Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Εστω G μια πεπερασμένη ομάδα. Τι θα είναι μια παράσταση της G; Ακριβή ορισμό θα δώσουμε σε λίγο. Γενικά πάντως θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι ένας ομομορφισμός της G σε μία άλλη ομάδα G', η οποία θεωρείται πιο «συγκεκριμένη», δηλαδή ομάδα στην οποία μπορούμε να «λογαριάζουμε» πιο εύκολα. Η ομάδα G' μπορεί να είναι, παραδείγματος χάριν, μια ομάδα μεταθέσεων ή μια ομάδα πινάκων με συντελεστές από ένα σώμα.

Η θεωρία πρωτοαναπτύχθηκε στα τέλη του περασμένου και στις αρχές του εικοστού αιώνα κυρίως από τους Frobenius, Burnside και Schur. Στην συνέχεια σημαντική υπήρξε και η συνεισφορά της E. Noether η οποία εισήγαγε στα 1929 την έννοια του module. Κατά την περίοδο $1930 - 1950$ ακολούθησαν θεμελιώδη αποτελέσματα του R. Brauer. Αλματώδης υπήρξε η ανάπτυξή της μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο και, δεν θα ήταν υπερβολή αν κάποιος υποστήριζε ότι, σήμερα χρησιμοποιείται σε κάθε σχεδόν κλάδο των Μαθηματικών, χωρίς να αναφερθούμε στις εφαρμογές που βρίσκει και σε άλλους κλάδους των φυσικών επιστημών.

Ακολουθείται πιστά η ύλη του ομώνυμου μαθήματος που διδάσκεται στους μεταπτυχιακούς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Κρήτης. Οι γνώσεις που προϋποθέτει είναι σχεδόν όλες προπτυχιακού επιπέδου και αυτό επιτρέπει στον πρωτοετή μεταπτυχιακό, αλλά ίσως και προπτυχιακό ενδιαφερόμενο, φοιτητή μια εύκολη πρόσβαση. Στο τέλος του βιβλίου ακολουθεί παράρτημα όπου δίνονται όλοι οι αναγκαίοι ορισμοί και διατυπώνονται οι προτάσεις που χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη της ύλης του βιβλίου. Βέβαια μελετούνται και πιο σύνθετα αποτελέσματα, όπως το θεώρημα του Brauer (Brauer's theorem on induced characters), το θεώρημα των Aramata-Brauer, κ.λ.π. Σε γενικές γραμμές θα μπορούσε να πεί κανείς ότι καλύπτεται όλη σχεδόν η ύλη του I και II μέρους του βιβλίου του Serre ([Se]).

Ενας από τους σκοπούς της έκδοσης του παρόντος βιβλίου είναι να χρησιμοποιηθούν για την προετοιμασία μεταπτυχιακών φοιτητών που μετακινούνται στα διάφορα Πανεπιστήμια του ευρωπαϊκού διαπανεπιστημιακού δικτύου ERASMUS (Μαθηματικά και Θεμελιώδεις Εφαρμογές ICP-G-1010). Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τον συντονιστή του προγράμματος συνάδελφο Σπύρο Πνευματικό ο οποίος μου έκανε την τιμή να συμπεριλάβει το παρόν βιβλίο στην σειρά επιστημονικών μονογραφιών του προγράμματός του.

Θερμές επίσης ευχαριστίες χρωστώ στους μαθητές μου Θανάση Βέσση και Αριστείδη Κοντογεώργη για την ηλεκτρονική επεξεργασία του κειμένου.

Ηράκλειο 1.10.1996,

Γιάννης Α. Αντωνιάδης

Σημείωση Το παρόν βιβλίο επανεκδίδεται μέσω του προγράμματος ΕΠΕΑΕΚ «ΠΡΟΜΗΘΕΑΣ». Ο συγγραφέας επιθυμεί να εκφράσει τις θερμές του ευχαριστίες προς την επιστημονική επιτροπή αξιολόγησης και ιδιαίτερα προς τον επιστημονικό υπεύθυνο του προγράμματος, Αν. Καθηγητή κύριο Γιώργο Τζιρίτα.

Ηράκλειο, 22.12.1998

1 Κλασική θεμελίωση της θεωρίας παραστάσεων

1.1 Θεμελιώδεις έννοιες

Ορισμός 1.1 *Εστω G μια πεπερασμένη ομάδα και K ένα σώμα.*

(1) Μια (γραμμική) παράσταση της G υπέρ το K είναι ένας ομομορφισμός

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

της ομάδας G στην γενική γραμμική ομάδα $GL(V)$, ενός, πεπερασμένης διάστασης, $K-$διανυσματικού χώρου V. Ο K-διανυσματικός χώρος V θα λέγεται χώρος παράστασης της ρ και η $dim_K V$ θα λέγεται βαθμός της παράστασης ρ και θα συμβολίζεται με $deg\rho$.

(2) Μια παράσταση δια πινάκων M της G υπέρ το K είναι ένας ομομορφισμός

$$M : G \longrightarrow GL_n(K)$$

της ομάδας G στην γενική γραμμική ομάδα n-οστού βαθμού υπέρ το K, $GL_n(K)$ όπου n κάποιος φυσικός αριθμός.
Ο φυσικός αυτός αριθμός n θα λέγεται βαθμός της παράστασης δια πινάκων M.

Παρατηρήσεις :

(1) Παραστάσεις δια πινάκων και (γραμμικές) παραστάσεις με χώρο παράστασης τον K^n, είναι το ίδιο πράγμα, αν ταυτίσει κανείς την ομάδα $GL(K^n)$ με την $GL_n(K)$, μέσω του ισομορφισμού

$$\Phi_{\underline{e}} : GL(K^n) \xrightarrow{\cong} GL_n(K) \;\; (\underline{e} \text{ είναι η κανονική βάση του } K^n.)$$

(2) Για κάθε βάση $\underline{u}$ του V η δοθείσα παράσταση $\rho : G \to GL(V)$ επάγει μια παράσταση δια πινάκων της G, την

$$\rho_{\underline{u}} := \Phi_{\underline{u}} \circ \rho : G \longrightarrow GL_n(K) \;\; (n = dim_K V).$$

Η $\rho_{\underline{u}}$ θα λέγεται παράσταση δια πινάκων αντίστοιχη της παράστασης ρ ως προς την βάση $\underline{u}$.

Αν πάλι, αντίστροφα, $M : G \to GL_n(K)$ είναι μια παράσταση δια πινάκων της G και V ένας K-διανυσματικός χώρος διάστασης n, τότε, δοθείσης μιας βάσης $\underline{u}$ του V, υπάρχει (γραμμική) παράσταση $\rho_u : G \to GL(V)$ τέτοια ώστε $M = \rho_{\underline{u}} = \Phi_{\underline{u}} \circ \rho$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho_u"] \arrow[dr, "M"'] & GL(K^n) = GL(V) \arrow[d, "\Phi_u"] \\ & GL_n(K) \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό.

(3) Αν M_1 είναι μια παράσταση δια πινάκων της ρ ως προς την βάση $\underline{u}_1$ του V και M_2 επίσης μια παράσταση δια πινάκων της G ως προς την βάση $\underline{u}_2$ του V, τότε προφανώς υπάρχει $T \in GL_n(K)$ τέτοιος ώστε:

$$M_2(\sigma) = T \cdot M_1(\sigma) \cdot T^{-1}, \quad \forall \sigma \in G.$$

Ο T είναι ο πίνακας μετασχηματισμού των δύο βάσεων. Φυσιολογικός λοιπόν είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 1.2 *Εστω G πεπερασμένη ομάδα, K σώμα και V_1, V_2 δύο K-διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης.*
Δύο παραστάσεις δια πινάκων της G, $M_i : G \to GL_{n_i}(K)$ $(i = 1, 2)$ θα λέγονται <u>ισοδύναμες</u> όταν $n_1 = n_2 := n$ και υπάρχει $T \in GL_n(K)$ τέτοιος ώστε

$$M_2(\sigma) = T \cdot M_1(\sigma) \cdot T^{-1}, \qquad (\forall \sigma \in G).$$

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι σε κάθε παράσταση ρ της G αντιστοιχεί μια κλάση ισοδυνάμων παραστάσεων δια πινάκων της G.

Ορισμός 1.3 *Δύο (γραμμικές) παραστάσεις*

$$\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i) \qquad (i = 1, 2)$$

θα λέγονται ισοδύναμες ($\rho_1 \sim \rho_2$) όταν υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών χώρων

$$\varphi : V_1 \xrightarrow{\cong} V_2$$

τέτοιος ώστε

$$\rho_2(\sigma) = \varphi \circ \rho_1(\sigma) \circ \varphi^{-1} \qquad (\forall \sigma \in G),$$

δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\cong", "\varphi"'] \arrow[d, "\rho_1(\sigma)"', "\cong"] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(\sigma)"', "\cong"] \\
V_1 \arrow[r, "\cong", "\varphi"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

είναι για κάθε $\sigma \in G$ αντιμεταθετικό.

Το ότι δύο παραστάσεις ρ_1 και ρ_2 είναι ισοδύναμες, σημαίνει ότι, αν ταυτίσουμε τους V_1 και V_2 μέσω του ισομορφισμού φ, τότε οι ρ_1 και ρ_2 ταυτίζονται. Αν λοιπόν θεωρήσουμε μια βάση $\underline{u}_1$ του V_1 και $\underline{u}_2 := \varphi(\underline{u}_1)$ του V_2, τότε οι αντίστοιχες παραστάσεις δια πινάκων M_1 και M_2 της G ως προς τις βάσεις αυτές συμπίπτουν. Αυτό σημαίνει ότι οι παραστάσεις δια πινάκων που αντιστοιχούν στις (γραμμικές) παραστάσεις ρ_1 και ρ_2 ως προς την κατάλληλη (συμβιβαστή) εκλογή των βάσεων ταυτίζονται και είναι ισοδύναμες μεταξύ τους ως προς οποιαδήποτε εκλογή των βάσεων.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάποια εκλογή βάσεων $\underline{u}_1$ και $\underline{u}_2$ των V_1 και V_2 αντιστοίχως οι παραστάσεις ρ_1 και ρ_2 ορίζουν ισοδύναμες παραστάσεις δια πινάκων M_1 και M_2. Τότε με κατάλληλη εκλογή των βάσεων οι ρ_1 και ρ_2 ορίζουν ταυτοτικές παραστάσεις δια πινάκων και συνεπώς οι ρ_1 και ρ_2 είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

Επομένως: Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στις κλάσεις ισοδυνάμων παραστάσεων της G υπέρ το K και στις κλάσεις ισοδυνάμων παραστάσεων δια πινάκων της G υπέρ το K.

<u>Παραδείγματα :</u>

(1) Η <u>μοναδιαία</u> παράσταση <u>n-οστού βαθμού</u>:

$$\rho_0 : G \longrightarrow GL(V), \quad \rho_0(\sigma) = id_V \quad \forall \sigma \in G,$$

όπου $dim_K V = n$.

(1') Η μοναδιαία παράσταση του χώρου $V = \{0\}$ θα λέγεται <u>μηδενική παράσταση</u>.

(2) Παραστάσεις 1ου βαθμού είναι οι ομομορφισμοί ομάδων:

$$G \longrightarrow K^* \ \ (= GL_1(K) \cong GL(K)).$$

(3) Εστω $\rho_i : G \to GL(V_i) \ \ i = 1, 2$ παραστάσεις της ομάδας G. Η παράσταση:

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : \begin{cases} G & \longrightarrow & GL(V_1 \oplus V_2) \\ \sigma & \longmapsto & (\rho_1(\sigma), \rho_2(\sigma)) \end{cases}$$

θα λέγεται <u>ευθύ άθροισμα των ρ_1 και ρ_2</u>. Αν M_1, M_2 είναι παραστάσεις δια πινάκων της G αντίστοιχες των ρ_1, ρ_2, τότε:

$$(M_1 \oplus M_2)(\sigma) = \begin{pmatrix} M_1(\sigma) & 0 \\ 0 & M_2(\sigma) \end{pmatrix}, \quad \forall \sigma \in G.$$

Προφανώς, $deg(\rho_1 \oplus \rho_2) = deg\rho_1 + deg\rho_2$.

(4) Παραστάσεις της συμμετρικής ομάδος n-στοιχείων S_n :

Εστω V K-διανυσματικός χώρος με διάσταση $dim_K V = n$ και έστω $\underline{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ μια βάση αυτού. Κάθε $\tau \in S_n$ ορίζει έναν αυτομορφισμό του V

$$\rho(\tau) : \begin{cases} V & \longrightarrow & V \\ v_i & \longmapsto & v_{\tau(i)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

Η απεικόνιση

$$\rho : \begin{cases} S_n & \longrightarrow & GL(V) \\ \tau & \longmapsto & \rho(\tau) \end{cases}$$

είναι μονομορφισμός.

Επομένως η ρ είναι μια n-διάστατη παράσταση της S_n.

Η αντίστοιχη παράσταση δια πινάκων της ρ ως προς την βάση $\underline{v}$ είναι:

$$\rho_{\underline{v}}(\tau) =: M(\tau) = (\delta_{i,\tau(j)})_{i=1,2,\cdots,n j=1,2,\cdots,n} = (e_{\tau(1)}, e_{\tau(2)}, \cdots, e_{\tau(n)}).$$

Ο πίνακας στήλη $e_{\tau(j)}$ έχει παντού 0 εκτός της της θέσεως $\tau(j)$ όπου έχει 1. Προφανώς ο $M(\tau)$ έχει σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη ακριβώς μια θέση, διάφορη του μηδενός και μάλιστα ίση με 1. Τέτοιοι πίνακες θα λέγονται πίνακες μεταθέσεων.

(5) Παραστάσεις δια μεταθέσεων:

Μια παράσταση δια μεταθέσεων είναι εξ ορισμού ένας ομομορφισμός ομάδων

$$P : G \longrightarrow S_n$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Ο n θα λέγεται βαθμός της P.

Αν τώρα $\rho' : S_n \longrightarrow GL(V)$ παράσταση της S_n τότε, λόγω του παραδείγματος 4, μέσω κάθε παράστασης δια μεταθέσεων $P : G \to S_n$ παίρνουμε μια παράσταση της G

$$\rho = \rho' \circ P : G \xrightarrow{P} S_n \xrightarrow{\rho'} GL(V).$$

Προφανώς μια παράσταση $\rho : G \to GL(V)$ προκύπτει από κάποια παράσταση δια μεταθέσεων ανν υπάρχει κάποια βάση $\underline{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ του V τέτοια ώστε για κάθε $\sigma \in G$ να ισχύει ότι η $\rho(\sigma)$ μεταθέτει την βάση $\underline{v}$, δηλαδή

$$\rho(\sigma)(v_i) \in \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

(6) Η ομαλή (κανονική, regular) παράσταση:

Ορισμός 1.4 *Η παράσταση $\rho : G \to GL(V)$ θα λέγεται ομαλή παράσταση της G όταν υπάρχει μια ένα προς ένα απεικόνιση*

$$f : G \longrightarrow V \quad (\sigma \mapsto u_\sigma),$$

τέτοια ώστε:

(1) Το $\{u_\sigma | \sigma \in G\}$ να είναι βάση του V και

(2) $\forall \sigma, \tau \in G, \quad \rho(\sigma)(u_\tau) = u_{\sigma\tau}$.

Μία ομαλή παράσταση δια πινάκων είναι, εξ ορισμού, μια παράσταση δια πινάκων μιάς ομαλής παράστασης της G.

Ιδιότητες 1.5

(1) *Αν ρ ομαλή, τότε, προφανώς, $deg\rho = \#G = dim_K V$.*

(2) *Εστω $\rho, \rho' : G \to GL(V)$ ισοδύναμες παραστάσεις της G.*
Ισχύει

$$(\rho \quad \text{ομαλή}) \Leftrightarrow (\rho' \quad \text{ομαλή})$$

(δηλαδή η έννοια της ομαλής παράστασης είναι ιδιότητα των κλάσεων ισοδυνάμων παραστάσεων της G)

<u>Απόδειξη</u> Εστω ρ ομαλή. Αφού ρ ισοδύναμη με την ρ', υπάρχει ισομορφισμός $\varphi : V \to V'$, τέτοιος ώστε:

$$\rho'(\sigma) = \varphi \circ \rho(\sigma) \circ \varphi^{-1}, \quad \forall \sigma \in G.$$

Εστω $\{u_\sigma | \sigma \in G\}$ βάση του V, όπου

$$\rho(\sigma)(u_\tau) = u_{\sigma\tau}, \ \ \forall \sigma, \tau \in G.$$

Ορίζουμε $\varphi(u_\sigma) =: u'_\sigma$. Προφανώς, το σύνολο $\{u'_\sigma | \sigma \in G\}$ είναι βάση του V' και

$$\rho'(\sigma)(u'_\tau) = (\varphi \circ \rho(\sigma) \circ \varphi^{-1})(u'_\tau) = \varphi \circ \rho(\sigma) \circ \varphi^{-1}\varphi(u_\tau) =$$

$$= (\varphi \circ \rho(\sigma))(u_\tau) = \varphi(u_{\sigma\tau}) = u'_{\sigma\tau}.$$

Αρα η ρ' είναι ομαλή.

(3) *Σε κάθε ομάδα G κατασκευάζουμε μια ομαλή παράσταση. Εστω V ένας K-διανυσματικός χώρος με διάσταση $dim_K V = \#G$. Παίρνουμε μια ένα προς ένα απεικόνιση*

$$f : G \to V \ \ \text{με} \ \ \{u_\sigma | \sigma \in G\}$$

βάση του V (αυτό είναι πάντοτε δυνατό αφού $\#G = dim_K V$). Ορίζουμε στην συνέχεια $\rho : G \to GL(V)$ ως εξής:

$$\forall \sigma, \tau \in G \quad \rho(\sigma)(u_\tau) = u_{\sigma\tau}.$$

Τότε η ρ είναι ομαλή παράσταση της G.

