπορούν σε κάθε περίπτωση να αναχθούν στο βασικό μοντέλο μηχανής $Turing$ που περιγράψαμε στην αρχή. Αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να μας βεβαιώσουν ακόμη περισσότερο ότι οι μηχανές $Turing$ είναι όντως το μεγαλύτερο υπολογιστική συσκευή, το τέλος της προόδου που κάνουμε με την κατασκευή όλο και πιο δυνατών αυτομάτων. Η αξία των βελτιωμένων αυτών μοντέλων, είναι ότι αναλόγως με το πρόβλημα, θα μπορούμε να επιλέγουμε το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε, ισοδύναμα σαν να επιλέγαμε να κατασκευάσουμε μία βασική μηχανή $Turing$.

4.1 Μηχανή Turing με πολλές ταινίες

Μπορούμε να σκεφτούμε μία μηχανή $Turing$ η οποία να περιέχει πολλές ταινίες (σχήμα 3) αντί για το βασικό μοντέλο με μία ταινία. Κάθε ταινία είναι συνδεδεμένη με το σύστημα εντολών με την έννοια ότι η κεφαλή (μία σε κάθε ταινία), μπορεί να διαβάσει και να γράψει πάνω στην ταινία. Η νέα μηχανή μπορεί σε ένα βήμα, να διαβάσει όλα τα σύμβολα που βλέπουν όλες οι κεφαλές και μετά, εξαρτώμενη από τα σύμβολα αυτά και την κατάσταση στην οποία βρίσκεταί κάθε κεφαλή, είτε μετακινεί κάποιες κεφαλές δεξιά ή αριστερά είτε σε κάποιες αλλάζει το σύμβολο το οποίο βλέπει χωρίς να αλλάξει θέση και μεταβαίνει σε καινούρια κατάσταση σε εκείνες τις ταινίες που η κεφαλή μετά από αυτό το τυπικό βήμα, μεταβαίνει σε καινούρια κατάσταση. Για δοσμένο λοιπόν ακέραιο $k \geq 1$, μία μηχανή $Turing$ με $k-$ταινίες είναι μία μηχανή $Turing$ η οποία είναι εφοδιασμένη όπως παραπάνω με k ταινίες και τις αντίστοιχες κεφαλές. Τότε η βασική μηχανή $Turing$ που εμείς εξετάζαμε μέχρι τώρα είναι μία μηχανή $Turing$ με $k-$ταινίες με $k = 1$.

Ορισμός 4.1 *Έστω $k \geq 1$ ένας ακέραιος. Μία **Μηχανή** $Turing$ **με** $k-$ **ταινίες** είναι μία $5-$άδα $\langle K, \Sigma, \delta, s, H \rangle$, όπου K, Σ, s και H, είναι τα ίδια όπως στον ορισμό της BTM και $\delta : (K - H) \times \Sigma^k \to K \times (\Sigma \cup \{-1, 1\})^k$ είναι η **συνάρτηση μετάβασης**. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε κατάσταση q και για κάθε $k-$άδα συμβόλων των ταινιών $(a_1, \ldots, a_k), \delta(q, (a_1, \ldots, a_k)) = (p, (b_1, \ldots, b_k))$, όπου p είναι όπως πριν η καινούρια κατάσταση και b_j είναι αντίστοιχα η ενέργεια που κάνει η μηχανή $\mathcal{M}$ στην j ταινία βλέποντας το σύμβολο a_j. Εαν $a_j = \triangleright$ για κάποιο $j \leq k$, τότε $b_j = +1$.*

Ο υπολογισμός γίνεται τώρα ταυτόχρονα σε όλες τις k ταινίες της μηχανής $\mathcal{M}$. Ανάλογα ένα στιγμιότυπο μιας τέτοιας μηχανής πρέπει να περιέχει πληροφορίες για όλες τις ταινίες. Έτσι:



Σχήμα 3: Μηχανή $Turing$ με k ταινίες

Ορισμός 4.2 *Έστω $\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, s, H\rangle$, μία μηχανή $Turing$ με k ταινίες. **Στιγμιότυπο** μίας μηχανής $\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, s, H\rangle$, είναι ένα στοιχείο του*

$$K \times (\triangleright\Sigma^* \times (\Sigma^*(\Sigma - \{\sqcup\})\bigcup\{e\}))^k$$

το οποίο σημαίνει ότι ένα στιγμιότυπο αναγνωρίζει την κατάσταση, το περιεχόμενο της ταινίας και την θέση της κεφαλής σε κάθε μία από τις k ταινίες.

