Μάθημα: Αλγεβρική Γεωμετρία
(Μεταπτυχιακό)

Θεωρούμε K ένα αλγεβρικό κλειστό σώμα

Θέμα 1^{ο} Αν $\boldsymbol{X} = V(F) \subseteq \mathbf{P}^2(K)$ προβολική καμπύλη βαθμού n η οποία έχει περισσότερα από n/2 ιδιάζοντα σημεία ευρισκόμενα επ' ευθείας $\boldsymbol{L} = V(G)$, τότε η ευθεία $\boldsymbol{L}$ είναι συνιστώσα της $\boldsymbol{X}$. *(1 μονάδα)*

Θέμα 2^{ο} Αν $\boldsymbol{X} = V(F) \subseteq \mathbf{P}^2(K)$ και $\boldsymbol{Y} = V(G) \subseteq \mathbf{P}^2(K)$ ανάγωγες προβολικές καμπύλες βαθμού n και m αντίστοιχα και $\boldsymbol{X}$ αμφίρητα ισόμορφη προς την $\boldsymbol{Y}$ τότε n = m ή {n, m} = {1, 2}. *(1 μονάδα)*

Θέμα 3^{ο}

(α) Να υπολογίσετε την πολλαπλότητα τομής των καμπυλών:

(i) $\boldsymbol{X} = V(F)$ όπου $F(X, Y) = (X^2 + Y^2)^2 - \alpha^2(X^2 - Y^2)$, $\alpha \neq 0$ και

(ii) $\boldsymbol{Y} = V(G)$ όπου $G(X, Y) = X^6 - X^4 + Y^2$,

όπου $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \subseteq \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ στο σημείο P = (0, 0). *(1 μονάδα)*

(β) Να αποδειχθεί ότι η καμπύλη $\boldsymbol{X} = V(F)$ είναι αμφίρρητα ισόμορφη προς την αφινική ευθεία $\mathbf{A}^1(\mathbf{C})$. *(1 μονάδα)*

Θέμα 4^{ο} Αν $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$ προβολικές ευθείες, $P_1, P_2, P_3 \in \boldsymbol{L}_1$, $Q_1, Q_2, Q_3 \in \boldsymbol{L}_2$ (κανένα από τα σημεία δεν είναι το $\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2$). Ονομάζουμε L_{ij} την ευθεία που συνδέει το P_i με Q_j και για {i, j, k} = {1, 2, 3} έστω $R_k := L_{ij}L_{ji}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία R_1, R_2, R_3 κείνται επ' ευθείας. *(1 μονάδα)*

Θέμα 5^{ο} (α) Ας υποθέσουμε ότι για δύο διαιρέτες D_1 και D_2 ανάγωγης προβολικής αλγεβρικής καμπύλης $\boldsymbol{X} = V(F) \subseteq \mathbf{P}^2(K)$ ισχύει $D_1 + D_2 = W$, ο κανονικός διαιρέτης της *X*. Να αποδείξετε ότι $l(D_1) - l(D_2) = \frac{1}{2}(\deg D_1 - \deg D_2)$. *(1 μονάδα)*

(β) Αν για τον διαιρέτη D της $\boldsymbol{X}$ ισχύει $\deg(D) = 2g - 2$ και $l(D) = g$, να αποδείξετε ότι ο D είναι ένας κανονικός διαιρέτης. *(1 μονάδα)*

Θέμα 6^{ο} (α) Αν $R = K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ να αποδείξετε ότι κάθε maximal ιδεώδες του είναι της μορφής $<X_1 - \alpha_1, X_2 - \alpha_2, \ldots, X_n - \alpha_n>$ όπου $\alpha_i \in K$. *(1 μονάδα)*
(β) Δώστε ένα αντιπαράδειγμα για ότι το (α) δεν ισχύει, εν γένει, όταν K όχι αλγεβρικά κλειστό. *(1 μονάδα)*

Θέμα 7^{ο} Αν K άπειρο σώμα και $V \subseteq \mathbf{A}^n(K)$ αφινική πολλαπλότητα, να αποδείξετε ότι J(V) = {0} ακριβώς τότε όταν $V = \mathbf{A}^n(K)$.
Τι γίνεται αν K πεπερασμένο; *(1 μονάδα)*

Καλή επιτυχία,
Γιάννης Α. Αντωνιάδης
Ηράκλειο, 15-6-2002