Ασκήσεις Αλγεβρικής Γεωμετρίας, Φυλλάδιο 4
Εαρινό εξάμηνο του έτους 2002
Καθηγητής Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Αν $I =< X^3 - X >$ ιδεώδες του $R = \mathbb{R}[X]$ να γράψετε όλα τα ιδεώδη του δακτυλίου πηλίκων R/I. Να κάνετε το ίδιο για το ιδεώδες $I =< X^3 + X >$ του $R = \mathbb{R}[X]$.

2. Αν $I =< X^2, Y^2 >$ ιδεώδες του δακτυλίου $R = \mathbb{R}[X, Y]$ να περιγράψετε τα ιδεώδη του δακτυλίου πηλίκων R/I. Είναι οι δακτύλιοι πηλίκων $\mathbb{R}[X, Y]/ < X^3, Y >$ και $\mathbb{R}[X, Y]/ < X^2, Y^2 >$ ισόμορφοι·

3. Να αποδείξετε ότι η αφινική πολλαπλότητα $V(Y - X^n, Z - X^m)$ όπου $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq 1$ είναι ισόμορφη προς την αφινική ευθεία.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε επιφάνεια του $\mathbb{A}^3(K)$ η οποία έχει εξίσωση ορισμού $X - f(Y, Z) = 0$ ή $Y - g(X, Z) = 0$ όπου f και g πολυώνυμα του $K[X, Y]$ είναι, σαν αφινική πολλαπλότητα, ισόμορφη προς το $\mathbb{A}^2(K)$.

5. Να γενικεύσετε και να αποδείξετε ανάλογη άσκηση για n μεταβλητές.

6. Να αποδείξετε ότι η αφινική πολλαπλότητα $V < Y^2 - X^3 + X >\in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ δεν είναι ισόμορφη προς την αφινική ευθεία $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$. Να εξετάσετε αν είναι αμφίρρητα ισόμορφες πολλαπλότητες.

7. Να εξετάσετε αν οι πολλαπλότητες $V(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ και $V(Z) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ είναι αμφίρρητα ισόμορφες ή όχι.