Εαν $(q, (w_1\underline{a_1}u_1, \ldots, w_k\underline{a_k}u_k))$ είναι ένα στιγμιότυπο μιας μηχανής $Turing$ με k ταινίες και εαν $\delta(q, (a_1, \ldots, a_k)) = (p, (b_1, \ldots, b_k))$, τότε σε ένα βήμα η μηχανή μετακινείται στο στιγμιότυπο $(p, (w'_1\underline{a'_1}u'_1, \ldots, \ldots, w'_k\underline{a'_k}u'_k))$ όπου για $i = 1, \ldots, k$, τα $w'_i\underline{a'_i}u'_i$ είναι τα $w_i\underline{a_i}u_i$ στα οποία έχει εφαρμοστεί η καινούρια ενέργεια της μηχανής b_i αντίστοιχα, όπως στον ορισμό 1.3. Λέμε τότε, ότι το στιγμιότυπο $(q, (w_1\underline{a_1}u_1, \ldots, w_k\underline{a_k}u_k))$ δίνει σε ένα βήμα το στιγμιότυπο $(p, (w'_1\underline{a'_1}u'_1, \ldots, \ldots, w'_k\underline{a'_k}u'_k))$ ή ότι το $(p, (w'_1\underline{a'_1}u'_1, \ldots, \ldots, w'_k\underline{a'_k}u'_k))$ είναι το **αμέσως επόμενο στιγμιότυπο** του $(q, (w_1\underline{a_1}u_1, \ldots, w_k\underline{a_k}u_k))$.

Μία μηχανή $Turing$ με k ταινίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό μίας υπολογίσιμης συνάρτησης ή για την αποφασισιμότητα ή ημιαποφασισιμότητα μίας γλώσσας σε κάθε περίπτωση που έχουμε δει στις βασικές μηχανές $Turing$. Δεχόμαστε ότι **η είσοδος τοποθετείται στην πρώτη ταινία** με τον ίδιο τρόπο όπως σε μία βασική μηχανή $Turing$. Στις υπόλοιπες ταινίες υπάρχουν μόνο $\sqcup$ και με την κεφαλή σε όλες τις ταινίες στο αριστερότερο κελί που περιέχει το $\sqcup$. Στο τέλος ενός υπολογισμού, η μηχανή $Turing$ με k ταινίες θα έχει τυπώσει την έξοδό της στην πρώτη ταινία και το περιεχόμενο των υπολοίπων ταινιών το αγνοούμε.

Παράδειγμα 4.1 *Πολλές φορές οι πολλαπλές ταινίες διευκολύνουν την κατασκευή μηχανών $Turing$ για τον υπολογισμό κάποιων συναρτήσεων. Για παράδειγμα ας* *πάρουμε την μηχανή $Turing$ που μετατρέπει την είσοδο $\triangleright\underline{\sqcup}w\sqcup$ σε $\triangleright \sqcup w \sqcup w\underline{\sqcup}$, όπου $w \in \{a, b\}^*$. Μία μηχανή $Turing$ με 2 ταινίες θα το έκανε αυτό ως εξής:*

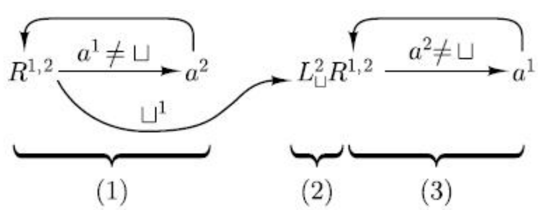
1^o Βήμα *Μετακινεί την κεφαλή και στις δύο ταινίες προς τα δεξιά, αντιγράφοντας κάθε σύμβολο της πρώτης ταινίας στη δεύτερη, μέχρι να βρεθεί το πρώτο $\sqcup$ στην πρώτη ταινία. Το πρώτο κελί της δεύτερης ταινίας πρέπει να είναι το $\sqcup$.*

