Ασκήσεις Αλγεβρικής Γεωμετρίας, Φυλλάδιο 7
Εαρινό εξάμηνο του έτους 2002
Καθηγητής Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Να υπολογιστεί η πολλαπλότητα τομής της παραβολής $V(Y-X^2) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ με την ευθεία $V(Y) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ στο σημείο $P(0,0)$.
2. Ομοίως των καμπυλών $V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ και $V(Y^2 - X^3 - X^2) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ στο σημείο $P(0,0)$.
3. Ομοίως των καμπυλών $V(Y^3 - X^4) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ και $V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ επίσης στο σημείο $P(0,0)$.
4. Ομοίως να ευρεθεί η πολλαπλότητα τομής των καμπυλών $V((X^2+Y^2)^2+3X^2Y-Y^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ και $V((X^2+Y^2)^3-4X^2Y^2) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ στο $P(0,0)$.
5. Έστω P διπλό σημείο της καμπύλης $V(F) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι η $V(F) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ έχει ακριβώς μία εφαπτομένη $L = V(AX + BY + C) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ στο P.
   (α′) Να αποδείξετε ότι $I_P(F,L) \geq 3$.Θα λέμε ότι η $V(F) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ έχει κορυφή στο σημείο P όταν $I_P(F,L) = 3$.
   (β′) Υποθέτουμε ότι $P = (0,0)$ και ότι $L = V(Y)$ Να αποδείξετε ότι το P είναι κορυφή ακριβώς τότε όταν $F_{XXX}(P) \neq 0$.