Απόδειξη : Εστω $\sigma \in G$, σταθερό. Προφανώς $\rho(\sigma) : V \to V$ ομομορφισμός διανυσματικών χώρων και μάλιστα αυτομορφισμός διότι

$$\{u_{\sigma\tau} | \tau \in G\} = \{u_\tau | \tau \in G\},$$

δηλαδή $\rho(\sigma) \in GL(V), \ \forall \sigma \in G$. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\rho(\sigma\sigma') = \rho(\sigma) \circ \rho(\sigma'), \quad \forall \sigma, \sigma' \in G.$$

Πράγματι για κάθε $\sigma, \sigma' \in G$ έχουμε:

$$(\rho(\sigma) \circ \rho(\sigma'))(u_\tau) = \rho(\sigma) u_{\sigma'\tau} = u_{\sigma(\sigma'\tau)} = u_{(\sigma\sigma')\tau} = \rho(\sigma\sigma')(u_\tau).$$

(4) *Αν ρ, ρ' είναι ομαλές παραστάσεις της G υπέρ το K τότε είναι ισοδύναμες (δηλαδή υπάρχει ακριβώς μια κλάση ομαλών παραστάσεων της G).*

Απόδειξη : Αφού οι παραστάσεις:

$$\rho : G \to GL(V), \ \text{ και } \ \rho' : G \to GL(V') \ \text{ είναι ομαλές, έπεται}$$

ότι $deg\rho = deg\rho' = \#G = dim_K V = dim_K V'$. Εστω

$$\{u_\sigma | \sigma \in G\}, \quad \{u'_\sigma | \sigma \in G\},$$

οι βάσεις των V, V' αντιστοίχως που αντιστοιχούν (δες ορισμό ομαλής παράστασης) στις παραστάσεις ρ, ρ'. Ορίζουμε:

$$\varphi : \begin{cases} V & \to V' \\ u_\sigma & \mapsto u'_\sigma \end{cases}$$

και επεκτείνουμε γραμμικά σε όλα στοιχεία του V. Ο φ είναι ένας K-ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Τώρα για κάθε $\sigma \in G$, ισχύει:

$$(\varphi \circ \rho(\sigma) \circ \varphi^{-1})(u'_\tau) = (\varphi \circ \rho(\sigma))(u_\tau) = \varphi(u_{\sigma\tau}) = u'_{\sigma\tau} = \rho'(\sigma)(u'_\tau).$$

Επομένως για κάθε $\sigma \in G$, ισχύει $\rho'(\sigma) = \varphi \circ \rho(\sigma) \circ \varphi^{-1}$ δηλαδή οι παραστάσεις ρ και ρ' είναι ισοδύναμες.

(5) *Μια παράσταση $\rho : G \to GL(V)$ είναι ομαλή τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει $u \in V$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{\rho(\sigma)(u)|\sigma \in G\}$ είναι βάση του V.*

Απόδειξη : Αν η ρ είναι ομαλή, τότε έπεται ότι, υπάρχει βάση $\{u_\sigma|\sigma \in G\}$ του V τέτοια ώστε

$$\forall \sigma, \tau \in G, \quad \rho(\sigma)(u_\tau) = u_{\sigma\tau}.$$

Επομένως, για κάθε $\tau \in G$, σταθερό

$$\{u_\sigma|\sigma \in G\} = \{\rho(\sigma)(u_\tau)|\sigma \in G\}.$$

Αντίστροφα. Εστω ότι υπάρχει $u \in V$ τέτοιο ώστε $\{\rho(\sigma)(u)|\sigma \in G\}$ να είναι βάση του V. Ορίζουμε $u_\sigma := \rho(\sigma)(u)$. Εξ υποθέσεως, $\{u_\sigma|\sigma \in G\}$ είναι βάση του V και μάλιστα:

$$\rho(\sigma)(u_\tau) = \rho(\sigma)(\rho(\tau)(u)) = (\rho(\sigma) \circ \rho(\tau))(u) = \rho(\sigma\tau)(u) = u_{\sigma\tau}.$$

Αρα η ρ είναι ομαλή παράσταση.

Θα κλείσουμε την παρούσα παράγραφο με μια πιο συστηματική μελέτη των παραστάσεων δια μεταθέσεων:

Ορισμός 1.6 *Ενας $n \times n$ πίνακας M θα λέγεται πίνακας μεταθέσεων όταν έχει σε κάθε γραμμή του και σε κάθε στήλη του ακριβώς ένα 1 και σε όλες τις άλλες θέσεις 0.*

Αν S_n η συμμετρική ομάδα όλων των μεταθέσεων του $\{1, 2, \cdots, n\}$ και M ένας πίνακας μεταθέσεων, τότε υπάρχει μετάθεση $s \in S_n$ τέτοια ώστε $M = ((\delta_{i,s(j)}))_{i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,n}$. Το σύνολο όλων των πινάκων μεταθέσεων, θα το συμβολίζουμε με $Perm(n, K)$.

Αν τώρα με K_n συμβολίζουμε τον n-διάστατο K-διανυσματικό χώρο όλων των διανυσμάτων στήλη «μήκους» n με συντελεστές από το K και $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ η κανονική βάση, τότε, ορίζουμε την κανονική παράσταση της S_n :

$$\pi : \begin{cases} S_n & \longrightarrow & GL(K_n) \\ \sigma & \longmapsto & \pi(\sigma) \end{cases},$$

όπου $\pi(\sigma)(e_j) = e_{\sigma(j)}$. Η παράσταση δια πινάκων της G αντίστοιχη της π ως προς την βάση E είναι:

$$P := \varphi_E \circ \pi : S_n \longrightarrow GL_n(K).$$

Προφανώς $P(\sigma) = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n}$, διότι

$$\pi(\sigma)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} e_i.$$

Ισχύει επι πλέον: $\pi(\sigma)(e_j) = P(\sigma)(e_j)$.

Η παράσταση:

$$P : \begin{cases} S_n & \longrightarrow & GL_n(K) \\ \sigma & \longmapsto & ((\delta_{i,\sigma(j)}))_{i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n} \end{cases}$$

είναι ένα προς ένα (για $\sigma \neq \sigma'$, ισχύει $P(\sigma) \neq P(\sigma')$) και συνεπώς η $Perm(n, K)$ είναι μια υποομάδα της $GL_n(K)$ ισόμορφη προς την S_n.

Ορισμός 1.7 *Η παράσταση P λέγεται <u>παράσταση δια μεταθέσεων</u> της S_n.*

<u>Σημείωση :</u> Την παράσταση δια μεταθέσεων P μπορούμε να την ορίσουμε ως προς κάθε διανυσματικό χώρο V, διάστασης n υπέρ το K. Προς τούτο, παίρνουμε οποιαδήποτε βάση $\underline{u} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ του V και ορίζουμε

$$\pi : \begin{cases} S_n & \longrightarrow & GL(V) \\ \sigma & \longmapsto & \pi(\sigma) \end{cases}$$

όπου $\pi(\sigma)(u_j) = u_{\sigma(j)}$. Η $P = \varphi_{\underline{u}} \circ \pi$ είναι παράσταση δια μεταθέσεων της S_n.

Ορισμός 1.8 *Μια ομάδα μεταθέσεων $G \leq S_n$ λέγεται <u>μεταβατική</u> στο σύνολο M, $M \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ όταν*

$$(\text{υπάρχει ένα στοιχείο } a \in M \text{ τέτοιο ώστε } \{\sigma(a) | \sigma \in G\} = M)$$

Πρόταση 1.9 *Υποθέτουμε ότι η G είναι μεταβατική επί του M.*

(1) Αν $x, y \in M$ τότε υπάρχει $\tau \in G$ τέτοιο ώστε $\tau(x) = y$.

(2) Εστω x ένα τυχαίο στοιχείο του M. Τότε:

$$\{\sigma(x) | \sigma \in G\} = M.$$

<u>Απόδειξη :</u>

(1) Εξ ορισμού υπάρχει $\sigma \in G$ τέτοιο ώστε $\sigma(a) = x$ και υπάρχει $\sigma' \in G$ τέτοιο ώστε $\sigma'(a) = y$. Επομένως $\sigma'\sigma^{-1}(x) = y$. Ορίζουμε $\tau = \sigma'\sigma^{-1}$.

(2) Για κάθε σ της G, για $x \in M$, έχουμε:

$$\sigma(x) = \sigma(\tau(a)) = (\sigma\tau)(a) \in M.$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, ας πάρουμε $y \in M$. Τότε υπάρχει, λόγω της (1), $\sigma \in G$ τέτοιο ώστε $\sigma(x) = y$.

Πρόταση 1.10 *Εστω G πεπερασμένη ομάδα τάξης n. Εστω $\rho : G \to S_n$ ομομορφισμός ομάδων. Εστω ότι η $\rho(G) \subseteq S_n$ είναι μεταβατική στο σύνολο $\{1, 2, \cdots, n\}$. Τότε η*

$$\pi \circ \rho : G \to GL(K_n),$$

είναι ομαλή παράσταση της G και η $P \circ \rho : G \to GL_n(K)$ ομαλή παράσταση δια πινάκων της G.

Απόδειξη :

(1) Ισχύει:

$$A := \{(\pi \circ \rho)(\sigma)(e_1) | \sigma \in G\} = \{e_{\rho(\sigma)(1)} | \sigma \in G\}$$

Επειδή όμως η $\rho(G)$ είναι μεταβατική στο σύνολο $\{1, 2, \cdots, n\}$ έχουμε $A = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Επομένως η παράσταση είναι ομαλή λόγω της ιδιότητας 5 (σελίδα 7).

(2) Αμεση συνέπεια του (1).

Παρατήρηση : Για να κατασκευάσουμε ομαλή παράσταση της G θα πρέπει να κατασκευάσουμε έναν ομομορφισμό της G στην S_n ο οποίος να έχει τις ιδιότητες της πρότασης 1.10. Την ύπαρξη αυτού του ομομορφισμού μας την εξασφαλίζει το θεώρημα του Cayley (δες παράρτημα, σελ. 151).

1.2 Αναγωγισιμότητα, θεώρημα του Maschke

Στην παρούσα παράγραφο G θα είναι μια πεπερασμένη ομάδα, K ένας σώμα και V ένας K-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 1.11 *Εστω $\rho : G \to GL(V)$ μια παράσταση της G. Ενας υπόχωρος $W \subset V$ θα λέγεται ρ-αναλλοίωτος (ή G-αναλλοίωτος ως προς την ρ) όταν:*

$$[\forall \sigma \in G, \quad \rho(\sigma)(W) \subset W],$$

(δηλαδή όταν ο ισομορφισμός $rest_W \rho(\sigma)$ είναι αυτομορφισμός του W).

Αν λοιπόν ορίσουμε:

$$\rho_1 : \begin{cases} G & \longrightarrow \quad GL(W) \\ \sigma & \longmapsto \quad \rho_1(\sigma) := rest_W \rho(\sigma) \end{cases}$$

τότε προφανώς η ρ_1 είναι παράσταση της G στον W.
Η ρ_1 θα λέγεται η στον W αντιστοιχούσα υποπαράσταση της ρ (και ο W ο αντίστοιχος χώρος παράστασης της ρ_1). Αν η ρ_1 είναι υποπαράσταση της r τότε θα λέμε ότι η ρ_1 περιέχεται στην ρ και θα γράφουμε $\rho_1 \subset \rho$.

Κάθε παράσταση ρ έχει μια τετριμμένη υποπαράσταση, την μηδενική:

$$\rho_0(\sigma)(W) \subseteq W, \quad \forall \sigma \in G, \quad \text{όπου} \quad W = \{0\}.$$

Μια υποπαράσταση ρ_1 της ρ θα λέγεται γνήσια όταν $\rho_1 \neq \rho$ και $\rho_1 \neq \rho_0$. Η ρ θα λέγεται ανάγωγη όταν δεν έχει γνήσια υποπαράσταση.

Παράδειγμα : Κάθε παράσταση ρ της G διάστασης $deg\rho = 1$ είναι ανάγωγη, αφού οι μόνοι υποχώροι ενός διανυσματικού χώρου V διάστασης 1 είναι ο V και ο $\{0\}$.

Θεώρημα 1.12 *Εστω $\rho : G \to GL(V)$ μια ομαλή παράσταση της G. Η ρ περιέχει μια μοναδιαία παράσταση πρώτου βαθμού σαν υποπαράσταση.*

Απόδειξη : Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $W \subset V$ με

$$dimW = 1 \ \text{ και } \ \forall \sigma \in G, \ \ rest_W \rho(\sigma) = id_W.$$

Αφού, εξ υποθέσεως, η ρ είναι ομαλή, λόγω της ιδιότητας 1.5(5) έχουμε ότι υπάρχει $u \in V$ τέτοιο ώστε $\{\rho(t)(u) | t \in G\}$ είναι βάση του V. Επομένως το $w := \sum_{t \in G} \rho(t)(u) \neq 0$. Εστω $W :=< w >= Kw \subset V$, $dim_K W = 1$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι για κάθε $\sigma \in G$, $\rho(\sigma)(w) = w$. Πράγματι,

$$\forall \sigma \in G, \quad \rho(\sigma)(w) = \sum_{t \in G} \rho(\sigma) \cdot \rho(t)(u) \neq \sum_{t \in G} \rho(\sigma t)(u) = \sum_{t' \in G} \rho(t')(u) = w.$$

Θεώρημα 1.13 *Εστω $\rho : G \to GL(V)$ και $\rho' : G \to GL(V')$ δύο ισοδύναμες παραστάσεις της G. Εστω ρ_1 υποπαράσταση της ρ. Τότε υπάρχει υποπαράσταση ρ_1' της ρ', τέτοια ώστε οι ρ_1' και ρ_1 να είναι ισοδύναμες. Ακόμη ισχύει ότι η ρ_1' είναι γνήσια τότε και μόνον τότε όταν η ρ_1 είναι γνήσια.*

Απόδειξη : Εξ υποθέσεως, υπάρχει ισομορφισμός K-διανυσματικών χώρων $\varphi : V \to V'$ τέτοιος ώστε:

$$\forall \sigma \in G, \quad \rho'(\sigma) = \varphi \circ \rho(\sigma) \circ \varphi^{-1}.$$

Ορίζουμε την ρ_1' έτσι ώστε:

$$\forall \sigma \in G, \quad \rho_1'(\sigma) = \varphi_0 \circ \rho_1(\sigma) \circ \varphi_0^{-1} \text{ όπου } \varphi_0 = rest_W \varphi$$

και $W \subset V$ ο υπόχωρος παράστασης της ρ_1. Ο $W' := \varphi(W)$ είναι υπόχωρος του V' και $\rho_1'(\sigma) \in GL(W')$. Τέλος

$$\rho_1'(\sigma)(W') = \varphi_0 \circ \rho_1(\sigma) \circ \varphi_0^{-1}(W') = \varphi_0 \circ \rho_1(\sigma)(W) \subseteq \varphi_0(W) = W',$$

δηλαδή η ρ_1' είναι υποπαράσταση της ρ' και μάλιστα ισοδύναμη με την ρ_1. Τέλος η ρ_1' είναι τετριμμένη ακριβώς τότε όταν η ρ_1 είναι τετριμμένη.

Αμεση συνέπεια του τελευταίου θεωρήματος είναι το:

Θεώρημα 1.14 *Αν οι παραστάσεις $\rho : G \to GL(V)$, $\rho' : G \to GL(V')$ της G είναι ισοδύναμες, τότε η ρ είναι ανάγωγη ακριβώς τότε όταν η ρ' είναι ανάγωγη. Δηλαδή η αναγωγισιμότητα είναι ιδιότητα (κάποιων) κλάσεων ισοδυνάμων παραστάσεων.*

Θεώρημα 1.15 *Εστω $\rho : G \to GL(V)$ παράσταση της G με $deg\rho = n$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.*

(1) Η ρ είναι μη-ανάγωγη.

(2) Υπάρχουν παραστάσεις δια πινάκων $M_1 : G \to GL_{n_1}(K)$ και $M_2 : G \to GL_{n_2}(K)$ και μια παράσταση δια πινάκων της G αντίστοιχη της ρ $\quad M_\rho : G \to GL_n(K)$, τέτοια ώστε:

$$\forall \sigma \in G, \quad M_\rho(\sigma) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} M_1(\sigma) & * \\ 0 & M_2(\sigma) \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}n_1 \\ \}n_2 \end{array} \end{array} .$$

(3) Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 < n$ και μια παράσταση δια πινάκων της G αντίστοιχη της ρ, $M_\rho : G \to GL_n(V)$ τέτοια ώστε:

$$\forall \sigma \in G, \quad M_\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}n_1 \\ \}n_2 = n - n_1 \end{array}$$

<u>Απόδειξη :</u> «(1) $\Rightarrow$ (2)»

Αν ρ μη-ανάγωγη παράσταση της G, τότε υπάρχει μια γνήσια υποπαράσταση ρ_1 της ρ, $\rho_1 \subset \rho$. Εστω W_1 ο χώρος παράστασης της ρ_1, $B_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_{n_1}\}$ μια βάση του W_1 και

$$M_1 := \Phi_{B_1} \circ \rho_1 : G \longrightarrow GL_{n_1}(K).$$

Επεκτείνουμε την B_1 σε βάση του V, έστω $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ και έστω

$$M_\rho := \Phi_B \circ \rho : G \longrightarrow GL_n(K)$$

η παράσταση δια πινάκων της G που είναι αντίστοιχη της ρ ως προς την βάση B. Εστω $M_\rho(\sigma) = ((a_{ij}))_{i,j=1,2,\cdots,n}$. Επομένως $\rho(\sigma)(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$. Επειδή

$$\rho(\sigma)(W_1) = W_1 \ \text{ και } \ rest_{W_1}\rho(\sigma) = \rho_1(\sigma),$$

έχουμε ότι για κάθε $j \leq n_1$, ισχύει:

$$\rho(\sigma)(u_j) = \rho_0(\sigma)(u_j) = \sum_{i=1}^{n_1} a_{ij} u_i,$$

δηλαδή $a_{ij} = 0$, αν $j \leq n_1$ και $i > n_1$. Τώρα $M_1(\sigma) = ((a_{ij}))_{i,j=1,2,\cdots,n_1}$, οπότε:

$$M_\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} M_1(\sigma) & * \\ 0 & A(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Επειδή $M_\rho(\sigma)$ μη-ιδιάζων $n \times n$ πίνακας, συνεπάγεται ότι ο $A(\sigma)$ είναι μη-ιδιάζων $n_2 \times n_2$ πίνακας, όπου $n_2 = n - n_1$. Θα πρέπει ακόμη να αποδείξουμε ότι η

$$A : \begin{cases} G & \longrightarrow & GL_{n_2}(K) \\ \sigma & \longmapsto & A(\sigma) \end{cases}$$

είναι παράσταση δια πινάκων, δηλαδή ότι, $A(\sigma\tau) = A(\sigma)A(\tau)$ για κάθε $\sigma, \tau \in G$. Πράγματι

$$M_\rho(\sigma\tau) = \begin{pmatrix} M_0(\sigma\tau) & * \\ 0 & A(\sigma\tau) \end{pmatrix} = M_\rho(\sigma) M_\rho(\tau) =$$

$$= \begin{pmatrix} M_1(\sigma) & * \\ 0 & A(\sigma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_1(\tau) & * \\ 0 & A(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1(\sigma\tau) & * \\ 0 & A(\sigma)A(\tau) \end{pmatrix}$$

το οποίο μας αποδεικνύει το ζητούμενο.