2^o Βήμα *Μετακινεί την κεφαλή της δεύτερης ταινίας προς τα αριστερά, μέχρι να βρεθεί το πρώτο $\sqcup$ (την κεφαλή της πρώτης ταινίας δεν την μετακινεί).*

3^o Βήμα *Μετακινεί και πάλι τις κεφαλές και από τις δύο ταινίες προς τα δεξιά, αυτή τη φορά αντιγράφοντας τα σύμβολα από την δεύτερη ταινία, στην πρώτη. Σταματά όταν βρεθεί το πρώτο $\sqcup$ στην δεύτερη ταινία.*

Οι μηχανές $Turing$ με περισσότερες από μία ταινίες, μπορούν να αναπαρασταθούν με τον ίδιο τρόπο όπως οι μηχανές $Turing$ με μία ταινία που είχαμε δεί σε προηγούμενη παράγραφο. Απλά προσθέτουμε έναν αριθμό σε κάθε σύμβολο που παριστάνει την κάθε μηχανή, που δείχνει σε ποιά ταινία ενεργεί η μηχανή· όλες οι υπόλοιπες ταινίες μένουν ως έχουν. Για παράδειγμα το $\sqcup^2$ γράφει ένα κενό στην δεύτερη μηχανή, $L^1_\sqcup$ ψάχνει μετακινούμενη προς τα αριστερά για κενό στην πρώτη ταινία και $R^{1,2}$ μετακινεί προς τα δεξιά τις κεφαλές της πρώτης και της δεύτερης ταινίας ταυτόχρονα. Το a^1 σε ένα βέλος δείχνει την ενέργεια που πραγματοποιείται εαν το σύμβολο που σαρώνει η μηχανή εκείνη τη στιγμή στην πρώτη ταινία είναι το a κ.ο.κ. Ας σημειωθεί ότι όταν έχουμε μηχανή $Turing$ με k ταινίες, αποφεύγουμε να συμβολίζουμε με M^2 την ΜΜ όπως είχαμε αναφέρει πριν.

Κάνοντας αυτή τη σύμβαση το παραπάνω παράδειγμα σχηματικά παίρνει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 4 σημειώνοντας στο κάτω μέρος αυτού τα βήματα 1 έως 3.

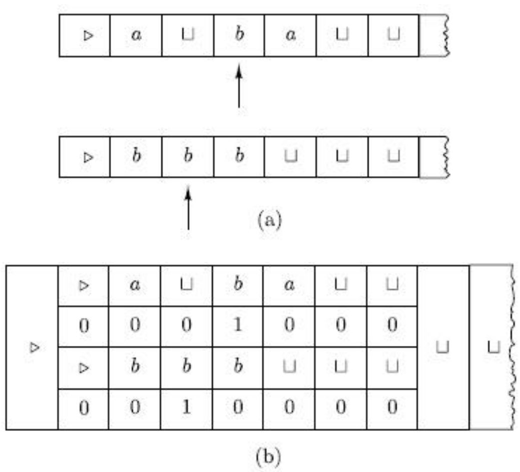


Σχήμα 4: Παράδειγμα μηχανές Turing με 2 ταινίες

Θεώρημα 4.1 *Έστω $\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, s, H\rangle$ μία μηχανή $Turing$ με k ταινίες για κάποιο $k \geq 1$. Τότε υπάρχει μία βασική μηχανή $Turing$ $\mathcal{M}' = \langle K', \Sigma', \delta', s', H\rangle$ όπου $\Sigma \subseteq \Sigma'$, έτσι ώστε το ακόλουθο να ισχύει: Για κάθε είσοδο $x \in \Sigma^*$, η μηχανή $\mathcal{M}$ τερματίζει με έξοδο y στην πρώτη ταινία αν-ν η μηχανή $\mathcal{M}'$ με είσοδο x τερματίζει στην ίδια τελική κατάσταση και με την ίδια έξοδο y στην ταινία της. Επιπλέον εαν η $\mathcal{M}$ τερματίζει με είσοδο x μετά από t βήματα, τότε η $\mathcal{M}'$ τερματίζει με είσοδο x μετά από αριθμό βημάτων ο οποίος είναι $\mathcal{O}(t \cdot (|x| + t))$.*

