# **ΑΛΓΕΒΡΑ** – $2^{\eta}$ σειρά ασκήσεων

Οι αριθμοί ασκήσεων και σελίδων αντιστοιχούν στο βιβλίο *Εισαγωγή στην Άλγεβρα* του J. Fraleigh (μτφ. Α. Γιαννόπουλος).

**Άσκηση 1** (7–12, σελ. 67)**.** Έστω $F$ το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $\tilde{F}$ το υποσύνολο του $F$ που αποτελείται από εκείνες τις συναρτήσεις οι οποίες παίρνουν μη μηδενική τιμή σε κάθε σημείο του $R$. Εξετάστε αν το δοθέν υποσύνολο του $F$ με την επαγόμενη πράξη είναι: (1) υποομάδα της ομάδας $F$ με την πρόσθεση, (2) υποομάδα της ομάδας $\tilde{F}$ με τον πολλαπλασιασμό.

α′. Το υποσύνολο $\tilde{F}$.

β′. Το υποσύνολο όλων των $f \in F$ για τις οποίες $f(1) = 0$.

γ′. Το υποσύνολο όλων των $f \in F$ για τις οποίες $f(1) = 1$.

δ′. Το υποσύνολο όλων των $f \in F$ για τις οποίες $f(0) = 1$.

ε′. Το υποσύνολο όλων των $f \in F$ για τις οποίες $f(0) = -1$.

ϛ′. Το υποσύνολο όλων των σταθερών συναρτήσεων στο $F$.

**Άσκηση 2** (13, σελ. 68)**.** Δίνουμε παρακάτω έναν κατάλογο ομάδων. Δώστε έναν *πλήρη* πίνακα των σχέσεων της μορφής ‘‘μια ομάδα του καταλόγου είναι υποομάδα μιας άλλης ομάδας του καταλόγου’’.

$G_1 = \mathbb{Z}$ με την πρόσθεση

$G_2 = 12\mathbb{Z}$ με την πρόσθεση

$G_3 = \mathbb{Q}^+$ με τον πολλαπλασιασμό

$G_4 = \mathbb{R}$ με την πρόσθεση

$G_5 = \mathbb{R}^+$ με τον πολλαπλασιασμό

$G_6 = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ με τον πολλαπλασιασμό

$G_7 = 3\mathbb{Z}$ με την πρόσθεση

$G_8 =$ το σύνολο όλων των ακέραιων πολλαπλάσιων του 6 με την πρόσθεση

$G_9 = \{6^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ με τον πολλαπλασιασμό

**Άσκηση 3** (15 σελ. 68)**.** Ποιές από τις παρακάτω ομάδες είναι κυκλικές; Για κάθε κυκλική ομάδα, καταγράψτε όλους τους γεννήτορες της ομάδας.

$G_1 =< \mathbb{Z}, + >$ $\quad G_2 =< \mathbb{Q}, + >$ $\quad G_3 =< \mathbb{Q}^+, \cdot >$ $\quad G_4 =< 6\mathbb{Z}, + >$

$G_5 = \{6^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ με τον πολλαπλασιασμό

$G_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ με την πρόσθεση

**Άσκηση 4** (16, 19 σελ. 68)**.** Βρείτε την τάξη της κυκλικής υποομάδας της δοθείσας ομάδας, που παράγεται από το στοιχείο που σας υποδεικνύουμε.

α′. Η υποομάδα της $\mathbb{Z}_4$ που παράγεται από το 3.

β′. Η υποομάδα της $U_5$ που παράγεται από το $\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$.