«$(2) \Rightarrow (3)$» Προφανής.

«$(3) \Rightarrow (1)$»

Υποθέτουμε ότι η M_ρ έχει την μορφή που δίνεται στην (3). Εστω $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ βάση του V τέτοια ώστε $M_\rho = \Phi_B \circ \rho$. Εστω $W_1 =< u_1, u_2, \cdots, u_{n_1} >< V$, $W_1 \neq V$. Λόγω της υπόθεσης της μορφής του πίνακα ισχύει:

$$(\forall \sigma \in G, \quad \rho(\sigma)(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i)$$

και $a_{ij} = 0$ για $j \leq n_1$ και $i > n_1$. Επομένως για κάθε $\sigma \in G$, $\rho(\sigma)(W_1) \subset W_1$. Συνεπώς ο W_1 είναι ρ-αναλλοίωτος, δηλαδή ισχύει η (1).

Ορισμός 1.16 *Εστω $\rho : G \to GL(V)$ παράσταση της G, $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_r$ υποπαραστάσεις της G οι οποίες έχουν τους υπόχωρους του V, $W_1, W_2, \cdots, W_r$ σαν αντίστοιχους χώρους παραστάσεων. Αν $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$, τότε θα λέμε ότι η ρ είναι το <u>ευθύ άθροισμα</u> των $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_r$ και θα το συμβολίζουμε ως εξής:*

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_r.$$

Θεώρημα 1.17 *Εστω $\rho : G \to GL(V)$ παράσταση της G και έστω $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_r$. Εστω τέλος M_i παραστάσεις δια πινάκων της G αντίστοιχες των ρ_i. Αν για κάθε $\sigma \in G$, ορίσουμε:*

$$M(\sigma) := diag(M_1(\sigma), M_2(\sigma), \cdots, M_r(\sigma)),$$

τότε η M είναι μια παράσταση δια πινάκων της ρ.

<u>Απόδειξη :</u> Εστω W_i χώροι παράστασης των ρ_i. Εξ υποθέσεως ισχύει:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r.$$

Εστω B_i βάσεις των διανυσματικών χώρων W_i μέσω των οποίων μας δίνονται οι M_i. Προφανώς η ένωση $B = \cup_i B_i$ είναι βάση του V. Ακόμη ισχύει $M = \Phi_B \circ \rho$, διότι για κάθε $u_j^{(i)} \in B_i$, ισχύει:

$$\rho(\sigma)(u_j^{(i)}) = \rho_i(\sigma)(u_j^{(i)}).$$

Ισχύει και το αντίστροφο:

Θεώρημα 1.18 *Εστω $\rho : G \to GL(V)$ παράσταση της G. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $n_1, n_2, \cdots, n_r \in \mathbb{N}$ και μια παράσταση δια πινάκων της G M, αντίστοιχη της ρ, τέτοια ώστε:*

$$\forall \sigma \in G, \quad M(\sigma) = diag(A_1(\sigma), A_2(\sigma), \cdots, A_r(\sigma))$$

με $A_i(\sigma) \in GL_{n_i}(K)$. Τότε ισχύουν:

(1) $M_i : \begin{cases} G & \to GL_{n_i}(K) \\ \sigma & \mapsto A_i(\sigma) \end{cases}$ είναι πίνακας παραστάσεων δια πινάκων της G για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$.

(2) Η ρ αναλύεται στην μορφή $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_r$, όπου ρ_i παραστάσεις της G με αντίστοιχες παραστάσεις δια πινάκων τις M_i.

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

Ορισμός 1.19 *Εστω $\rho : G \to GL(V)$ παράσταση της G και ρ_0 υποπαράσταση της ρ. Η ρ_0 θα λέγεται <u>ευθύς</u> <u>προσθεταίος</u> της ρ όταν υπάρχει $\rho_1 \subset \rho$ τέτοια ώστε $\rho = \rho_0 \oplus \rho_1$.*
Η ρ_0 θα λέγεται <u>πλήρως αναλύσιμη</u> όταν <u>κάθε</u> $\rho_0 \subset \rho$ είναι <u>ευθύς προσθεταίος</u> της ρ.

<u>Σημείωση :</u> Προφανώς κάθε ανάγωγη παράσταση είναι πλήρως αναλύσιμη.

Θεώρημα 1.20 *Αν $\rho : G \to GL(V)$ είναι πλήρως αναλύσιμη παράσταση της G, τότε:*

(1) Κάθε $\rho_0 \subset \rho$ είναι επίσης πλήρως αναλύσιμη.

(2) Η ρ έχει μια ανάλυση της μορφής: $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_r$ όπου οι ρ_i είναι ανάγωγες παραστάσεις για κάθε $i = 1, 2, \cdots, r$.

<u>Απόδειξη :</u>

(1) Εστω $\rho_0 \subset \rho$ και $W_0 \subset V$ ο αντίστοιχος χώρος παράστασης της ρ. Εστω τώρα $\rho_1 \subset \rho_0$ υποπαράσταση της ρ_0. Αρκεί να δείξουμε ότι η ρ_1 είναι ευθύς προσθεταίος της ρ_0.

Εστω $W_1 \subset W_0$ ο χώρος παράστασης της ρ_1. Επειδή $\rho_1 \subset \rho$ και ρ πλήρως αναλύσιμη, συνεπάγεται ότι $\rho = \rho_1 \oplus \rho_1'$, όπου $\rho_1' \subset \rho$. Αρα υπάρχει $W_1' \subset V$ ο οποίος είναι ρ-αναλλοίωτος τέτοιος ώστε $V = W_1 \oplus W_1'$. Προφανώς

$$W_0 = W_0 \cap V = (W_0 \cap W_1) \oplus (W_0 \cap W_1') = W_1 \oplus (W_0 \cap W_1').$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι ο $W_1' \cap W_0$ είναι ρ_0-αναλλοίωτος.

Οι W_1' και W_0 είναι ρ-αναλλοίωτοι, δηλαδή:

$$\rho(\sigma)(W_1' \cap W_0) \subseteq W_1' \cap W_0, \quad \forall \sigma \in G.$$

Αλλά

$$\rho(\sigma)(W_1' \cap W_0) = rest_{(W_1' \cap W_0)}\rho = rest_{(W_1' \cap W_0)}\rho_0$$

δηλαδή ο $W_0 \cap W_1'$ είναι ρ_0-αναλλοίωτος.

(2) Επαγωγικά ως προς τον βαθμό της παράστασης ρ.

Αν n είναι 0 ή 1, τότε δεν χρειάζεται να αποδείξουμε τίποτα. Εστω $n > 1$ και έστω ότι το θεώρημα ισχύει για <u>κάθε</u> φυσικό n', $n' < n$.

Περίπτωση 1 : Εστω ότι η ρ είναι ανάγωγη. Τότε το θεώρημα ισχύει, για $r = 1$.

Περίπτωση 2 : Εστω ότι η ρ είναι μη-ανάγωγη. Τότε υπάρχει <u>γνήσια</u> υποπαράσταση $\rho_1 \subset \rho$. Σύμφωνα με την υπόθεση του θεωρήματος

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_1', \quad \text{με} \quad deg\rho_1, deg\rho_1' < deg\rho.$$

Λόγω της υπόθεσης της μαθηματικής επαγωγής ισχύει:

$$\rho_0 = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_{r_0} \quad \text{και} \quad \rho_0' = \rho_{r_0+1} \oplus \cdots \oplus \rho_r$$

όπου ρ_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$ ανάγωγες. Επομένως $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$.

Στόχος της παρούσης παραγράφου είναι η απόδειξη του

Θεώρημα 1.21 *(* **Maschke** *) (1ο κύριο θεώρημα του Κεφαλαίου)*
Εστω G πεπερασμένη ομάδα τάξης g. Υποθέτουμε ότι η χαρακτηριστική του σώματος K δεν διαιρεί το g. Τότε κάθε παράσταση της G υπέρ το K είναι πλήρως αναλύσιμη και (σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα) ευθύ άθροισμα αναγώγων υποπαραστάσεων.

Απόδειξη : Εστω V K-διανυσματικός χώρος, $\rho : G \to GL(V)$ παράσταση της G. Εστω $\rho_0 \subset \rho$ και W ένας χώρος παράστασης της ρ_0. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\rho_1 \subset \rho$ τέτοια ώστε $\rho = \rho_0 \oplus \rho_1$, δηλαδή ότι υπάρχει ρ-αναλλοίωτος χώρος $W_1 \subset V$ τέτοιος ώστε $V = W \oplus W_1$. Από την Γραμμική Αλγεβρα, είναι γνωστό ότι υπάρχει $W' \subset V$ (όχι μονοσήμαντα ορισμένος) τέτοιος ώστε $V = W \oplus W'$. Εστω

$$p : \begin{cases} V & \longrightarrow \quad W \\ v = w + w' & \longmapsto \quad w \end{cases} \quad \text{μια προβολή του } V \text{ στον } W.$$

Προφανώς η p είναι επιμορφισμός διανυσματικών χώρων με $kerp = W'$ και $rest_W p = id_W$. Ψάχνουμε να βρούμε μια προβολή p_1 του V στον W με πυρήνα ένα ρ-αναλλοίωτο συμπλήρωμα του W. Θα αποδείξουμε ότι ο K-ενδομορφισμός του V:

$$p_1 := \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho(t)\cdot p\cdot \rho(t^{-1}) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho(t)\cdot p\cdot \rho(t)^{-1}$$

έχει αυτή την ιδιότητα (ο p_1 ορίζεται διότι η χαρακτηριστική του σώματος K δεν διαιρεί το g). Κατ' αρχήν $\forall v \in V$ ισχύει

$$p_1(v) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho(t)\cdot p\cdot \rho(t^{-1})(v) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho(t)\cdot p(v_1) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho(t)(w_1) \subset W,$$

διότι ο W είναι ρ-αναλλοίωτος. Επομένως $p_1(V) \subseteq W$ (1).
Θα αποδείξουμε ότι $rest_W p_1 = id_W$ (2).

Πράγματι, έστω $w \in W$. Αφού ο W είναι ρ-αναλλοίωτος, έχουμε ότι $\rho(t^{-1})(w) \in W$, δηλαδή $p\cdot\rho(t^{-1})(w) = \rho(t^{-1})(w)$, οπότε:

$$p_1(w) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho(t)\cdot p\cdot \rho(t^{-1})(w) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho(t)\cdot \rho(t^{-1})(w) = \frac{1}{g} gw = w.$$

Προφανώς η (2) συνεπάγεται ότι $\rho_1(V) = W$. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο
($W_1 := kerp_1$ είναι ρ-αναλοίωτος) (3).

Εστω $w_1 \in W_1$ και $\sigma \in G$. Αρκει να δείξουμε ότι $\rho(\sigma)(w_1) \in W_1$, δηλαδή ότι $p_1(\rho(\sigma)(w_1)) = 0$. Εχουμε

$$p_1(\rho(\sigma)(w_1)) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho(t)\cdot p\cdot \rho(t^{-1})(\rho(\sigma(w_1))) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho(t)\dot{p}\cdot \rho(t^{-1}\sigma)(w_1)$$

Θέτουμε $t_1 := \sigma^{-1}t$, δηλαδή $t = \sigma t_1$. Επομένως:

$$p_1(\rho(\sigma)(w_1)) = \frac{1}{g}\sum_{t_1\in G} \rho(\sigma t_1)\cdot p\cdot \rho(t_1^{-1})(w_1) =$$

$$= \rho(\sigma) \cdot \frac{1}{g} \sum_{t_1 \in G} \rho(t_1) \cdot p \cdot \rho(t_1^{-1})(w_1) = \rho(\sigma)(p_1(w_1)) = 0,$$

διότι $w_1 \in kerp_1$, οπότε $\rho(\sigma)(w_1) \in kerp_1 = W_1$.

Τέλος θα αποδείξουμε ότι ο W_1 είναι ένα ορθογώνιο συμπλήρωμα του W. Αν $v \in V$, το γράφουμε στην μορφή $v = p_1(v) + v - p_1(v)$. Ισχύει $p_1(v) \in W$ (δες (1)) και $v - p_1(v) \in W_1 := kerp_1$, διότι $p_1(v - p_1(v)) = p_1(v) - p_1(v) = 0$. Επομένως $V = W + W_1$.

Αν $v \in W \cap W_1$, τότε $v \in W$ οπότε (δες (2)) $p_1(v) = v$ και $v \in W_1$ οπότε $p_1(v) = 0$, δηλαδή $v = 0$. Επομένως έχουμε αποδείξει ότι: $V = W \oplus W_1$ και W_1 είναι ρ-αναλλοίωτος, δηλαδή το θεώρημα.

Παρατήρηση 1 : Η παράσταση $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.
Αντιπαράδειγμα: Εστω ότι $dimV = r > 1$ και $\rho : G \to GL(V)$ η μοναδιαία παράσταση του V. Αν $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ είναι μια βάση του V, τότε $V = Ku_1 \oplus Ku_2 \oplus \cdots \oplus Ku_r$ και για κάθε $\sigma \in G$, $\rho(\sigma)(u_i) = u_i$, δηλαδή οι μονοδιάστατοι υπόχωροι Ku_i είναι ρ-αναλλοίωτοι. Επομένως,

$$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r \quad \text{με} \quad \rho_i : G \to GL(Ku_i) = GL(W_i), \;\; W_i = Ku_i.$$

Οι παραστάσεις ρ_i είναι ανάγωγες, αφού είναι μονοδιάστατες. Ανάλογα για κάθε άλλη βάση $\{u'_1, u'_2, \cdots, u'_n\}$ του V θα έχουμε $\rho = \rho'_1 \oplus \rho'_2 \oplus \cdots \oplus \rho'_r$ όπου ρ'_i ανάγωγες (μονοδιάστατες) παραστάσεις $\rho_i : G \to GL(Ku'_i)$. Επομένως σε διαφορετικές βάσεις του V αντιστοιχούν και διαφορετικές αναλύσεις της ρ.

Ισχύει όμως κατά κάποιο τρόπο το μονοσήμαντο της παράστασης και αυτό μας δίνεται από το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.22 (**Krull-Schmidt**) *Εστω $\rho : G \to GL(V)$ μια παράσταση της G υπέρ το σώμα K. Αν $\rho = \oplus_{i=1}^{r} \rho_i = \oplus_{i=1}^{r'} \rho'_i$, δύο αναλύσεις της ρ σε ευθύ άθροισμα αναγώγων παραστάσεων, τότε $r = r'$ και (αλλάζοντας ίσως την σειρά της αρίθμησης) η ρ_i είναι ισοδύναμη με την ρ'_i, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, r$.*

Απόδειξη: (δες [VING], th. 4, σελ. 33)

Παρατήρηση 2 : Το θεώρημα του Maschke δεν ισχύει όταν η χαρακτηριστική του σώματος K διαιρεί το g.

Αντιπαράδειγμα: Εστω ότι $char(K) = p > 0$, G κυκλική ομάδα τάξης p και σ ένας γεννήτορας αυτής. Εστω

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(K).$$

Η απεικόνιση:

$$M : \begin{cases} G & \longrightarrow \quad GL_2(K) \\ \sigma^\nu & \longmapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S^\nu \end{cases}$$

είναι μια παράσταση δια πινάκων της G υπέρ το K. Η M είναι μη-ανάγωγη διότι

$$M(\sigma^\nu) = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δεν υπάρχει όμως καμμία παράσταση M' της G ισοδύναμη προς την M, της μορφής:

$$M'(\sigma^\nu) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

διότι, ϑα έπρεπε για την M' να ισχύει:

$$M'(\sigma^\nu) = M'(\sigma)^\nu = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}^\nu = \begin{pmatrix} \xi_1^\nu & 0 \\ 0 & \xi_2^\nu \end{pmatrix} \quad \text{και}$$

$$M'(\sigma^\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \nu \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow (\xi_1^\nu = 1 \;\text{ και }\; \xi_2^\nu = 1).$$

Για $\nu = p$ έχουμε: $\xi_i^p = 1 \;\; (i = 1, 2)$ οπότε $(\xi_i - 1)^p = 0$, δηλαδή $\xi_i = 1$. Επομένως ϑα ήταν

$$M'(\sigma^\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \qquad \text{άτοπο.}$$

1.3 Ο χαρακτήρας μιας παράστασης και το λήμμα του Schur

Εστω K σώμα, V ένας K-διανυσματικός χώρος με $dimV = n$ και $f \in End_K(V)$. Αν διαλέξουμε μια βάση του V τότε ο f δίνεται, ως προς την βάση αυτή, από έναν πίνακα $A = ((a_{ij}))$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f, ορίζεται:

$$\varphi(\mathrm{X}) := det(I_n\mathrm{X} - A) = det\begin{pmatrix} \mathrm{X} - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \mathrm{X} - a_{nn} \end{pmatrix}$$

(I_n ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας).