Απόδειξη:

Η ταινία της μηχανής $\mathcal{M}'$, πρέπει με κάποιο τρόπο να περιέχει όλες τις πληροφορίες που περιέχονται σε όλες τις ταινίες της μηχανής $\mathcal{M}$. Ένας απλός τρόπος για να το επιτύχουμε αυτό, είναι να σκεφτούμε ότι η μηχανή $\mathcal{M}'$ διαιρείται σε **λωρίδες** με κάθε μία από αυτές να κάνει, ό,τι κάνει η μηχανή $\mathcal{M}$ σε κάθε μία από τις ταινίες της (Σχήμα 4.1). Συγκεκριμένα, εκτός από το αριστερότερο κελί το οποίο περιέχει ως συνήθως το $\triangleright$ και το άπειρο τμήμα της ταινία που περιέχει κενά, η ταινία της μηχανής $\mathcal{M}'$ χωρίζεται σε $2k$ οριζόντιες λωρίδες. Οι πρώτη, τρίτη,...,$2k-1$-οστή λωρίδες της $\mathcal{M}'$ αντιστοιχούν στις πρώτη, δεύτερη,...,$k-$οστή λωρίδα της μηχανής $\mathcal{M}$ αντίστοιχα, ενώ η δεύτερη, τέταρτη,...,$2k-$οστή λωρίδες της μηχανής $\mathcal{M}'$ χρησιμοποιούνται για να καταγράφουμε την θέση της κεφαλής στις πρώτη, δεύτερη,...,$k-$οστή ταινιές της μηχανής $\mathcal{M}$ με τον ακόλουθο τρόπο: Εαν η κεφαλή στην $i-$οστή ταινία της μηχανής $\mathcal{M}$, τοποθετείται πάνω από το n-οστό κελί της ταινίας, τότε η $2i$ λωρίδα της μηχανής $\mathcal{M}'$ περιέχει ένα άσσο στο $(n+1)-$οστό κελί και μηδενικά σε όλα τα υπόλοιπα κελιά. Για παράδειγμα εαν $k=2$ τότε οι ταινίες και οι θέσεις των κεφαλών της ταινίας $\mathcal{M}$ του σχήματος $4.1(a)$, αντιστοιχούν στην ταινία της μηχανής $\mathcal{M}'$ που φαίνεται στο σχήμα $4.1(b)$.



Οπωσδήποτε η διαίρεση της μηχανής $\mathcal{M}'$ σε λωρίδες είναι λίγο αφηρημένη κατασκευή. Φορμαλιστικά παίρνουμε αυτό το αποτέλεσμα υποθέτωντας $\Sigma' = \Sigma \bigcup (\Sigma \times \{0,1\})^k$. Αυτό σημαίνει ότι το αλφάβητο της $\mathcal{M}'$ περιέχει το αλφάβητο της $\mathcal{M}$ (αυτό επιτρέπει στην μηχανή $\mathcal{M}'$ να παίρνει την ίδια είσοδο που παίρνει η $\mathcal{M}$ και να δίνει την ίδια έξοδο) και επιπλέον όλες τις $2k-$άδες της μορφής $(a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k)$ με $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma$ και $b_1, \ldots, b_k \in \{0,1\}$. Η μετάφραση από αυτών των $2k-$άδων στις $2k$ λωρίδες είναι απλή: Διαβάζουμε οποιαδήποτε από αυτές τις $2k-$άδες σαν να λένε οτι η πρώτη λωρίδα της μηχανής $\mathcal{M}'$ περιέχει a_1, η δεύτερη b_1 και συνεχίζουμε έτσι μέχρι την $2k$ λωρίδα που περιέχει το b_k. Αυτό με τη σειρά του, σημαίνει ότι το αντίστοιχο σύμβολο της $i-$οστής ταινίας της μηχανής $\mathcal{M}$ περιέχει a_i, και ότι το σύμβολο αυτό σαρώνεται από την $i-$οστή κεφαλή αν-ν $b_i = 1$ (Θυμηθείτε το σχήμα $4.1(b)$.

