Ασκήσεις Αλγεβρικής Γεωμετρίας, Φυλλάδιο 3
Εαρινό εξάμηνο του έτους 2002
Καθηγητής Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Να αποδείξετε αναλυτικά τις αντιστοιχίες του "λεξικού' των παραδόσεων.

2. Αν R δακτύλιος μονοσήμαντης ανάλυσης με σώμα πηλίκων το K και $F, G \in R[X]$ με μέγιστο κοινό διαιρέτη ένα στον $R[X]$, θα έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ένα και στον $K[X]$.

3. Έστω F και G πολυώνυμα του δακτυλίου $K[X, Y]$ χωρίς κοινούς παράγοντες. Να αποδειχθεί ότι το συνολο $V(F, G) = V(F) \cap V(G)$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων του αφινικού επιπέδου.

4. Αν F ανάγωγο πολυώνυμο του δακτυλίου $K[X, Y]$ και το αντίστοιχο αλγεβρικό σύνολο $V(F)$ είναι άπειρο, να αποδείξετε ότι $J(V(F)) = (F)$ και ότι $V(F)$ ανάγωγο.

5. Υποθέτουμε ότι το σώμα K είναι άπειρο. Να αποδείξετε ότι τα ανάγωγα υποσύνολα του αφινικού επιπέδου $\mathbb{A}^2(K)$ είναι ακριβώς τα: $\mathbb{A}^2(K)$, $\emptyset$, σημεία και ανάγωγες καμπύλες της μορφής $V(F)$, όπου F ανάγωγο πολυώνυμο του$K[X, Y]$ και $V(F)$ άπειρο σύνολο.