Το $\varphi(\mathrm{X})$ είναι καλά ορισμένο,

$$det(I_n\mathrm{X} - T^{-1}AT) = det(T^{-1}(I_n\mathrm{X} - A)T) = det(I_n\mathrm{X} - A),$$

και γράφεται:

$$\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - tr(A)\mathrm{X}^{n-1} + \cdots,$$

όπου το $tr(A)$ είναι το <u>ίχνος</u> του A και δίνεται από την $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Ορίζουμε $tr(f) := tr(A)$. Εχει τις εξής ιδιότητες:

(1) $tr(f_1 + f_2) = tr(f_1) + tr(f_2)$.

(2) $tr(f_1^{-1}f_2f_1) = tr(f_2)$.

(3) $tr(f_1f_2) = tr(f_2f_1)$.

(4) $tr(\lambda f_1) = \lambda tr(f_1), \quad \lambda \in K$.

(5) $tr(Id_n) = n$.

Ορισμός 1.23 *Εστω G μια πεπερασμένη ομάδα, $\rho : G \to GL(V)$ μια παράσταση της G. Η απεικόνιση*

$$\chi := \chi_\rho : \begin{cases} G \longrightarrow K \\ \sigma \longmapsto \chi_\rho(\sigma) := tr(\rho(\sigma)), \quad \forall\sigma \in G \end{cases}$$

θα λέγεται <u>χαρακτήρας</u> της ρ.

Προφανείς είναι οι παρακάτω,

Ιδιότητες 1.24 *(1) $\chi(e) = n$, όπου $deg\rho = n$.*

(2) $\forall \sigma, \tau \in G, \quad \chi(\tau^{-1}\sigma\tau) = \chi(\sigma)$.

Επομένως οι χαρακτήρες είναι συναρτήσεις των κλάσεων συζυγίας της G.

(3) $\chi(\tau\sigma) = \chi(\sigma\tau)$.

(4) Αν ρ_1 *είναι ισοδύναμη με την* ρ_2, *τότε* $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

(5) Αν ρ *παράσταση* 1*ου βαθμού, τότε* $\rho(\sigma) = \chi_\rho(\sigma)$.

(δηλαδή οι χαρακτήρες 1*ου βαθμού είναι οι ομομορφισμοί της* G *στο* K^**).*

(6) $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$

(Αν $M_1(\sigma)$ *και* $M_2(\sigma)$, $\sigma \in G$, *είναι πίνακες παραστάσεων των* ρ_1 *και* ρ_2 *αντίστοιχα, τότε ένας πίνακας παράστασης της* $\rho_1 \oplus \rho_2$ *είναι* $\begin{pmatrix} M_1(\sigma) & 0 \\ 0 & M_2(\sigma) \end{pmatrix}$*).*

Θεώρημα 1.25 *(Λήμμα του Schur,* 1^o *μέρος) Εστω* $\rho_i : G \to GL(V_i), \quad (i = 1, 2)$ *ανάγωγες παραστάσεις της* G. *Εστω* $f \in Hom_K(V_1, V_2)$. *Υποθέτουμε ότι ισχύει:*

$$\forall \sigma \in G, \quad \rho_2(\sigma) \circ f = f \circ \rho_1(\sigma),$$

δηλαδή ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\cong", "f"'] \arrow[d, "\rho_1(\sigma)"', "\cong"] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(\sigma)"', "\cong"] \\
V_1 \arrow[r, "\cong", "f"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

είναι, για κάθε $\sigma \in G$, *αντιμεταθετικό. Τότε ο* f *είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, οπότε η* ρ_1 *είναι ισοδύναμη με την* ρ_2, *ή* $f \equiv 0$.

Απόδειξη : Εστω $W_1 := kerf \subset V_1, \ W_2 := imf \subset V_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι W_i είναι ρ_i-αναλλοίωτοι $(i = 1, 2)$.

Εστω $x \in W_1$. Τότε $f(x) = 0$ και επομένως:

$$\rho_2(\sigma)(f(x)) = \rho_2(\sigma)(0) = 0, \quad \forall \sigma \in G$$

$$\Rightarrow (\rho_2(\sigma) \circ f)(x) = 0 = (f \circ \rho_1(\sigma))(x)$$

$$\Rightarrow (f(\rho_1(\sigma))(x) = 0 \Rightarrow \rho_1(\sigma)(x) \in kerf, \quad \forall \sigma \in G.$$

Αρα ο W_1 είναι ρ_1-αναλλοίωτος.

Εστω πάλι $y \in W_2$. Τότε υπάρχει $x \in V_1$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Επομένως:

$$\forall \sigma \in G, \quad \rho_2(\sigma)(y) = (\rho_2(\sigma) \circ f)(x) = (f \circ \rho_1(\sigma))(x) = f(\rho_1(\sigma)(x))$$

$$\Rightarrow \rho_2(\sigma)(y) \in W_2, \quad \forall \sigma \in G.$$

Αρα ο W_2 είναι ρ_2-αναλλοίωτος.

Τώρα αν $f \neq 0$, τότε

(1) $kerf \neq V_1$ και επομένως $kerf = \{0\}$, διότι η ρ_1 είναι ανάγωγη και ο W_1 είναι ρ_1-αναλλοίωτος.

(2) $imf \neq \{0\}$ και επομένως $imf = V_2$, διότι η ρ_2 είναι ανάγωγη και ο W_2 είναι ρ_2-αναλλοίωτος.

Αρα αν $f \neq 0$, τότε ο f είναι ισομορφισμός.

Πόρισμα 1.26 *Εστω $\rho_i : G \to GL(V_i)$, $(i = 1, 2)$ ανάγωγες μη-ισοδύναμες παραστάσεις της G. Εστω $h \in Hom_K(V_1, V_2)$. Αν*

$$h_0 := \sum_{t \in G} \rho_2(t^{-1}) \cdot h \cdot \rho_1(t),$$

τότε $h_0 = 0$ (στον V_1).

Απόδειξη : Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\forall \sigma \in G, \quad \rho_2(\sigma) \cdot h_0 = h_0 \cdot \rho_1(\sigma).$$

Πράγματι, έστω $x \in V_1$. Τότε:

$$(\rho_2(\sigma) \cdot h_0)(x) = [\rho_2(\sigma) \sum_{t \in G} \rho_2(t^{-1}) \cdot h \cdot \rho_1(t)](x) = \sum_{t \in G} [\rho_2(\sigma t^{-1}) \cdot h \cdot \rho_1(t)](x).$$

Θέτουμε $t_1 := t\sigma^{-1}$, δηλαδή $t = t_1 \sigma$, οπότε παίρνουμε:

$$(\rho_2(\sigma) \cdot h_0)(x) = [\sum_{t \in G} \rho_2(t^{-1}) \cdot h \cdot \rho_1(t) \cdot \rho_1(\sigma)](x) = (h_0 \cdot \rho_1(\sigma))(x) \quad .$$

Το h_0 δεν μπορεί να είναι ισομορφισμός διότι αλλιώς, από το λήμμα του Schur, θα είχαμε ότι οι παραστάσεις ρ_1 και ρ_2 θα ήταν ισοδύναμες, άτοπο. Αρα $h_0 = 0$.

Πόρισμα 1.27 *(Διατύπωση στην γλώσσα των παραστάσεων δια πινάκων)*
Εστω $M_i : G \to GL_{n_i}(K)$, $(i = 1,2)$ *ανάγωγες μη-ισοδύναμες παραστάσεις δια πινάκων της* G *και:*

$$M_1(\sigma) = (a_{ij}(\sigma))_{i,j=1,2,\cdots,n_1}, \quad M_2(\sigma) = (\beta_{lk}(\sigma))_{l,k=1,2,\cdots,n_2}.$$

Για οποιαδήποτε i,j,l,k, $i,j \in \mathbb{N}_{n_1}$ *και* $l,k \in \mathbb{N}_{n_2}$ *ισχύει:*

$$\sum_{t\in G} a_{ij}(t)\beta_{lk}(t^{-1}) = 0.$$

Απόδειξη : Εστω ρ_i παραστάσεις των οποίων αντίστοιχες παραστάσεις δια πινάκων είναι οι M_i. Εστω $B_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_{n_1}\}$ και $B_2 = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n_2}\}$ βάσεις των V_1 και V_2 αντίστοιχα τέτοιες ώστε $M_i = \Phi_{B_i} \circ \rho_i$ $(i = 1,2)$.
Για οποιοδήποτε $h \in Hom_K(V_1, V_2)$, ισχύει, σύμφωνα με το πόρισμα 1.26,

$$h_0 = \sum_{t\in G} \rho_2(t^{-1}) \cdot h \cdot \rho_1(t) = 0.$$

Η απεικόνιση

$$\Phi_{B_1,B_2} : \begin{cases} Hom_K(V_1,V_2) & \longrightarrow & M_{n_1\times n_2}(K) \\ h & \longmapsto & (\gamma_{ki}) \end{cases}$$

όπου $h(u_i) = \sum_{k=1}^{n_2} \gamma_{ki} v_k$ είναι ισομορφισμός K-διανυσματικών χώρων. Επίσης έχουμε:

$$\rho_1(t)(u_j) = \sum_i \alpha_{ij}(t) u_i \quad \text{και} \quad \rho_2(t)(v_k) = \sum_l \beta_{lk}(t^{-1}) v_l.$$

Επομένως

$$0 = h_0(u_j) = [\sum_{t\in G} \rho_2(t^{-1}) \cdot h \cdot \rho_1(t)](u_j) = \sum_{t\in G} \rho_2(t^{-1}) \cdot h \cdot \sum_i \alpha_{ij}(t) u_i =$$

$$= \sum_{t\in G} \rho_2(t^{-1}) \sum_i \alpha_{ij}(t) \sum_k \gamma_{ki} v_k = \sum_{t\in G} \sum_i \alpha_{ij}(t) \sum_k \gamma_{ki} \sum_l \beta_{lk}(t^{-1})(v_l).$$

Επειδή όμως $\{v_l | l = 1,2,\cdots,n_2\}$ είναι βάση του V_2 έπεται ότι:

$$\sum_i \sum_k \sum_l \alpha_{ij}(t)\beta_{lk}(t^{-1})\gamma_{ki} = 0$$

για όλα τα j. Διαλέγουμε κάθε φορά το h έτσι ώστε ο πίνακας (γ_{ki}) να έχει 1 σε μια συγκεκριμένη θέση (i_0, k_0) και μηδέν σε όλες τις άλλες θέσεις, οπότε έχουμε:

$$\sum_{t\in G} \alpha_{ij}(t)\beta_{lk}(t^{-1}) = 0 \ \text{ για όλα τα } j,l.$$

Θεώρημα 1.28 *(Λήμμα του Schur, 2ο μέρος)*
Εστω K αλγεβρικά κλειστό σώμα, $\rho : G \to GL(V)$ ανάγωγη παράσταση της G.
Αν $f \in End_K(V)$, με την ιδιότητα: ($\forall \sigma \in G, \quad \rho(\sigma) \cdot f = f \cdot \rho(\sigma)$), τότε ο f έχει την μορφή:

$$f = \lambda \cdot Id_V, \quad \lambda \in K,$$

δηλαδή ο μεταθέτης μιας ανάγωγης παράστασης είναι τετριμμένος.

Απόδειξη : Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\chi)$ του f έχει μια ρίζα λ στο K, $\lambda \neq 0$. Επομένως

$$\varphi(\lambda) := det(\lambda Id_V - A) = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο ενδομορφισμός $f_1 := \lambda \cdot Id_V - f$ δεν είναι ισομορφισμός. Από την άλλη μεριά:

$$\forall \sigma \in G, \quad f_1 \cdot \rho(\sigma) = (\lambda \cdot Id_V - f)\rho(\sigma) = \lambda\rho(\sigma) - f \cdot \rho(\sigma) =$$

$$= \rho(\sigma)\lambda - \rho(\sigma) \cdot f = \rho(\sigma) \cdot f_1.$$

Επομένως απο το πρώτο μέρος του λήμματος του Schur (θεώρημα 1.25) συνεπάγεται ότι $f_1 \equiv 0$ και άρα $f = \lambda \cdot Id_V$.

Πόρισμα 1.29 *Εστω K αλγεβρικά κλειστό σώμα και G αβελιανή ομάδα. Κάθε ανάγωγη παράσταση της G έχει κατ΄ ανάγκη βαθμό 1.*

Απόδειξη : Εστω $\rho : G \to GL(V)$ ανάγωγη παράσταση της G. Για t σταθερό και σ να διατρέχει τα στοιχεία της G έχουμε $\rho(\sigma)\rho(t) = \rho(t)\rho(\sigma)$. Το θεώρημα 1.28 για $f = \rho(t)$ συνεπάγεται ότι $\rho(t) = \lambda_t \cdot Id_V, \ \lambda_t \in K$. Δηλαδή ο $\rho(t)$ είναι διαγώνιος πίνακας $\rho(t) = diag(\lambda_t, \lambda_t, \cdots, \lambda_t)$.
Επειδή όμως η ρ είναι ανάγωγη, έπεται ότι κατ΄ ανάγκη $deg\rho = 1$.

Παρατήρηση : Είναι απαραίτητη η υπόθεση ότι το K είναι αλγεβρικά κλειστό.
Αντιπαράδειγμα:

Εστω C_n κυκλική ομάδα τάξης n, και σ ένας γεννήτορας αυτής. Η απεικόνιση

$$\rho : \begin{cases} C_n & \longrightarrow & M_n(K) \\ \sigma & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

είναι μια παράσταση δια πινάκων της G.

Αν τώρα σαν K πάρουμε το σώμα των πραγματικών αριθμών και $n > 2$ τότε η ρ δεν αναλύεται σε ευθύ άθροισμα αναγώγων όλων βαθμού 1, διότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $X^n - 1$ και έχει και μιγαδικές ρίζες.

Πόρισμα 1.30 *Εστω K αλγεβρικά κλειστό σώμα, G αβελιανή ομάδα και έστω ότι $chK \not| \#G$. Ολες οι παραστάσεις δια πινάκων είναι ισοδύναμες προς παραστάσεις οι οποίες αποτελούνται όλες από διαγώνιους πίνακες (δηλαδή όλοι οι πίνακες παραστάσεων είναι συγχρόνως διαγωνοποιήσιμοι).*

Απόδειξη : Αμεση συνέπεια του πορίσματος 1.29 και του θεωρήματος του Maschke

Πόρισμα 1.31 *Εστω K αλγεβρικά κλειστό σώμα, $\rho : G \to GL(V)$ παράσταση της G βαθμού $deg\rho = n$ και $h \in End_K(V)$. Εστω:*

$$h_0 := \sum_{t \in G} \rho(t^{-1}) \cdot h \cdot \rho(t).$$

Τότε $h_0 = \lambda \cdot Id_V, \ \ \lambda \in K$ και $n\lambda = g \cdot tr(h)$, όπου $g = \#G$.

Απόδειξη : Αποδεικνύεται ότι, όπως στο πόρισμα 1.26, ισχύει:

$$\forall \sigma \in G, \quad \rho(\sigma) \cdot h_0 = h_0 \cdot \rho(\sigma) \quad \text{και επομένως} \quad h_0 = \lambda \cdot Id_V.$$

Επίσης:

$$n\lambda = \chi_\rho(e) \cdot \lambda = tr(Id_V) \cdot \lambda = tr(h_0) = \sum_{t \in G} tr(\rho(t^{-1}) \cdot h \cdot \rho(t)) = g \cdot tr(h).$$

Πόρισμα 1.32 *(Διατύπωση στην γλώσσα των παραστάσεων δια πινάκων)*
Εστω K αλγεβρικά κλειστό σώμα, $M : G \to GL_n(K)$ ανάγωγη παράσταση δια πινάκων της G, $M(\sigma) = (a_{ij}(\sigma))_{i,j=1,2,\cdots,n}$. Για οποιαδήποτε $i, j, l, k \in \mathbb{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ ισχύει:

$$n \cdot \sum_{t \in G} a_{ij}(t) a_{lk}(t^{-1}) = g \cdot \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$$

Απόδειξη : Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

Ορισμός 1.33 *Εστω G πεπερασμένη ομάδα και K σώμα. Η ακόλουθη πρόταση θα λέγεται συνθήκη του Schur:*
Για κάθε ανάγωγη παράσταση ρ της G υπέρ το K και κάθε $f \in End_K(V)$ που επαληθεύει τη σχέση:

$$\rho(\sigma) \cdot f = f \cdot \rho(\sigma), \quad \text{έπεται ότι} \quad \rho(\sigma) = \lambda \cdot Id_V, \quad \text{με} \quad \lambda \in K.$$

Παράδειγμα : Αν K αλγεβρικά κλειστό σώμα, τότε πληρούται η συνθήκη του Schur.

1.4 Σχέσεις ορθογωνιότητας των χαρακτήρων και ανάλυση της ομαλής παράστασης

Στην παράγραφο αυτή υποθέτουμε ότι το σώμα K είναι αλγεβρικά κλειστό και ότι $chK \nmid \#G$.

Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων της G στο K, G^K. Αυτό το σύνολο αποτελεί προφανώς K-διανυσματικό χώρο. Εστω $\varphi, \psi : G \to K$. Ορίζουμε:

$$< \varphi, \psi > := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t) \psi(t^{-1}), \quad \text{όπου} \quad g = \#G.$$

Η $< \ , \ >: G^K \times G^K \to K$ είναι K-διγραμμική, δηλαδή:

$$< \varphi_1 + \varphi_2, \psi > = < \varphi_1, \psi > + < \varphi_2, \psi >, \quad \forall \varphi_i, \psi \in G^K$$

$$< \lambda\varphi, \psi > = < \varphi, \lambda\psi > = \lambda < \varphi, \psi >, \quad \forall \lambda \in K, \quad \varphi, \psi \in G^K$$

Θεώρημα 1.34 *(2^o κύριο θεώρημα του Κεφαλαίου)*

(1) Αν χ χαρακτήρας μιας ανάγωγης παράστασης, τότε:

$$< \chi, \chi >= 1.$$

(2) Αν φ, ψ χαρακτήρες μη-ισοδυνάμων, αναγώγων παραστάσεων, τότε:

$$< \varphi, \psi >= 0.$$

Απόδειξη :

(1) Εστω $\chi = \chi_\rho$ και $M_\rho : G \to GL_n(K)$ αντιστοιχούσα παράσταση δια πινάκων ($M\rho(\sigma) = (a_{ij}(\sigma))$ της G. Από το πόρισμα 1.32, έχουμε:

$$\sum_{t \in G} a_{ij}(t) a_{lk}(t^{-1}) = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} \cdot \frac{g}{n}$$

οπότε, το

$$< \chi, \chi >:= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \chi(t)\chi(t^{-1}) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t^{-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{ij} = 1.$$

(2) Εστω $\varphi = \chi_{\rho_1}$, $\psi = \chi_{\rho_2}$ και M_1, M_2 $M_i : G \to GL_{n_i}(K)$ $(i = 1, 2)$ αντίστοιχες παραστάσεις δια πινάκων των ρ_i,

$$M_1(\sigma) = (a_{ij}(\sigma)), \quad M_2(\sigma) = (\beta_{kl}(\sigma)).$$

Από το πόρισμα 1.27 έπεται ότι:

$$\sum_{t \in G} a_{ij}(t)\beta_{lk}(t^{-1}) = 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_{n_1} \text{ και κάθε } l, k \in \mathbb{N}_{n_2}.$$

Επομένως,

$$< \varphi, \psi >:= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t)\psi(t^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \sum_{i=1}^{n_1} a_{ii}(t) \cdot \sum_{j=1}^{n_2} \beta_{jj}(t^{-1})) = \frac{1}{g} \sum_{i,j=1}^{n_1,n_2} (\sum_{t \in G} a_{ii}(t)\beta_{jj}(t^{-1})) = 0.$$

Πόρισμα 1.35 *Εστω ρ_1, ρ_2 δυο ανάγωγες παραστάσεις της G. Αν η ρ_1 είναι ισοδύναμη με την ρ_2 τότε $< \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} >= 1$ και αντιστρόφως.*

Απόδειξη : Αφού οι παραστάσεις είναι ισοδύναμες, έπεται $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$ οπότε λόγω του θεωρήματος 1.34(1), έχουμε $< \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} >= 1$. Αν τώρα $< \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} >= 1$, λόγω του θεωρήματος 1.34(2), έχουμε ότι $\rho_1 \sim \rho_2$ διότι αν δεν ήταν ισοδύναμες θα είχαμε $< \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} >= 0$.

Από το σημείο αυτό και μέχρι το τέλος της παραγράφου υποθέτουμε ότι $char(K) = 0$.

Θεώρημα 1.36 *Εστω $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_r$ μια οποιαδήποτε παράσταση της G, όπου ρ_i είναι ανάγωγες παραστάσεις και έστω $\tilde{\rho}$ ανάγωγη παράσταση της G. Τότε:*

$$< \chi_\rho, \chi_{\tilde{\rho}} > \in \mathbb{N}_0$$

και ισούται με το πλήθος των ρ_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$, τέτοιων ώστε $\rho_i \sim \tilde{\rho}$.

Απόδειξη : Προφανώς $< \chi_{\rho_i}, \chi_{\tilde{\rho}} >= \sum_{i=1}^{r} < \chi_{\rho_i}, \chi_{\tilde{\rho}} >$. Το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια της σχέσης αυτής του θεωρήματος 1.34 και του πορίσματος 1.35

Με την βοήθεια του τελευταίου θεωρήματος μπορούμε να αποδείξουμε το:

Θεώρημα 1.37 *Εστω ρ, ρ' παραστάσεις της G.*

(a) Η ρ είναι ισοδύναμη προς την ρ' τότε και μόνο τότε όταν $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

(b) Κάθε παράσταση ρ της G γράφεται μονοσήμαντα (modulo ισοδυναμία) σαν ευθύ άθροισμα αναγώγων παραστάσεων.

Απόδειξη:

(a) Αν $\rho \sim \rho'$ τότε $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ (δες 1.24(4)).
Εστω τώρα ότι $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.
Από το θεώρημα του Maschke έπεται ότι $\rho = \oplus_{i=1}^{r} \rho_i$ και $\rho' = \oplus_{j=1}^{r'} \rho'_j$ όπου ρ_i και ρ'_j $(i = 1, 2, \cdots, r, j = 1, 2, \cdots, r')$ ανάγωγες παραστάσεις της G. Θα αποδείξουμε ότι $\rho \sim \rho'$.
Εστω $I_{G,K} = I$ ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυνάμων παραστάσεων της G, $I = \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \cdots, \tilde{\rho}_\lambda\}$. Αν, για κάθε $\tilde{\rho}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$

$$m_{\tilde{\rho}_i} = \#\{i \in \mathbb{N}_r | \rho_i \sim \tilde{\rho}_i\} \text{ και } m'_{\tilde{\rho}_i} = \{j \in \mathbb{N}_r | \rho_j \sim \tilde{\rho}_i\}$$

τότε, θεώρημα 1.36, έχουμε

$$m_{\tilde{\rho}_i} =< \chi_\rho, \chi_{\tilde{\rho}_i} > \quad \text{και} \quad m'_{\tilde{\rho}_i} =< \chi_{\rho'}, \chi_{\tilde{\rho}_i} > .$$

Επειδή $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ και $chK = 0$, έπεται ότι για κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, \lambda\}$ ισχύει $m_{\tilde{\rho}_i} = m'_{\tilde{\rho}_i}$. Προφανώς

$$\rho \sim \oplus_{i=1}^{\lambda} m_{\tilde{\rho}_i} \cdot \tilde{\rho}_i \quad \text{και} \quad \rho' \sim \oplus_{j=1}^{\lambda} m'_{\tilde{\rho}_i} \cdot \tilde{\rho}_i.$$

Επομένως,

$$\rho \sim \oplus_{i=1}^{\lambda} m_{\tilde{\rho}_i} \cdot \tilde{\rho}_i \sim \oplus_{i=1}^{\lambda} m'_{\tilde{\rho}_i} \cdot \tilde{\rho}_i \sim \rho'.$$

(b) Η ύπαρξη της παράστασης είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Maschke και το μονοσήμαντο της σχέσης $m_{\tilde{\rho}_i} = m'_{\tilde{\rho}_i}$.

Σημείωση: Φυσικά εδώ εννοείται μονοσήμαντο modulo ισοδυναμία και όπου η σειρά των προσθεταίων του ευθέως αθροίσματος δεν λαμβάνεται υπ΄ όψιν.

Πόρισμα 1.38 *Αν χ χαρακτήρας της G τότε ισχύουν:*

(a) $< \chi, \chi > \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ *και*

(b) $< \chi, \chi > = 1$ *ακριβώς τότε όταν ο χ είναι ανάγωγος.*

Απόδειξη: Αμεση συνέπεια των θεωρημάτων $1.36, 1.37$ και του πορίσματος 1.35.

Παρατηρήσεις :

(1) Το (a) του θεωρήματος 1.37 δεν ισχύει αν $ch(K) \neq 0$.

Αντιπαράδειγμα:

Εστω $p = ch(K)$ και ρ_1 η μοναδιαία παράσταση βαθμού 1 της G, ρ_{p+1} η μοναδιαία παράσταση βαθμού $p+1$ της G. Η ρ_1 δεν είναι ισοδύναμη με την ρ_{p+1} διότι, πρώτα απ΄ όλα, είναι διαφορετικού βαθμού. Ομως

$$\chi_{\rho_{p+1}}(\sigma) = tr(\rho_{p+1}(\sigma)) = tr(Id_{p+1}) = (p+1) \cdot 1 = \chi_{\rho_1}(\sigma).$$

(2) Το (b) του θεωρήματος 1.35 ισχύει γενικότερα όταν η χαρακτηριστική του K δεν διαρεί την τάξη της G (δες θεώρημα 1.22 (Krull-Schmidt)).

Προτού συνεχίσουμε, εισάγουμε μερικούς συμβολισμούς.

Αν σ είναι ένα στοιχείο της G, τότε συμβολίζουμε με:

- $C_\sigma := [\sigma] := \{\tau\sigma\tau^{-1} | \tau \in G\}$, την κλάση συζυγίας του σ.
- $[G] := \{[\sigma] | \sigma \in G\}$, τό σύνολο όλων των κλάσεων συζυγίας.

Θεώρημα 1.39 *(3^ο κύριο θεώρημα του Κεφαλαίου)*

Εστω $\rho_{o\mu} : G \to GL(V)$ η ομαλή παράσταση της G και $\rho_{o\mu} = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_r$, η ανάλυση της σε ευθύ άθροισμα αναγώγων. Τότε ισχύουν:

(1) $\chi_\rho(\sigma) \begin{cases} g & , \text{αν } \sigma = e \\ 0 & , \text{αν } \sigma \neq e \end{cases}$

(2) *Κάθε ανάγωγη παράσταση της G εμφανίζεται (modulo ισοδυναμία) στην ανάλυση της $\rho_{o\mu}$.*

(3) *Υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους κλάσεις αναγώγων παραστάσεων της G.*

(4) *Αν $I_{G,K} = \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \cdots, \tilde{\rho}_n\}$ είναι ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων των κλάσεων αναγώγων παραστάσεων της G και $n_i = deg(\tilde{\rho}_i)$ $\; i = 1, 2, \cdots, n$ τότε ισχύουν τα εξής:*

   (a) *Κάθε ανάγωγη παράσταση της G εμφανίζεται στην ανάλυση της $\rho_{o\mu}$, ακριβώς n_i φορές.*

   (b) $\rho_{o\mu} = \oplus \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \rho_i^{(j)}$ *όπου η $\rho_i^{(j)}$ είναι ισοδύναμη πρός την $\tilde{\rho}_i$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n_i$.*

   (c) $g = \#G = \sum_{i=1}^{n} n_i^2$.

Απόδειξη :

(1) Εξ ορισμού της $\rho_{o\mu}$ έπεται ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση της G στον K-διανυσματικό χώρο V $(\sigma \mapsto u_\sigma)$, τέτοια ώστε το σύνολο $\{u_\sigma | \sigma \in G\}$ να είναι βάση του V και $\rho_{o\mu}(\sigma)(u_t) = u_{\sigma t}$. Αν $\sigma \neq e$ τότε έχουμε ότι $\rho_{o\mu}(\sigma)(u_t) \neq u_t$ και επομένως ο αντίστοιχος πίνακας παράστασης $M_{o\mu}$ της $\rho_{o\mu}$ είναι ένας πίνακας μεταθέσεων τέτοιος ώστε στην κύρια διαγώνιό του υπάρχουν μόνο μηδενικά. Συνεπώς $\chi_\rho(\sigma) = 0, \;\; \forall \sigma \neq e$. Αν τώρα $\sigma = e$, τότε:

$$\chi_\rho(\sigma) = deg(\rho_{o\mu}) = g.$$

(2) Εστω ρ ανάγωγη παράσταση της G και χ_ρ ο χαρακτήρας αυτής.

$$\text{Προφανώς,} \quad <\chi_\rho, \chi_\rho>:= \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\chi_\rho(t)\chi_\rho(t^{-1}) = \frac{1}{g}\chi_\rho(e)\chi_\rho(e) = deg(\rho) \neq 0$$

οπότε το ζητούμενο είναι συνέπεια του θεωρήματος 1.36.

(3) Είναι προφανές, λόγω του ότι ο V είναι K-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και λόγω του (2) του παρόντος θεωρήματος, ότι το πλήθος των κλάσεων αναγώγων παραστάσεων είναι το πολύ g.

(4) (a) Λόγω του θεωρήματος 1.36 έχουμε $<\chi_\rho, \chi_{\rho_i}>= n_i$.

(b) Είναι ταυτολογία με το (α).

(c) Εδώ

$$g = \chi_\rho(e) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\chi_{\rho_i^{(j)}}(e) = \sum_{i=1}^{n} n_i^2.$$

1.5 Πλήθος αναγώγων παραστάσεων και σχέσεις ορθογωνιότητας

Γενική υπόθεση της παραγράφου αυτής είναι ότι το σώμα K είναι αλγεβρικά κλειστό και $ch(K) = 0$.

Ορισμός 1.40 *Μια συνάρτηση $f : G \to K$ θα λέγεται συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G (ή central) όταν*

$$\forall \sigma, t \in G, \quad f(t\sigma t^{-1}) = f(\sigma)$$

Δηλαδή, ισοδύναμα, όταν:

$$\forall \sigma, t \in G f(\sigma t) = f(t\sigma).$$

Αν f_1, f_2 συναρτήσεις κλάσεων συζυγίας της G, τότε έπεται ότι και η $f_1 + f_2$ είναι συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G :

$$(f_1 + f_2)(\sigma t) = f_1(\sigma t) + f_2(\sigma t) = f_1(t\sigma) + f_2(t\sigma) = (f_1 + f_2)(t\sigma).$$

Ομοίως αν f συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G και $\lambda \in K$, τότε και η λf είναι επίσης συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G.

Επομένως το $cf(G) := \{f : G \to K | f \text{συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της } G\}$ αποτελεί K-διανυσματικό υπόχωρο του K-διανυσματικού χώρου όλων των απεικονίσεων της G στο K.

Η διγραμμική μορφή που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο επάγει μια διγραμμική μορφή επί της $cf(G)$.

Ιδιότητες 1.41

(1) *Η $cf(G)$ περιέχει όλους του χαρακτήρες χ της G (Προφανώς αφού οι χαρακτήρες είναι, εξ ορισμού, συναρτήσεις κλάσεων συζυγίας της G).*

(2) *Αν h_G είναι το πλήθος των κλάσεων συζυγών στοιχείων της G, τότε η διάσταση του K-διανυσματικού χώρου $cf(G)$ είναι h_G.*

Απόδειξη : Εστω $C_1, C_1, \cdots, C_h,\ \ h := h_G$ οι κλάσεις ισοδυνάμων στοιχείων της G. Εστω $R := \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_h\}$ ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων των κλάσεων. Η απεικόνιση:

$$\varphi : \begin{cases} cf(G) & \to K^{h_G} \\ f & \mapsto (f(\sigma_1), f(\sigma_2), \cdots, f(\sigma_h)) \end{cases}$$

είναι K-ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Εστω τώρα l_{C_i} οι αντίστροφες εικόνες των στοιχείων $(0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ του K^{h_G}. Το 1 βρίσκεται στην θέση i, δηλαδή l_{C_i} είναι η συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G που δίνει:

$$l_{C_i}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{όταν } \sigma \in C_i \\ 0 & \text{όταν } \sigma \notin C_i \end{cases}$$

Το σύνολο $\{l_{C_1}, l_{C_2}, \cdots, l_{C_h}\}$ αποτελεί, λόγω της ισομορφίας, βάση της $cf(G)$. Αν $f \in cf(G)$ τότε $f = \sum_{\sigma \in R} f(\sigma_i) l_{C_i}$.

(3) *Αν $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m$ οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G, τότε, όπως έχουμε δει, ισχύει $<\chi_i, \chi_j >= \delta_{ij}$.*

Οι ανάγωγοι χαρακτήρες, λοιπόν, αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα του διανυσματικού χώρου $cf(G)$.

(4) *Οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G είναι K-γραμμικώς ανεξάρτητοι.*

Απόδειξη : Εστω $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_i = 0, \quad \lambda_i \in K$. Για κάθε $j = 1, 2, \cdots, m$ ισχύει:

$$0 =< \chi_j, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_i >= \lambda_j, \quad \text{δηλαδή} \ \ \lambda_j = 0.$$

(5) *Σαν άμεση συνέπεια της ιδιότητας (4) προκύπτει ότι* $m \leq h_G$.

Θεώρημα 1.42 *(4^o κύριο θεώρημα του Κεφαλαίου)*

Ισχύει $m = h_G$, *δηλαδή:*

(1) Υπάρχουν ακριβώς h_G, *(ανά δύο μη-ισοδύναμες) ανάγωγες παραστάσεις της* G *(δηλαδή ακριβώς τόσες όσες και οι κλάσεις συζυγίας της* G*) και*

(2) Οι χαρακτήρες $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m$ *της* G *στο* K *αποτελούν μια ορθοκανονική βάση της* $cf(G)$.

Απόδειξη : Αρκεί να δείξουμε τα εξής:

(a) Αν $f \in cf(G)$ τέτοια ώστε για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$ να ισχύει $< f, \chi_i >= 0$, τότε $f = 0$. Η (1) είναι άμεση συνέπεια της (a).

Πράγματι, αν $\psi \in cf(G)$ και ορίσουμε:

$$\tilde{\psi} := \psi - \sum_{i=1}^{m} < \psi_i, \chi_i > \chi_i \in cf(G),$$

τότε για $1 \leq j \leq m$ ισχύει:

$$< \tilde{\psi}, \chi_j >=< \psi, \chi_j > - \sum_{i=1}^{m} < \psi, \chi_i >< \chi_i, \chi_j > .$$

Επομένως, λόγω της (a), έχουμε ότι

$$\tilde{\psi} = 0, \quad \text{δηλαδή} \ \ \psi \in < \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m > .$$

Εστω λοιπόν ότι $< f, \chi_i >= 0$ για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η (a) δηλαδή ότι $f = 0$.

Θεωρούμε μια ομαλή παράσταση της G, $\rho_{\text{ομ}} : G \to GL(V)$. Ορίζουμε τον

$$F := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} f(t) \rho_{\text{ομ}}(t^{-1}) : V \to V.$$

Προφανώς ο F είναι ενδομορφισμός K-διανυσματικών χώρων. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

(b) $F \equiv 0$.

Πράγματι, από γνωστές ιδιότητες της ομαλής παράστασης (1.5(5)) έχουμε ότι υπάρχει $u \in V$ τέτοια ώστε $\{\rho_{\text{ομ}}(t^{-1})(u) | t \in G\}$ βάση του V.

Από το (b) θα είχαμε λοιπόν:

$$0 = F(a) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} f(t) \rho_{\text{ομ}}(t^{-1})(a)$$

και αφού το παραπάνω σύνολο είναι βάση του V, $f(t) = 0$ για κάθε $t \in G$, δηλαδή την (a).