Όταν δοθεί μία είσοδος $w \in \Sigma^*$ τότε η μηχανή $\mathcal{M}'$ λειτουργεί ως εξής:

1. Μετακινούμε την είσοδο κατά ένα κελί προς τα δεξιά. Έπειτα επιστρέφουμε πίσω και αμέσως δεξιά του αρχικού συμβόλου $\triangleright$ και γράφουμε το σύμβολο $(\triangleright, 0, \triangleright, 0, \ldots, \triangleright, 0)$ (αυτό θα παίζει το ρόλο των αριστερών άκρων των k ταινιών)όπου το 0 και το $\triangleright$ εμφανίζονται k φορές. Μετακινούμαστε ένα κελί προς τα δεξιά και γράφουμε το σύμβολο $(\sqcup, 1, \sqcup, 1, \ldots, \sqcup, 1)$ (με αυτό τον τρόπο έχουμε μεταφέρει στη μηχανή $\mathcal{M}'$ την ιδιότητα που έχει η μηχανή $\mathcal{M}$, ότι σε κάθε ταινία αμέσως μετά το σύμβολο $\triangleright$, υπάρχει το $\sqcup$ καθώς επίσης και οτι οι όλες οι κεφαλές ξεκινούν διαβάζοντας το $\sqcup$). Μετακινούμαστε προς τα δεξιά. Σε κάθε κελί εαν συναντήσουμε ένα σύμβολο $a \neq \sqcup$ γράφουμε στη θέση του το σύμβολο $(a, 0, \sqcup, 0, \ldots, \sqcup, 0)$ και μετακινούμαστε δεξιά. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία σε κάθε κελί το οποίο περιέχει σύμβολο που δεν είναι το $\sqcup$. Εαν συναντήσουμε $\sqcup$, η πρώτη φάση έχει τελειώσει. Τώρα τα περιεχόμενα της μηχανής $\mathcal{M}'$ περιέχουν ακριβώς το αρχικό στιγμιότυπο της $\mathcal{M}$.

2. Σε αυτό το βήμα θα αντιγράψουμε την λειτουργία της μηχανής $\mathcal{M}$ μέχρι να τερματίσει (εαν τερματίζει). Για να αντιγράψουμε ένα βήμα της μηχανής $\mathcal{M}$, η μηχανή $\mathcal{M}'$ θα πρέπει να εκτελέσει τα εξής διαδοχικά βήματα [υποθέτουμε οτι ξεκινά κάθε στάδιο της αντιγραφής με την κεφαλή να σαρώνει το πρώτο ¨πραγματικό κενό¨ δηλαδή το πρώτο κελί της ταινίας το οποίο δεν έχει ακόμη υποδιαιρεθεί σε λωρίδες (δηλαδή στο κενό μετά τις εγγραφές)].

   (α΄) Αρχίζουμε τώρα την σάρωση από το ¨πραγματικό κενό¨ προς τα αριστερά, συλλέγοντας πληροφορίες για τα σύμβολα που σαρώνονται από τις k κεφαλές της μηχανής $\mathcal{M}$. Μετά από την σάρωση όλων αυτών των συμβόλων (από τους άσσους που υπάρχουν στις αντίστοιχες άρτιες λωρίδες) επιστρέφουμε στο πρώτο ¨πραγματικό κενό¨ που θα συναντήσουμε. Κατά τη διάρκεια αυτού του βήματος, δεν γράφουμε τίποτα στην ταινία της μηχανής $\mathcal{M}'$ αλλά όταν η κεφαλή έχει επιστρέψει στο δεξί τέλος, οι καταστάσεις έχουν αλλάξει ώστε οι $k-$άδες συμβόλων από το Σ να έχουν μετατραπεί σε k λωρίδες με τις θέσεις των κεφαλών σημειωμένες αντίστοιχα (με μηδενικά και άσσους).

