

## ΑΛΓΕΒΡΑ – 4<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων

Οι αριθμοί ασκήσεων και σελίδων αντιστοιχούν στο βιβλίο *Εισαγωγή στην Άλγεβρα* του J. Fraleigh (μτφ. Α. Γιαννόπουλος).

**Άσκηση 1** (2, 4 σελ. 94). Να βρείτε τις τροχιές της δοθείσας μετάθεσης.

$$\alpha'. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\beta'. \sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ όπου } \sigma(n) = n + 1.$$

**Άσκηση 2** (7, 9 σελ. 95). Υπολογίστε το γινόμενο των κύκλων (τους οποίους θεωρούμε μεταθέσεις του  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ).

$$\alpha'. (1, 4, 5)(7, 8)(2, 5, 7)$$

$$\beta'. (1, 2)(4, 7, 8)(2, 1)(7, 2, 8, 1, 5)$$

**Άσκηση 3** (10, 11 σελ. 95). Να εκφράσετε τις μεταθέσεις ως γινόμενο ξένων κύκλων και μετά ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.

$$\alpha'. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta'. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 4** (13 σελ. 95). Σημειώστε αν είναι σωστό ή λάθος

α'. Κάθε μετάθεση είναι κύκλος.

β'. Κάθε κύκλος είναι μετάθεση.

γ'. Κάθε μη τετριμμένη υποομάδα της  $S_9$  που περιέχει κάποια περιττή μετάθεση περιέχει και μια αντιμετάθεση.

δ'. Η  $A_5$  έχει 120 στοιχεία.

ε'. Η  $S_n$  δεν είναι κυκλική για κανένα  $n \geq 1$ .

ϛ'. Η  $A_3$  είναι αντιμεταθετική ομάδα.

ζ'. Η  $S_7$  είναι ισόμορφη με την υποομάδα όλων εκείνων των στοιχείων της  $S_8$  που αφήνουν τον αριθμό 8 σταθερό.

η'. Η  $S_7$  είναι ισόμορφη με την υποομάδα όλων εκείνων των στοιχείων της  $S_8$  που αφήνουν τον αριθμό 5 σταθερό.

θ'. Οι περιττές μεταθέσεις στην  $S_8$  αποτελούν υποομάδα της  $S_8$ .

**Άσκηση 5** (18, 23 σελ. 96). α'. Δείξτε ότι για κάθε υποομάδα  $H$  της  $S_n$  με  $n \geq 2$ , είτε όλες οι μεταθέσεις στην  $H$  είναι άρτιες είτε ακριβώς οι μισές απ' αυτές είναι άρτιες.

β'. Δείξτε ότι αν  $\sigma$  είναι ένας κύκλος περιττού μήκους, τότε  $\sigma^2$  είναι κύκλος.