Εστω $\rho_{\text{ομ}} = \oplus_{j=1}^{r} \rho_j$ η ανάλυση της $\rho_{\text{ομ}}$ σε ευθύ άθροισμα αναγώγων παραστάσεων και $V = \oplus_{j=1}^{r} W_j$ η αντίστοιχη ανάλυση του K-διανυσματικού χώρου V. Ισχυριζόμαστε ότι προκειμένου να αποδείξουμε το (b), αρκεί να αποδείξουμε ότι:

(c) $F_j := rest_{W_j} F = 0$, για κάθε j, $\; 1 \leq j \leq r$.

Πράγματι, αν $F_j(W_j) = 0$, για κάθε $j = 1, 2, \cdots, r$ τότε θα είχαμε:

$$F(V) = F(W_1 + W_2 + \cdots + W_r) = F(W_1) + F(W_2) + \cdots + F(W_r) =$$

$$= F_1(W_1) + F_2(W_2) + \cdots + F_r(W_r) = 0.$$

Αφού οι ρ_j είναι ανάγωγες παραστάσεις, έπεται ότι ο $\chi_{\rho_j} \in \{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m\}$, οπότε λόγω της υποθέσεως της (a), έχουμε $< f, \chi_{\rho_j} >= 0$.

Στην συνέχεια θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το λήμμα του Schur. Ισχυριζόμαστε λοιπόν ότι ισχύει:

$$\rho_j(\sigma) F_j = F_j \rho_j(\sigma), \;\; \text{για κάθε} \;\; \sigma \in G$$

ή ισοδύναμα, ότι

$$\rho_j(\sigma) F_j \rho_j(\sigma^{-1}) = F_j, \;\; \text{για κάθε} \;\; \sigma \in G.$$

Πράγματι

$$\rho_j(\sigma) F_j \rho_j(\sigma^{-1})(x) = \rho_j(\sigma)(\frac{1}{g} \sum_{t \in G} f(t) \rho_j(t^{-1}) \rho_j(\sigma^{-1})(x)) =$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{t\in G} f(t)\rho_j(\sigma t^{-1}\sigma^{-1})(x).$$

Θέτουμε $t_1 := \sigma t \sigma^{-1}$ και έχουμε,

$$\rho_j(\sigma)F_j\rho_j(\sigma^{-1})(x) = \frac{1}{g}\sum_{t_1\in G} f(\sigma^{-1}t_1\sigma)\rho_j(t_1^{-1})(x) =$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{t_1\in G} f(t_1)\rho_j(t_1^{-1})(x) = F_j(x).$$

Επομένως το λήμμα του Schur μας δίνει:

$$F_j = \lambda_j \cdot Id_{W_j}, \text{ όπου } \lambda_j \in K.$$

Συνεπώς:

$$tr(F_j) = \lambda_j \cdot dimW_j = tr(\frac{1}{g}\sum_{t\in G} f(t)\rho_{\text{ομ}}(t^{-1})|_{W_j}) =$$

$$= tr(\frac{1}{g}\sum_{t\in G} f(t)\rho_j(t^{-1})) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} f(t)tr(\rho_j(t^{-1})) =$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{t\in G} f(t)\chi_{\rho_j}(t^{-1}) =< f, \chi_{\rho_j} >= 0$$

Αποδείξαμε λοπόν ότι $\lambda_j \cdot dimW_j = \lambda_j \cdot deg\rho_j = 0$ και επειδή $deg\rho_j \neq 0$ συνεπάγεται ότι $\lambda_j = 0$, δηλαδή ότι $F_j = \lambda_j \cdot Id_{W_j} = 0$ για κάθε $j = 1, 2, \cdots, r$ και συνεπώς $F = 0$, επομένως το (1) του θεωρήματος.

Το (2) είναι άμεση συνέπεια του (1) και της ιδιότητας 1.39(3).

1.6 Μερικές εφαρμογές, σχέσεις ορθογωνιότητας

Εστω $c_\sigma = \#C_\sigma$, C_σ η κλάση συζυγίας του στοιχείου σ. Οπως γνωρίζουμε, το σύνολο $\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_h\}$ είναι ορθοκανονική βάση της $cf(G)$.

Αν λοιπόν γράψουμε την $l_{C_\sigma} = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_h$ τότε,

$$\lambda_i =< l_{C_\sigma}, \chi_i >= \frac{1}{g}\sum_{t\in G} l_{C_\sigma}(t)\chi_i(t^{-1}) = \frac{1}{g}\sum_{t\in C_\sigma} 1\cdot\chi_i(t^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{t\in C_\sigma} \chi_i(\sigma^{-1}) = \frac{1}{g}\cdot c_\sigma \cdot \chi_i(\sigma^{-1}).$$

Επομένως η l_{C_σ} γράφεται

$$l_{C_\sigma} = \frac{c_\sigma}{g}\sum_{i=1}^{h} \chi_i(\sigma^{-1}) \cdot \chi_i, \quad \text{δηλαδή}$$

$$l_{C_\sigma}(t) = \frac{c_\sigma}{g}\sum_{i=1}^{h} \chi_i(\sigma^{-1})\chi_i(t) = \begin{cases} 1 & ,\text{αν} \quad t \in C_\sigma \\ 0 & ,\text{αν} \quad t \notin C_\sigma \end{cases}$$

Απο τα παραπάνω συνάγεται το,

Θεώρημα 1.43 *Εστω* $\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_h\}$ *το σύνολο των αναγώγων παραστάσεων της* G*. Ισχύει:*

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(\sigma^{-1})\chi_i(t) = \begin{cases} g/c_\sigma & ,\text{αν} \quad t \in C_\sigma \\ 0 & ,\text{αν} \quad t \notin C_\sigma \end{cases}$$

Σημείωση : Υπενθυμίζουμε τις υποθέσεις της παραγράφου 4, ότι δηλαδή το σώμα K είναι αλγεβρικά κλειστό χαρακτηριστικής 0.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις αποδεικνύουμε την

Πρόταση 1.44 *Ολες οι ανάγωγες παραστάσεις μιας πεπερασμένης αβελιανής ομάδας έχουν βαθμό* 1.

Απόδειξη : Επειδή η ομάδα G είναι αβελιανή, έπεται ότι $h_G = g$, δηλαδή υπάρχουν τόσες ανάγωγες παραστάσεις, όση η τάξη της ομάδας $g = \#G$. Από το θεώρημα 1.37(4)(c) προκύπτει ότι,

$$g = \sum_{i=1}^{g} n_i^2$$

οπότε θα πρέπει $n_i = 1$ για κάθε $i = 1, 2, \cdots, h_G$, δηλαδή ότι $deg(\rho_i) = 1$.
Αυτό σημαίνει ότι οι χαρακτήρες των αναγώγων παραστάσεων της G ταυτίζονται με τους ομομορφισμούς της G στο K^* (δες και πόρισμα 1.29).

Παρατήρηση : Ισχύει και το αντίστροφο. Πράγματι, αν όλες οι παραστάσεις ρ_i $(i = 1, 2, \cdots, h_G)$ έχουν βαθμό ένα, τότε:

$$\#G = \sum_{i=1}^{h_G} (deg\rho_i)^2 \quad \text{οπότε,} \quad g = h_G \quad \text{δηλαδή} \quad [t] = \{t\} \quad \text{για κάθε} \quad t \in G.$$

Αρα η G είναι αβελιανή.

Πρόταση 1.45 *(Σχέσεις ορθογωνιότητας)*

Αν G είναι μια αβελιανή ομάδα τάξης $g = \#G$ και $\mathcal{X}$ η ομάδα χαρακτήρων αυτής (ομομορφισμοί της G στην K^*) τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις ορθογωνιότητος

(1) Για κάθε $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\sum_{t \in G} \chi(t)\psi(t^{-1}) = \begin{cases} g & \text{αν} \quad \chi = \psi \\ 0 & \text{αν} \quad \chi \neq \psi \end{cases}$$

και

(2) Για κάθε $t, \sigma \in G$ έχουμε:

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}} \chi(t)\chi(\sigma^{-1}) = \begin{cases} g & \text{αν} \quad t = \sigma \\ 0 & \text{αν} \quad t \neq \sigma \end{cases}$$

Απόδειξη: Το θεώρημα 1.41, στην περίπτωση που η G είναι αβελιανή, μας δίνει ότι:

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}} \chi(t)\chi(\sigma^{-1}) = \begin{cases} g & \text{αν} \quad t = \sigma \\ 0 & \text{αν} \quad t \neq \sigma \end{cases}$$

Αν τώρα $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, τότε γνωρίζουμε ότι,

$$< \chi, \psi >= \begin{cases} 1, & \text{όταν} \quad \chi = \psi \\ 0, & \text{όταν} \quad \chi \neq \psi \end{cases}$$

Επομένως $\frac{1}{g} \sum_{t \in G} \chi(t)\psi(t^{-1}) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad \chi = \psi \\ 0, & \text{αν} \quad \chi \neq \psi \end{cases}$, δηλαδή

$$\sum_{t \in G} \chi(t)\psi(t^{-1}) = \begin{cases} g & \text{αν} \quad \chi = \psi \\ 0 & \text{αν} \quad \chi \neq \psi \end{cases}$$

Παρατήρηση: Οι σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν με εναλλαγή των ρόλων των $t \in G$ και $\chi \in \mathcal{X}$. Κάθε φορά η μια είναι η μεταβλητή και άλλη είναι η συνάρτηση. Γι΄ αυτό λέμε ότι η μια είναι δυική της άλλης.

2 Εφαρμογές

2.1 Τιμές χαρακτήρων και ακεραιότητα

Σε όλη την παράγραφο που ακολουθεί υποθέτουμε ότι $ch(K) = 0$ και για ότι για το σώμα K ισχύει η συνθήκη του Schur.

Λήμμα 2.1 *Εστω G πεπερασμένη ομάδα, χ χαρακτήρας της G υπέρ το K ως προς κάποια παράσταση ρ της G υπέρ το K. Τότε, για κάθε $\sigma \in G$, ισχύει*

(1) Ο $\rho(\sigma)$ είναι διαγωνοποιήσιμος (δηλαδή υπάρχει μια βάση από ιδιοδιανύσματα του V έτσι ώστε ο πίνακας $\rho(\sigma)$ να είναι διαγώνιος), Η βάση όμως, εξαρτάται από τον σ και δεν έχουμε ταυτόχρονη διαγωνοποιήση.

(2) Αν ϵ ιδιοτιμή του $\rho(\sigma)$ τότε $\epsilon^{ord(\sigma)} = 1$. Ιδιαίτερα ισχύει $\epsilon^{exp(G)} = 1$.
Σημείωση: Εκθέτης μιάς ομάδος $exp(G)$:=Ε.Κ.Π.$\{ord(\sigma)/\ \sigma \in G\}$. Ισχύει: $exp(G)|\#G$ π.χ. για $G = S_3$ $exp(G) = 6$, αλλά δεν υπάρχει $\sigma \in G$ με $ord(\sigma) = 6$. Ο $exp(G)$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε για κάθε $\sigma \in G$ να ισχύει $\sigma^m = 1$.

(3) Αν ο $\rho(\sigma)$ είναι όμοιος προς τον πίνακα $diag(\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_d)$ τότε τα ϵ_i είναι ιδιοτιμές του $\rho(\sigma)$ και $\chi(\sigma) = \sum_{i=1}^{d} \epsilon_i$

(4) Ισχύει $\chi(\sigma^{-1}) = \overline{\chi(\sigma)}$.

Απόδειξη:

(1) Ο $\rho|_{<\sigma>}$ είναι μια παράσταση της κυκλικής ομάδος $< \sigma >$. Αναλύεται επομένως σε άθροισμα αναγώγων παραστάσεων της $< \sigma >$, έστω $\rho|_{<\sigma>} = \oplus_{i=1}^{d} \rho_i$. Τώρα $< \sigma >$ αβελιανή συνεπώς $dim\rho_i = 1$ για κάθε $i = 1, 2, ..., d$. Εστω M μία παράσταση δια πινάκων αντίστοιχη του $\rho|_{<\sigma>}$ και M_i παραστάσεις δια πινάκων αντίστοιχες των ρ_i. Επομένως ο $M(\sigma)$ είναι ισοδύναμος προς τον:

$$\bigoplus_{i=1}^{d} M_i(\sigma) = \begin{bmatrix} M_1(\sigma) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_d(\sigma) \end{bmatrix}$$

(2) Επειδή $\rho(\sigma) = \rho|_{<\sigma>}(\sigma)$ ο πίνακας παράστασης (ως προς κατάλληλη βάση) μπορεί να γραφεί:

$$\begin{bmatrix} M_1(\sigma) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_d(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \epsilon_d \end{bmatrix}$$

όπου $\epsilon_i \in K^*$, δηλαδή $\{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_d\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών της $\rho(\sigma)$. Τώρα $\rho(1) = Id_V$ και $\rho(1) = \rho(\sigma^{ord(\sigma)}) = \rho(\sigma)^{ord(\sigma)} = Id_V$. Στην $\rho(\sigma)^{ord(\sigma)}$ αντιστοιχεί ο πίνακας: $diag(\epsilon_1^{ord(\sigma)}, ..., \epsilon_d^{ord(\sigma)}) = Id_V$, οπότε θα πρέπει $\epsilon_i^{ord(\sigma)} = 1$ για κάθε $i = 1, 2, ..., d$ δηλαδή οι ιδιοτιμές ϵ_i είναι $m := ord(\sigma)$-ρίζες της μονάδας.

(3) Λόγω της (1), έχουμε ότι ο $\rho(\sigma)$ είναι όμοιος προς τον $diag(\epsilon_1^{ord(\sigma)}, ..., \epsilon_d^{ord(\sigma)})$ και συνεπώς $\chi(\sigma) = tr\rho(\sigma) = \sum_{i=1}^{d} \epsilon_i$ και μάλιστα $\epsilon_i^m = 1$ για κάθε $i = 1, 2, ..., d$ όπου $m := exp(G)$. Δηλαδή οι τιμές των χαρακτήρων είναι αθροίσματα $m-$ριζών της μονάδας και επομένως, για κάθε $\sigma \in G$, $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$.

(4) Προφανώς $K \subseteq \mathbb{C}$. Εχουμε:

$$\chi(\sigma^{-1}) = tr(\rho(\sigma^{-1})) = tr(\rho(\sigma)^{-1}) = \sum_{i=1}^{d} \epsilon_i^{-1}.$$

Ομως ϵ_i είναι ρίζα της μονάδας συνεπώς $|\epsilon_i|^2 = 1$ δηλαδή $\epsilon_i \bar{\epsilon}_i = 1$, οπότε $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i^{-1}$. Συνεπώς $\chi(\sigma^{-1}) = \overline{\chi(\sigma)}$.

Επειδή οι ρίζες της μονάδας είναι ακέραιοι αλγεβρικοί αριθμοί έπεται ότι οι τιμές των χαρακτήρων $\chi(\sigma)$ είναι επίσης ακέραιοι αλγεβρικοί. Αν οι τιμές των χαρακτήρων είναι ρητοί αριθμοί τότε κατ΄ ανάγκην θα είναι ακέραιοι.

Θεώρημα 2.2 (Ρητές τιμές χαρακτήρων.)

Εστω $\sigma \in G$ και $m := ord(\sigma)$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι μεταξύ τους ισοδύναμες:

(α) Για κάθε χαρακτήρα χ της G υπέρ το K η τιμή $\chi(\sigma)$ είναι ρητός (συνεπώς, από τα παραπάνω, ακέραιος αριθμός).

(β) Για κάθε $\ell \in \mathbb{Z}$ με $(\ell, m) = 1$ το σ^ℓ είναι συζυγές του σ στην G.

Απόδειξη: Εστω ρ παράσταση της G και χ ο χαρακτήρας αυτής. Σύμφωνα με το λήμμα 2.1, ο $\rho(\sigma)$ έχει πίνακα όμοιο με $diag(\epsilon_1, ..., \epsilon_d)$ όπου ϵ_i $m-$ρίζες της μονάδας.

Εστω τώρα $\ell \in \mathbb{Z}$. Η $\rho(\sigma^\ell) = \rho(\sigma)^\ell$ έχει πίνακα $diag(\epsilon_1^\ell, \epsilon_2^\ell, ..., \epsilon_d^\ell)$. Επομένως έχουμε:

$$\chi(\sigma) = \sum_{i=1}^{d} \epsilon_i \text{ και } \chi(\sigma^\ell) = \sum_{i=1}^{d} \epsilon_i^\ell.$$

Είναι γνωστό ότι η επέκταση $\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}$ είναι επέκταση του Galois (δες, σελ. 158) και μάλιστα ότι η ομάδα Galois αυτής $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ είναι ισόμορφη προς την ομάδα $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. Αν $\sigma_\ell \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta)_m)/\mathbb{Q}), (\ell, m) = 1$, είναι ο αυτομορφισμός της $\mathbb{Q}(\zeta_m/\mathbb{Q})$, $\sigma_\ell : \zeta_m \longmapsto \zeta_m^\ell$ τότε αυτός αντιστοιχεί στην κλάση $\ell(mod\ m)$ της $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. Επομένως για $\ell \in \mathbb{Z}$, $(\ell, m) = 1$ έχουμε:

$$\chi(\sigma^\ell) = \sum_{i=1}^{d} \epsilon_i^\ell = \sum_{i=1}^{d} \sigma_\ell(\epsilon_i) = \sigma_\ell\left(\sum_{i=1}^{d} \epsilon_i\right) = \sigma_\ell(\chi(\sigma))$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$. Εστω $\bar{\ell} = \ell(mod\, m) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$,δηλαδή $(\ell, m) = 1$. Αφού, εξ υποθέσεως, ισχύει το (β), έπεται ότι

$$\sigma_\ell(\chi(\sigma)) = \chi(\sigma^\ell) = \chi(\sigma).$$

Επομένως το $\chi(\sigma)$ ανήκει στο σώμα σταθερών στοιχείων της ομάδας του Galois

$$Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) = \{\sigma_\ell/(\ell, m) = 1\},$$

δηλαδή $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}$.