   (β΄) Σαρώνουμε τώρα προς τα αριστερά και μετά προς τα δεξιά και ενημερώνουμε τις λωρίδες ανάλογα με τις κινήσεις της μηχανής $\mathcal{M}$. Για κάθε ζεύγος λωρίδων αυτό περιλαμβάνει είτε μετακίνηση της θέσης της κεφαλής, είτε αντικατάσταση κάποιου συμβόλου από το Σ.

3. Όταν τερματίσει η μηχανή $\mathcal{M}$, τότε στην μηχανή $\mathcal{M}'$, πρώτα μετατρέπουμε την ταινία της από λωρίδες, σε τυπική ταινία μηχανής $Turing$, χρησιμοποιώντας τα περιεχόμενα μόνο της πρώτης λωρίδας αγνοώντας τα περιεχόμενα όλων των άλλων. Μετακινούμε τότε την κεφαλή στη θέση της πρώτης κεφαλής της μηχανής $\mathcal{M}$ και η μηχανή τερματίζει στην ίδια κατάσταση που τερμάτισε και η μηχανή $\mathcal{M}$.

Για να βρούμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα αρκεί να παρατηρήσουμε τα εξής:

a. Στην πρώτη φάση έχουμε $\mathcal{O}(|x|)$ βήματα, όσο και το μήκος της εισόδου της μηχανής $\mathcal{M}$.

b. Στην δεύτερη φάση έχουμε $\mathcal{O}(t(|x|+t))$ βήματα διότι

   - Έστω ότι η μηχανή $\mathcal{M}$, με είσοδο x τερματίζει μετά από t βήματα. Για κάθε βήμα της μηχανής $\mathcal{M}$, η $\mathcal{M}'$ σαρώνει 2 φορές την ταινία.
   - Αρχικά η ταινία της $\mathcal{M}'$ έχει μήκος $|x|+2$. Σε κάθε βήμα της μηχανής $\mathcal{M}$, μεγαλώνει το πολύ κατά 1.
   - Συνεπώς μετά από t βήματα της μηχανής $\mathcal{M}$, το μήκος της $2k-$λώρίδας της μηχανής $\mathcal{M}'$, είναι το πολύ $|x|+2+t$.

✓ Συνολικά λοιπόν κάθε βήμα της μηχανής $\mathcal{M}$ μπορεί να εξομειωθεί σε $\mathcal{O}(t(|x|+t))$ βήματα όπως θέλαμε.

Πόρισμα 4.1 *Κάθε συνάρτηση η οποία είναι υπολογίσιμη ή γλώσσα η οποία είναι αποφασίσιμη ή ημιαποφασίσιμη από μία μηχανή $Turing$ με k ταινίες είναι επίσης υπολογίσιμη, αποφασίσιμη ή ημιαποφασίσιμη αντίστοιχα από μία Βασική Μηχανή $Turing$.*

4.2 Ταινία άπειρη και προς τις δύο κατευθύνσεις

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η μηχανή μας έχει μία ταινία η οποία είναι άπειρη και προς τις δύο κατευθύνσεις. Όλα τα κελιά είναι αρχικά κενά, εκτός από εκείνα που περιέχουν την είσοδο. Η κεφαλή ας πούμε ότι αρχικά βρίσκεται στα αριστερά της εισόδου. Επίσης η σύμβασή μας για το αρχικό σύμβολο $\triangleright$, θα ήταν αχρείαστη και χωρίς νόημα για μια τέτοια μηχανή.