$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$. Υποθέτουμε ότι $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}$ για όλους τους K-χαρακτήρες της G. Για κάθε $\ell \in \mathbb{Z}$, $(\ell, m) = 1$, έχουμε:

$$\chi(\sigma^\ell) = \sigma_\ell(\chi(\sigma)) = \chi(\sigma),$$

δηλαδή ότι οι τιμές $\chi(\sigma), \chi(\sigma^\ell)$ είναι ίδιες, για όλους τους χαρακτήρες της G.

Κάθε συνάρτηση κλάσεων της G παίρνει ίδιες τιμές στα σ, σ^ℓ (θεώρημα 1.42 (2)). Αν αυτό το εφαρμόσουμε για την χαρακτηριστική συνάρτηση $\psi_{[\sigma]}$ της κλάσης $[\sigma] = \{\tau\sigma\tau^{-1}/\tau \in G\}$ τότε έχουμε:

$$1 = \psi_{[\sigma]}(\sigma) = \psi_{[\sigma]}(\sigma^\ell)$$

δηλαδή $\sigma^\ell \in [\sigma]$ πράγμα που σημαίνει ότι σ, σ^ℓ είναι συζυγή.

Παρατήρηση: Η κατεύθυνση $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$, ισχύει και χωρίς την συνθήκη του Schur. Πράγματι, έστω K σώμα με $ch(K) = 0$ και $\tilde{K}$ η αλγεβρική θήκη του K. Τότε από την (β) έπεται ότι οι τιμές των $\tilde{K}$-χαρακτήρων της G είναι ρητές οπότε το ίδιο ισχύει και για τους K χαρακτήρες της G, δηλαδή $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}$.

Πόρισμα 2.3 *Οι χαρακτήρες της συμμετρικής ομάδος S_n ως προς σώμα K με $ch(K) = 0$, είναι ακέραιοι αριθμοί.*

<u>Απόδειξη</u>: Αρκεί να δείξουμε ότι για $\ell \in \mathbb{Z}$, $(\ell, m) = 1$ όπου $m = ord(\sigma)$ ισχύει ότι το σ^ℓ είναι συζυγές του σ, στην S_n.

Εστω $\sigma = \sigma_1\sigma_2...\sigma_r$ η ανάλυση σε, ξένους μεταξύ τους ανά δύο, κύκλους του σ και $ord(\sigma_i) = \ell_i$. Ως γνωστό, ισχύει $ord(\sigma) =$Ε.Κ.Π.$(\ell_1, ..., \ell_r)$. Επομένως ο ℓ είναι πρώτος προς κάθε ℓ_i, $i = 1, 2, .., r$. Προφανώς ισχύει $\sigma^\ell = \sigma_1^\ell\sigma_2^\ell...\sigma_r^\ell$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι, για κάθε $i = 1, 2, .., r$, ο σ_i^ℓ είναι κύκλος μήκους ℓ_i, αφού ως γνωστόν οι κύκλοι ιδίου μήκους είναι συζυγείς στην S_n (δες, σελ. 150).

Εστω λοιπόν $\tau = (a_1, a_2, ..., a_s)$ ένας s-κύκλος της S_n και ℓ πρώτος προς τον s. Ισχυρίζόμαστε ότι τ^ℓ είναι επίσης ένας s-κύκλος. Πράγματι, αφού τ, σ-κύκλος έπεται ότι ο a_i ταυτίζεται με τον a_j για $s|i - j$ (π.χ. $a_{s+1} = a_1 = ...$). Επίσης $\tau(a_i) = a_{i+1}$, οπότε:

$$\tau^l(a_i) = a_{i+l}$$

Επομένως

$$(\text{ο } \tau^\ell \text{ είναι } s-\text{κύκλος}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{όταν } \; a_1, \tau^\ell(a_1), \tau^\ell(\tau^\ell(a_1)), ..., \tau^{\ell(s-1)}(a_1) \\ \text{είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους.} \end{array} \right)$$

Εστω λοιπόν, ότι: $\tau^{\ell\mu}(a_1) = \tau^{\ell\nu}(a_1)$ όπου $0 \leq \mu, \nu \leq s-1$. Η σχέση αυτή γράφεται, αν $\mu \geq \nu$, $\tau^{\ell(\mu-\nu)}(a_1) = a_1$. Συνεπώς για $0 \leq \delta := \mu - \nu \leq s - 1$, έχουμε $\tau^{\ell\delta}(a_1) = a_1$ δηλαδή ότι $a_{1+\ell\delta} = a_1$ οπότε έπεται ότι $s|\ell\delta$ και επειδή $(s, \ell) = 1$ συνεπάγεται ότι $(s|\delta, 0 \leq \delta \leq s-1)$. Εχουμε, κατάναγκη, ότι $\delta = 0$ άρα $\mu = \nu$ πράγμα που σημαίνει ότι σ^ℓ συζυγές προς το σ.

Ορισμός 2.4 *Ορίζουμε <u>τμήμα</u> (Abteilung) του στοιχείου σ της G το σύνολο:*

$$Abt(\sigma) := \{\tau \in G / <\tau> \text{ συζυγής προς την } <\sigma>\}$$

($<\tau>$ συμβολίζει την κυκλική ομάδα, υποομάδα της G που παράγεται από το τ.)

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $Abt(\sigma) \supseteq [\sigma]$, όπου

$$[\sigma] := \{\tau \in G/\tau \text{ συζυγές του } \sigma\}, \text{η κλάση συζυγίας του } \sigma.$$

Πράγματι, αν $\mu\sigma\mu^{-1} = \tau$ τότε

$$< \tau >= \{\tau^{\nu}/\nu \in \mathbb{Z}\} = \{\mu\sigma^{\nu}\mu^{-1}/\nu \in \mathbb{Z}\} = \mu\{\sigma^{\nu}/\nu \in \mathbb{Z}\}\mu^{-1} = \mu < \sigma > \mu^{-1}$$

δηλαδή το τ είναι συζυγές προς μια δύναμη του σ. Είναι όμως πιό γενική έννοια από την ισοδυναμία στοιχείων όπως φαίνεται και από τα παρακάτω.

Παράδειγμα:

Εστω $G = A_4$, Τότε, αν πάρουμε, $\sigma = (1\ \ 2\ \ 3), \tau = (1\ \ 3\ \ 2) = \sigma^2$, προφανώς ισχύει ότι $< \sigma >=< \tau >$. Αλλά το σ δεν είναι στην A_4 συζυγές ως προς το τ. (Φυσικά είναι συζυγή στην S_4.) Πράγματι, αν $\mu(1\ \ 2\ \ 3)\mu^{-1} = (1\ \ 3\ \ 2) \Rightarrow (\mu(1)\ \ \mu(2)\ \ \mu(3)) = (1\ \ 3\ \ 2) \Rightarrow \mu(4) = 4$ Εξετάζοντας τα στοιχεία της A_3 βλέπουμε ότι $\mu = (1\ \ 2\ \ 3)$ ή $\mu = (1\ \ 3\ \ 2)$ δηλαδή $\mu \in A_3 \cong \mathbb{Z}_3$ η οποία είναι αβελιανή. Σε αβελιανή όμως ομάδα κάθε στοιχείο είναι συζυγές μόνο του εαυτού του. Θα είχαμε λοιπόν $(2\ \ 3\ \ 1) = (1\ \ 3\ \ 2)$ ή $(3\ \ 1\ \ 2) = (1\ \ 2\ \ 3)$, άτοπο.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι:

$$Abt(\sigma) = \{\tau \in G/\tau \text{ συζυγές προς το } \sigma^{\ell} \text{ με } \ell \in \mathbb{Z}, (\ell, ord(\sigma) = 1\}$$

Πράγματι: ($< \tau >$ συζυγής προς τον $< \sigma >$ συνεπώς $(\exists \mu \in G : \mu < \tau > \mu^{-1} =< \sigma >) \Leftrightarrow (\exists \mu \in G :< \mu\tau\mu^{-1} >=< \sigma >) \Leftrightarrow (\exists \mu \in G : \mu\tau\mu^{-1} = \sigma^{\ell}$ με $\ell \in \mathbb{Z}, (\ell, ord(\sigma)) = 1)$.

Παρατήρηση: Με βάση τα παραπάνω η συνθήκη (β) του θεωρήματος (2.2) είναι ισοδύναμη προς την συνθήκη (β') $Abt(\sigma) = [\sigma]$ ή ισοδύναμα

(β'') αν η κυκλική ομάδα $< \tau >$ είναι συζυγής προς την $< \sigma >$ τότε το στοιχείο τ είναι συζυγές του σ.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε το

Θεώρημα 2.5 *Αν $\sigma \in G$, $k = [\sigma]$ η κλάση συζυγίας του σ και χ ένας ανάγωγος K-χαρακτήρας της G, τότε ο αριθμός:*

$$\omega_K := \frac{\#k \cdot \chi(\sigma)}{\chi(1)}$$

είναι ακέραιος αλγεβρικός.

Παρατήρηση:

- Αν $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}$, τότε $\omega_K \in \mathbb{Q}$ και, αφου ω_K ακέραιος αλγεβρικός, έπεται ότι $\omega_K \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $\chi(1)|\#k \cdot \chi(\sigma)$.
- Για $G = S_n$,λόγω του πορίσματος 2.3 έχουμε: $\chi(1)|\#k \cdot \chi(\sigma)$ για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ της S_n.

Απόδειξη:

Εστω $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ παράσταση της G με χαρακτήρα τον δοθέντα χ. (Η ρ είναι προφανώς ανάγωγη αφού ο χ είναι ανάγωγος.) Αν

$$f_k := \sum_{\tau \in k} \rho(\tau) \in End_K(V)$$

και $g \in G$ ισχύει ότι:

$$\rho(g)^{-1} \cdot f_k \cdot \rho(g) = \sum_{\tau \in k} \rho(g^{-1}\tau g) = f_k,$$

αφού, όταν το τ διατρέχει τα στοιχεία της κλάσης συζυγίας του k το ίδιο κάνει και το $g^{-1}\tau g$. Εχουμε λοιπόν:

$$f_k \cdot \rho(g) = \rho(g) \cdot f_k \quad \text{, για κάθε } g \in G.$$

Από το λήμμα του Schur έπεται ότι $f_k = a_k Id_V$ με $a_k \in K$ οπότε και $tr(f_k) = a_k \chi(1)$. Από την άλλη μεριά όμως:

$$tr(f_k) = \sum_{\tau \in k} tr(\rho(\tau)) = \sum_{\tau \in k} \chi(\tau) = \#k\chi(\sigma) \text{ και επομένως :}$$

$$a_k = \frac{\#k \cdot \chi(\sigma)}{\chi(1)} = \omega_k.$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\mathbb{Z}[\omega_k/k \in [G]] =_{\mathbb{Z}} < \omega_k/k \in [G] >$$

δηλαδή ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\omega_k/k \in [G]]$ είναι ένα πεπερασμένα παραγώμενο $\mathbb{Z}$-module το οποίο περιέχει όλα τα ω_k οπότε, από γνωστό θεώρημα της θεωρίας αριθμών (δες σελίδα 159), θα έχουμε ότι για κάθε κλάση συζυγίας k οι αριθμοί ω_k είναι ακέραιοι αλγεβρικοί.

Για να αποδείξουμε το τελευταίο αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\kappa, \mu, \nu \in [G]$, υπάρχουν $n_{\kappa,\mu\nu} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοιοι ώστε:

$$\omega_\kappa \omega_m u = \sum_{\nu \in [G]} n_{\kappa,\mu,\nu} \omega_\nu.$$

Καταρχήν γιά $\kappa, \mu \in [G]$ έχουμε:

$$f_\kappa \cdot f_m u = \sum_{g \in \kappa} \rho(g) \cdot \sum_{g \in \mu} \rho(g) =$$

$$= \sum_{g \in \kappa, g' \in \mu} \rho(gg') = \sum_{\delta \in G} \sum_{\substack{g \in \kappa, g' \in \mu \\ gg' = \delta}} \rho(\delta) = \sum_{\delta \in G} \#\{(g,g') \in \kappa \times \mu / gg' = \delta\} \cdot \rho(\delta).$$

Συμβολίζουμε το σύνολο $\{(g,g') \in \kappa \times mu/gg' = \delta\}$ με $C_{\kappa,\mu,\delta}$ και έστω $c_{\kappa,\mu,\delta} := \#C_{\kappa,\mu,\delta}$.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν $\tilde{\delta}$ συζυγές του δ τότε:

$$c_{\kappa,\mu\delta} = c_{\kappa,\mu\tilde{\delta}}.$$

Πράγματι έστω $\tilde{\delta} = \tau\delta\tau^{-1}, \tau \in G$. Η συνάρτηση:

$$\begin{array}{rcl} C_{\kappa,\mu\delta} & \longrightarrow & C_{\kappa,\mu,\tilde{\delta}} \\ (g,g') & \longmapsto & (\tau g \tau^{-1}, \tau g' \tau^{-1}) \end{array}$$

είναι προφανώς ένα προς ένα και επί. Αρκεί, λοιπόν να δείξουμε ότι αν $(g,g') \in C_{\kappa,\mu\delta}$ τότε $(\tau g \tau^{-1}, \tau g' \tau^{-1}) \in C_{\kappa,\mu,\tilde{\delta}}$. Το τελευταίο όμως είναι προφανές διότι

$$\left.\begin{array}{rcl} g \in \kappa & \Rightarrow & \tau g \tau^{-1} \in \kappa \\ g' \in \mu & \Rightarrow & \tau g' \tau^{-1} \in \mu \end{array}\right\} \text{ οπότε } \tau g \tau^{-1} \tau g' \tau^{-1} = \tau g g' \tau^{-1} = \tau \delta \tau^{-1} = \tilde{\delta}.$$

Μπορούμε επομένως για κάθε $\delta \in \nu$ να γράφουμε:

$$C_{\kappa,\mu,\nu} := C_{\kappa,\mu,\delta}.$$

Εχουμε λοιπόν:

$$f_\kappa \cdot f_\mu = \sum_{\delta \in G} c_{\kappa,\mu,[\delta]} \rho(\delta) = \sum_{\nu \in [G]} c_{\kappa,\mu,\nu} \sum_{\delta \in \nu} \rho(\delta) = \sum_{\nu \in [G]} c_{\kappa,\mu,\nu} \cdot f_\nu.$$

Επομένως

$$\omega_k Id_V \cdot \omega_\mu Id_V = \left(\sum_{\nu \in [G]} c_{\kappa,\mu,\nu} \omega_\nu \right) \cdot Id_V \text{ οπότε ισχύει } \omega_\kappa \cdot \omega_\mu = \sum_{\nu \in [G]} c_{\kappa,\mu,\nu} \omega_\nu.$$

Σαν εφαρμογή του προηγουμένου θεωρήματος έχουμε το:

Θεώρημα 2.6 *Αν χ <u>ανάγωγος</u> χαρακτήρας της G, τότε ο βαθμός του χ, $deg\chi$ διαιρεί την τάξη της ομάδος G.*

<u>Απόδειξη:</u> Αφού χ ανάγωγος θα έχουμε $1 =< \chi, \chi >$. Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου προκύπτει ότι: $\#G = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma)\chi(\sigma^{-1})$. Εστω $k_i = [\sigma_i]$, γιά $i = 1, 2..., h = h_G$. Εχουμε λοιπόν:

$$\#G = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\sigma \in k_i} \chi(\sigma)\chi(\sigma^{-1}) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\sigma \in k_i} \chi(\sigma_i)\chi(\sigma_i^{-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{h} \#(k_i)\chi(\sigma_i)\sigma(\sigma_i^{-1}).$$

Επομένως:

$$\frac{\#G}{\chi(1)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{\#(k_i)\chi(\sigma_i)}{\chi(1)}\chi(\sigma_i^{-1}).$$

Επειδή οι τιμές $\chi(\sigma_i^{-1})$ είναι ακέραιοι αλγεβρικοί (αθροίσματα ριζών της μονάδας) και, λόγω του θεωρήματος 2.5, και οι αριθμοί $\#(k_i)\chi(\sigma_i)/\chi(1)$ είναι ακέραιοι αλγεβρικοί έπεται ότι ο $\frac{\#G}{\chi(1)}$ είναι ακέραιος αλγεβρικός. Επειδή όμως ο $\frac{\#G}{\chi(1)}$ είναι και ρητός, έπεται ότι $\frac{\#G}{\chi(1)} \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $\chi(1)|\#G$.

2.2 Κανονικές υποομάδες και το (p, q)-θεώρημα του Burnside.

Κύριος στόχος της παρούσης παραγράφου είναι η απόδειξη, με την βοήθεια της θεωρίας παραστάσεων (χαρακτήρων) ομάδων, ενός θεωρήματος της θεωρίας ομάδων, του θεωρήματος του Burnside. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού στις αρχές του αιώνα (1904) κατέδειξε και την δυναμικότητα του κλάδου της θεωρίας των παραστάσεων. Απόδειξη του θεωρήματος του Burnside χωρίς την χρήση της θεωρίας χαρακτήρων δόθηκε πολύ αργότερα.

Θεώρημα 2.7 (Burnside) *Αν p, q είναι πρώτοι αριθμοί, τότε κάθε ομάδα G τάξης $p^\alpha q^\beta$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) είναι επιλύσιμη.*

Καταρχήν αποδεικνύουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.8 *Εστω G πεπερασμένη ομάδα, K σώμα χαρακτηριστικής μηδέν και χ ένας χαρακτήρας της G ως προς το K.*

(α) *Αν ρ παράσταση της G και* $\chi := \chi_\rho$. *Τότε:*

$$ker\rho = ker\chi := \{\sigma \in G / \chi(\sigma) = \chi(1)\}$$

(β) *Αν ο χαρακτήρας* χ *γράφεται σαν άθροισμα* $\chi = \sum_{i=1}^{r} \chi_i$ *όπου* χ_i *χαρακτήρες της* G, *τότε:* $ker\chi = \cap_{i=1}^{r} ker\chi_i$.