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι όπως στις μηχανές $Turing$ με πολλές ταινίες, οι μηχανές οι οποίες έχουν την αντίστοιχη ταινία τους να είναι άπειρη και προς τις δύο κατευθύνσεις, δεν προσθέτουν κάτι ισχυρότερο στους υπολογισμούς που μπορεί να κάνει μία μηχανή $Turing$ όπως την έχουμε περιγράψει έως τώρα. Μάλιστα μία μηχανή που είναι άπειρη και προς τις δύο κατευθύνσεις, μπορεί πολύ εύκολα να προσομοιωθεί από μία μηχανή $Turing$ με 2 ταινίες ως εξής: Η μία ταινία περιέχει το κομμάτι της ταινίας που βρίσκεται δεξιότερα από το κελί που περιέχει το πρώτο σύμβολο της εισόδου, και η άλλη περιέχει το κομμάτι της ταινίας που βρίσκεται αριστερότερα και προς τα πίσω. Με τη σειρά της, αυτή η μηχανή $Turing$ με 2 ταινίες μπορεί να εξομειωθεί ως μία βασική μηχανή $Turing$. Πιο συγκεκριμένα κάτι τέτοιο θα πάρει γραμμικό χρόνο μόνο, αντί για τετραγωνικό, καθώς σε κάθε βήμα μόνο μία από τις λωρίδες είναι ενεργή. Είναι περιττό να αναφέρουμε οτι οι μηχανές με περισσότερες από μία άπειρες ταινίες και από τις δύο πλευρές μπορούν να εξομοιωθούν και πάλι από μία βασική μηχανή $Turing$.

4.3 Πολλαπλές Κεφαλές

Τί γίνεται στην περίπτωση όπου επιτρέπουμε σε μία μηχανή $Turing$ να δουλεύει σε μία ταινία αλλά με περισσότερες από μία κεφαλές ; Σε ένα βήμα, κάθε μία κεφαλή ανεξάρτητα, διαβάζει κάποιο σύμβολο και μετακινείται ή γράφει στο εκάστοτε κελί. (Πρέπει σε αυτό το σημείο να συμφωνήσουμε τί γίνεται στην περίπτωση όπου δύο κεφαλές σαρώνουν στο ίδιο βήμα το ίδιο σύμβολο. Ίσως μία καλή σύμβαση είναι να ¨νικάει¨ και να επιβάλλει την εντολή της η κεφαλή με το μεγαλύτερο νούμερο εαν θεωρήσουμε εξ'αρχής αριθμημένες τις κεφαλές. Ας θεωρήσουμε ότι οι κεφαλές δεν μπορούν να αναγνωρίσουν την παρουσία ή μη, κάποιας άλλης κεφαλής στο κελί στο οποίο βρίσκονται, εκτός βέβαια αν κάτι τέτοιο γίνει συμπτωματικά μετά από μη επιτυχείς εγγραφές).

Δεν είναι δύσκολο τότε να δούμε ότι προσομείωση όπως αυτή που πήραμε για τις μηχανές $Turing$ με k ταινίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση μηχανών $Turing$ με πολλαπλές κεφαλές και μία ταινία. Η βασική ιδέα είναι και πάλι να διαιρέσουμε την ταινία σε λωρίδες, όλες εκτός μίας, απλά θα λειτουργούν ανεξάρτητα καταγράφοντας τις θέσεις των κεφαλών. Ένα τυπικό βήμα για την μηχανή $Turing$ με πολλές κεφαλές είναι η διπλή σάρωση της ταινίας: Μία για την εύρεση των συμβόλων στις θέσεις που βρίσκονται οι κεφαλές, και ακόμη μία για να αλλάζει εκείνα τα σύμβολα ή να μετακινεί την κεφαλή όπως ορίζεται. Ο αριθμός των βημάτων που χρειάζονται είναι τετραγωνικός όπως και στο Θεώρημα 4.1.

Η χρήση πολλαπλών κεφαλών όπως επίσης και πολλαπλών ταινιών, μπορεί πολλές φορές, πολύ δραστικά να απλοποιήσει την κατασκευή μίας μηχανής $Turing$. Για παράδειγμα μία μηχανή $Turing$ με δύο κεφαλές θα έκανε το παράδειγμα 2.4 πολύ απλούστερο απ'ότι όταν είχαμε στη διάθεσή μας μήχανές $Turing$ μόνο με μία κεφαλή.

4.4 2-Διάστατες και Πολυδιάστατες Ταινίες

Άλλη μία μορφή γενίκευσης μηχανών $Turing$, είναι να επιτρέψουμε στην ταινία μας να είναι ένα 2-διάστατο πλέγμα (κάποιος θα μπορούσε να επιτρέψει ένα πλέγμα μεγαλύτερης διάστασης). Η μηχανή αυτή εξαρτώμενη από το σύμβολο το οποίο σαρώνει η κεφαλή κάθε στιγμή και την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η μηχανή μπορεί να γράφει ένα σύμβολο ή να μετακινεί την κεφαλή της ταινίας προς μία κατεύθυνση (άξονα) του πλέγματος είτε θετική είτε αρνητική. Αρχικά θεωρούμε ότι η είσοδος βρίσκεται στην κατεύθυνση ενός άξονα και η κεφαλή βρίσκεται αμέσως αριστερότερα της εισόδου στο κενό που θεωρούμε ότι υπάρχει. Αυτή η μορφή μηχανής $Turing$ θα μπορούσε να είναι σε μερικές περιπτώσεις πολύ χρησιμότερη από το βασικό μοντέλο, για να λύσουμε προβλήματα σαν τα "zigsaw puzzles" (Κεφάλαιο 5 από το [1]).

Σε κάθε βήμα, πεπερασμένου πλήθους γραμμές (σε οποιαδήποτε διάσταση) περιέχουν μη μηδενικά σύμβολα. Τότε σχηματίζουμε το ορθογώνιο γύρω από τα μη μηδενικά σύμβολα και φτιάχνουμε μία μηχανή με περισσότερες ταινίες άπειρες προς όλες τις κατευθύνσεις, που να περιέχουν τις λωρίδες του ορθογωνίου, και τότε έχουμε ανάγει την μηχανή αυτή και πάλι, σε προηγούμενη περίπτωση.

Ο αριθμός των βημάτων που χρειάζονται για να εξομοιώσουμε t βήματα της 2-διάστατης μηχανής $Turing$ με είσοδο x, με μία βασική μηχανή $Turing$ είναι και πάι πολυώνυμο των t και x.

Τα παραπάνω αποτελέσματα και οι επεκτάσεις που κάναμε στις μηχανές $Turing$ μπορούν να συνδιαστούν καθώς κάποιος μπορεί να δεί τις μηχανές $Turing$ με πολλές ταινίες, εκ των οποίων κάποιες ή όλες είναι άπειρες και προς τις δύο κατευθύνσεις και έχουν περισσότερες κεφαλές ή οτι είναι πολυδιάστατες. Είναι φανερή λοιπόν η ισοδυναμία όλων των μηχανών $Turing$ που περιγράψαμε καθώς όλη η υπολογιστική ισχύς όλων ανάγεται στην βασική μηχανή $Turing$ που περιγράψαμε στην αρχή. Συνοψίζουμε λοιπόν τα παραπάνω αποτελέσματα :

Θεώρημα 4.2 *Οποιαδήποτε αποφασίσιμη ή ημιαποφασίσιμη γλώσσα και κάθε υπολογίσιμη συνάρτηση από μία μηχανή $Turing$ με πολλές ταινίες,κεφαλές,άπειρες ταινίες και προς τις δύο κατευθύνσεις ή πολυδιάστατες ταινίες, μπορούν να αποφασιστούν, ημιαποφασιστούν ή να υπολογιστούν αντίστοιχα από μία βασική μηχανή $Turing$.*

Αναφορές

[1] H.R. Lewis - C.H. Papadimitriou, Elements of the theory of computation, Second Edition (1998) p. 179–209.

[2] J.E. Hopcroft - J.D. Ullman, Introduction to Automata Theory,Languages, and Computation (1979) p. 146–166.

[3] D. Zhu Du - K. I. Ko, Problem Solving in Automata,Languages and Complexity (2001) p. 159–223.

[4] M.Γ. Λαγουδάκης, Theory of Computation course - TUC, Online Notes, http://www.intelligence.tuc.gr/∼theory (2005)