(γ) *Μία υποομάδα N της G είναι αναλλοίωτη ακριβώς τότε όταν υπάρχουν ανάγωγοι χαρακτήρες* $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_s$ *της G τέτοιοι ώστε* $N = \cap_{i=1}^{s} ker\chi_i$

(δ) *Η ομάδα G είναι απλή τότε και μόνο τότε όταν, για όλους τους ανάγωγους χαρακτήρες* $\chi \neq \chi_1$ *ισχύει* $ker\chi = \{1\}$.

Απόδειξη:

(α) Αν $\sigma \in ker\rho$ τότε έπεται ότι $\rho(\sigma) = 1_V$ (V είναι, όπως πάντα, ο χώρος παράστασης της ρ). Επομένως $\chi(\sigma) = tr(1_V) = dim_K V = deg(\chi) = \chi(1)$. Αν πάλι $\sigma \in ker\chi$, τότε προφανώς, $\chi(\sigma) = \chi(1) =: d$. Θα αποδείξουμε ότι $\sigma \in ker\rho$. Για αυτό θα χρειαστούμε το

Λήμμα 2.9 *Αν K σώμα που πληρεί την συνθήκη του Schur,* $chK = 0$, $\sigma \in G$ *και* χ *χαρακτήρας της G ως προς το K με* $|\chi(\sigma)| = \chi(1)$. *Τότε υπάρχει* $\epsilon \in K$ *με* $\rho(\sigma) = \epsilon 1_V$.

Αν δεχθούμε, προς στιγμή, την αλήθεια του λήμματος, τότε αν $\tilde{K}$ μία αλγεβρική θήκη του K, επειδή για το $\tilde{K}$ ισχύει η συνθήκη του Schur και ο χ είναι χαρακτήρας της G από το λήμμα 2.9 έχουμε: $\rho(\sigma) = \epsilon \cdot Id_V$ οπότε, λόγω των σχέσεων $\chi(\sigma) = \chi(1)$ και $\chi(\sigma) = \epsilon \cdot dim_K V = \epsilon \cdot \chi(1)$ έχουμε ότι $\epsilon = 1$ και $\sigma \in ker\rho$.

Απόδειξη: (του λήμματος) Ως γνωστό, ο $\rho(\sigma)$ είναι όμοιος προς τον διαγώνιο πίνακα $diag(\epsilon_1, ..., \epsilon_d)$, όπου $\epsilon_i,\ i = 1, 2, ..., d$ ρίζες της μονάδας. Επομένως $\chi(\sigma) = \sum_{i=1}^{d} \epsilon_i$, οπότε:

$$\left|\sum_{i=1}^{d} \epsilon_i\right| = |\chi(\sigma)| = \chi(1) = d = \sum_{i=1}^{d} |\epsilon|.$$

Στην γνωστή λοιπόν ανισότητα $\left|\sum_{i=1}^{d} \epsilon_i\right| \leq \sum_{i=1}^{d} |\epsilon|$ ισχύει η ισότητα. Επομένως, κατάναγκη, θα είναι $\epsilon_1 = \epsilon_2 = ... = \epsilon_d =: \epsilon$, δηλαδή $\rho(\sigma) = \epsilon \cdot Id_V$.

(β) Εστω ρ_i παράστασεις της G που έχουν αντίστοιχους χαρακτήρες τους χ_i. Η $\rho = \oplus_{i=1}^{s}\rho_i$ θα έχει χαρακτήρα $\sum_{i=1}^{s}\chi_i = \chi$. Λόγω του (α) έχουμε:

$$ker\chi \overset{(\alpha)}{=} ker(\rho) = \cap_{i=1}^{s} ker(\rho_i) \overset{(\alpha)}{=} \cap_{i=1}^{s} ker(\chi_i).$$

(γ) «$\Leftarrow$» Για κάθε $i = 1, 2, ..., s$ ισχύει: $ker\chi_i = ker\rho_i \lhd G$. Επομένως και $N := \cap_{i=1}^{s} ker\chi_i \lhd G$.

«$\Rightarrow$» Εστω ότι N είναι αναλλοίωτη υποομάδα της G. Σύμφωνα με το (β) αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει παράσταση ρ με $ker\rho = N$, διότι αν ρ παράσταση με $ker\rho = N$ και $\rho = \oplus_{i=1}^{s}\rho_i$, όπου ρ_i ανάγωγες, τότε:

$$N = ker\rho = \cap_{i=1}^{s} ker\rho_i = \cap_{i=1}^{s} ker(\chi_{\rho_i}),$$

και μάλιστα οι χ_{ρ_i} θα είναι ανάγωγοι.

Θεωρούμε την ομάδα πηλίκων $\bar{G} := G/N$. Εστω $\bar{\rho}_{\text{ομ}}$ η ομαλή παράσταση αυτής. Είναι φανερό ότι $ker\bar{\rho}_{\text{ομ}} = \{1_{\bar{G}}\}$. Αν $\pi : G \longrightarrow \bar{G} = G/N$ η φυσική προβολή της G στην $\bar{G}$, έχουμε ότι:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\rho"'] & \bar{G} = G/N \arrow[d, "\bar{\rho}_{\text{ομ}}"] \\ & GL_n(K) \end{tikzcd}$$

η $\rho := \bar{\rho}_{\text{ομ}} \cdot \pi$, είναι μία παράσταση της G ως προς K, με $ker\rho := \pi^{-1}(ker\bar{\rho}_{\text{ομ}}) = N$.

(δ) Η G είναι απλή, εξ ορισμού, όταν οι μοναδικές αναλλοίωτες υποομάδες της, $N \lhd G$, είναι οι $N = \{1\}$ και $N = G$. Αυτό όμως ισχύει, λόγω της (γ), ακριβώς τότε όταν για <u>όλους</u> τους <u>ανάγωγους</u> χαρακτήρες $\chi_1, \chi_2..., \chi_h$ της G έχουμε $\cap_{i=1}^{h} ker\chi_i = \{1\}$ ή $\cap_{i=1}^{h} ker\chi_i = G$. Επομένως η G είναι απλή τότε και μόνο τότε όταν για όλους τους ανάγωγους χαρακτήρες της χ_i $(i = 1, 2, ..., h)$ ισχύει $ker\chi_i = \{1\}$ ή $ker\chi_i = G$. Παρατηρούμε ότι αν για κάποιον ανάγωγο χαρακτήρα χ της G ισχύει $ker\chi = G$, τότε, κατάνάγκη, $\chi = \chi_1$. Πράγματι, αν $ker\chi = G$ και ρ παράσταση της G με χαρακτήρα τον χ, τότε λόγω της (α), $ker\rho = G$. Επομένως

$$\rho : G \longrightarrow \{Id_V\} \subseteq GL(V).$$

Αφου χ ανάγωγος χαρακτήρας, έπεται ότι και η ρ είναι ανάγωγη. Συνεπώς $dim_K V = 1$ που σημαίνει ότι

$$\rho : G \longrightarrow \{1\} \subseteq K^*$$

οπότε αναγκαστικά $\chi = \chi_1$, δηλαδή η αλήθεια της (δ).

Παρατήρηση: Από το τελευταίο θεώρημα προκύπτει ότι, αν γνωρίζουμε τον πίνακα (αναγώγων) χαρακτήρων μιας πεπερασμένης ομάδας G, μπορούμε να βρούμε όλες τις κανονικές υποομάδες της. Βρίσκουμε τους πυρήνες όλων των αναγώγων χαρακτήρων από την σχέση:

$$ker\chi = \{\sigma \in G/\chi(\sigma) = \chi(1)\} = \cup_{\substack{k \in [G] \\ \chi(k) = \chi(1)}} k$$

και, στην συνέχεια, σχηματίζουμε τομές πυρήνων καθ΄ όλους τους δυνατούς τρόπους.

Παράδειγματα: **(1)** Εστω $G = S_3$,. Οι κλάσεις συζυγίας της S_3 είναι τρεις και μάλιστα οι $k_1 = [(1)], k_2 = [(1\ 2)], k_3 = [(1\ 2\ 3)]$ (δες, παράρτημα σελ. 150). Επομένως έχουμε τρείς ανάγωγους χαρακτήρες, έστω χ_1, χ_2, χ_3. Ο πίνακας τιμών των αναγώγων χαρακτήρων είναι ο εξής:(δες, σελ. 117)

	[1] k_1	[(1 2)] k_2	[(1 2 3)] k_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Από τον πίνακα τιμών βλέπουμε: $ker\chi_1 = S_3$, $ker\chi_2 = [1] \cup [(123)] = A_3$, $ker\chi_3 = [1] = \{1\}$. Οι $\{1\}, A_3, S_3$ είναι οι μόνες κανονικές υποομάδες της S_3, διότι οποιοσδήποτε συνδυασμός τομών δεν δίνει τίποτε το καινούργιο.

(2) Εστω $G = S_4$. Οι κλάσεις συζυγίας της S_4 είναι οι $k_1 = [(1)], k_2 = [(1\ 2)], k_3 = [(1\ 2)(3\ 4)], k_4 = [(1\ 2\ 3)], k_5 = [(1\ 2\ 3\ 4)]$ (δες, σελ. 150). Ο πίνακας των χαρακτήρων της S_4 είναι (δες, σελ. 121):

	[1] k_1	[(1 2)] k_2	[(1 2)(3 4)] k_3	[(1 2 3)] k_4	[(1 2 3 4)] k_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

Επομένως $ker\chi_1 = S_4$, $ker\chi_2 = A_4 = [1] \cup k_3 \cup k_4$, $ker\chi_3 = [1] \cup k_3 = V_4$(η τετραδική ομάδα του Klein), $ker\chi_4 = ker\chi_5 = \{1\}$. Και πάλι αυτές είναι οι μοναδικές κανονικές υποομάδες της S_4.

Με την βοήθεια των παραπάνω εργαλείων στους χαρακτήρες μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω σημαντικό θεώρημα της θεωρίας ομάδων:

Θεώρημα 2.10 (Burnside) *Κάθε πεπερασμένη ομάδα G τάξης $p^a q^b$ είναι επιλύσιμη.*

Απόδειξη: Της αποδείξεως του θεωρήματος προτάσουμε δύο λήμματα.

Λήμμα 2.11 *Εστω G μία πεπερασμένη ομάδα, K ένα σώμα χαρακτηριστικής μηδέν για το οποίο ισχύει η συνθήκη του Schur και χ ένας ανάγωγος χαρακτήρας της G ως προς το K. Αν $k \in [G]$ και Μ.Κ.Δ.$(\#(k), deg\chi) = 1$, τότε $\chi(k) = 0$ ή $|\chi(k)| = deg\chi$.*

Απόδειξη: Λόγω της υπόθεσης, ότι ο Μ.Κ.Δ.$(\#(k), deg\chi) = 1$, έχουμε ότι υπάρχουν ακέραιοι, s, t τέτοιοι ώστε $1 = s \cdot \#(k) + t \cdot deg\chi$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης με $\chi(k)/\chi(1)$ και έχουμε:

$$\frac{\chi(k)}{\chi(1)} = s \cdot \frac{\#(k)\chi(k)}{\chi(1)} + t \cdot \chi(k) \qquad (deg\chi = \chi(1)).$$

Οι αριθμοί $\chi(k)$ και $\frac{\#(k)\chi(k)}{\chi(1)}$ είναι ακέραιοι αλγεβρικοί (λήμμα 2.1 (3) και θεώρημα 2.5). Μάλιστα ο $\chi(k)$ είναι ρίζα της μονάδας. Εστω $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\chi(k) \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Αν $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$ τότε η norm του α ορίζεται ως εξής:

$$N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}}(\alpha) = \prod_{\phi \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})} \phi(\alpha)$$

Για $\alpha := \chi(k)/\chi(1) \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$ έχουμε κατ' αρχήν ότι $|\alpha| \leq 1$, διότι, λήμμα 2.1 (3),

$$|\chi(k)| = \left|\sum_{i=1}^{d} \epsilon_i\right| \leq \sum_{i=1}^{d} |\epsilon_i| = d = \chi(1).$$

Επομένως για κάθε $\phi \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ ισχύει

$$|\phi(\alpha)| \leq \phi(1) = 1$$

και τελικά παίρνουμε:

$$|N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq 1.$$

Οπως έχουμε ήδη πει, ο α είναι ακέραιος αλγεβρικός του $\mathbb{Q}(\zeta_m)$. Συνεπώς όλοι οι $\phi(\alpha)$ είναι επίσης ακέραιοι αλγεβρικοί. Δηλαδή ο $N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ είναι ακέραιος αλγεβρικός και ρητός. Επομένως $N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Το συμπέρασμά μας είναι ότι για $\alpha = \chi(k)/\chi(1)$ έχουμε $N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}}(\alpha) = 0$ ή 1. Αν $N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}}(\alpha) = 0$ τότε έχουμε $\alpha = 0$, δηλαδή $\chi(k) = 0$. Αν $N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}}(\alpha) = 1$, τότε αφού $|\phi(\alpha)| \leq 1$ για κάθε $\phi \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$, έπεται ότι $|\alpha| = 1$, δηλαδή $|\chi(k)| = \chi(1)$.

Λήμμα 2.12 *Αν η πεπερασμένη ομάδα G έχει κλάση συζυγίας $k \neq [1]$ της οποίας η τάξη είναι $\#(k) = p^\nu > 1$, $(\nu \in \mathbb{N})$ τότε, αν η G είναι απλή θα είναι κατάνάγκη κυκλική τάξεως δύναμης πρώτου αριθμού.*

Απόδειξη: Εστω $\sigma \in k, \sigma \neq 1$. Αν $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_h$ είναι οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G στο $\mathbb{C}$ (χ_1 ο μοναδιαίος), τότε, αφού $[\sigma] = k \neq [1]$, οι σχέσεις ορθογωνιότητας (πρόταση 1.4.3(2)) μας δίνουν:

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(1)\chi_i(\sigma) = 1 + \sum_{i=2}^{h} \chi_i(1)\chi_i(\sigma) = 0$$

Αριθμούμε κατά τέτοιο τρόπο τους χαρακτήρες χ_i έτσι ώστε για $i \in \{2, ..., h_0\}$ να ισχύει $p \not| \chi_i(1)$ ενώ για τους υπόλοιπους $i \in \{h_0 + 1, ..., h\}$ να ισχύει $p | \chi_i(1) (2 \leq h_0 \leq h)$.

Επομένως έχουμε:

$$1 + \sum_{i=2}^{h_0} \chi_i(1)\chi_i(\sigma) + \sum_{i=h_0+1}^{h} \chi_i(1)\chi_i(\sigma) = 0$$

Για κάθε $i \in \{2, ..., h_0\}$ έχουμε Μ.Κ.Δ.$(\#(k), \chi_i(1))$ =Μ.Κ.Δ.$(p^\nu, \chi_i(1)) = 1$. Το προηγούμενο λοιπόν λήμμα (2.11) μας δίνει: Για κάθε $i \in \{2, 3, ..., h_0\}$ ισχύει

$$\chi_i(\sigma) = 0 \quad 'h \quad |\chi_i(\sigma)| = \chi_i(1).$$

Αν για όλα τα $i \in \{2, 3, ..., h_0\}$ είχαμε ότι $\chi_i(\sigma) = 0$ τότε θα είχαμε:

$$1 + p \sum_{i=h_0+1}^{h} \frac{\chi_i(1)}{p} \chi_i(\sigma) = 0$$

Επειδή δε $\chi_i(\sigma)$ ακέραιος αλγεβρικός και $\frac{\chi_i(1)}{p}$ ακέραιος όλο το άθροισμα θα ήταν ακέραιος αλγεβρικός, δηλαδή ο

$$A := \sum_{i=h_0+1}^{h} \frac{\chi_i(1)}{p} \chi_i(\sigma) = -\frac{1}{p}$$

θα ήταν ακέραιος αλγεβρικός. Ο A λοιπόν σαν ακέραιος αλγεβρικός αλλά και ρητός θα έπρεπε να ήταν ακέραιος, άτοπο διότι $-1/p \notin \mathbb{Z}$. Επομένως υπάρχει $i_0 \in \{2, 3, ..., h_0\}$ τέτοιο ώστε

$$|\chi_{i_0}(\sigma)| = \chi_{i_0}(1).$$

Αν $\rho_{i_0} : G \longrightarrow GL(V_{i_0})$ είναι παράσταση της G με χαρακτήρα χ_{i_0} τότε, λήμμα 2.9:

$$\rho_{i_0}(\sigma) = \epsilon_{i_0} Id_V, \ \ (\epsilon_{i_0} \in \mathbb{C})$$

δηλαδή (δες, σελ. 148)

$$\rho_{i_0}(\sigma) \in Z(GL(V_{i_0}))$$

Εστω τώρα ότι η G είναι απλή. Επειδή η ομάδα $ker\rho_{i_0}$ είναι αναλλοίωτη υποομάδα της G έπεται ότι $ker\rho_{i_0} = G$ ή $ker\rho_{i_0} = \{1\}$. Αν $ker\rho_{i_0} = G$ τότε η ρ_{i_0} θα ήταν η μοναδιαία παράσταση βαθμού $dim_{\mathbb{C}}(V_{i_0})$ της G. Η παράσταση όμως ρ_{i_0} είναι ανάγωγη διότι ο χ_{i_0} είναι ανάγωγος. Η ρ_{i_0} σαν ανάγωγη μοναδιαία παράσταση θα είναι κατανάγκη, βαθμού $deg\rho_{i_0} = 1$. Επομένως θα είχαμε $\chi_{i_0} = \chi_1$, άτοπο.

Για την παράσταση λοιπόν ρ_{i_0} ισχύει $ker\rho_{i_0} = \{1\}$ και συνεπώς η

$$\rho_{i_0} \begin{cases} G & \hookrightarrow & GL(V_{i_0}) \\ \sigma & \longmapsto & \rho_{i_0}(\sigma) \in Z(GL(V_{i_0})) \end{cases}$$

είναι μία εμφύτευση της G στην $Z(GL(V_{i_0}))$. Αφού $\rho_{i_0}(\sigma) \in Z(GL(V_{i_0}))$, έπεται ότι για <u>κάθε</u> $\tau \in G$ $\rho_{i_0}(\tau)\rho_{i_0}(\sigma) = \rho_{i_0}(\sigma)\rho_{i_0}(\tau)$, δηλαδή ότι $\rho_{i_0}(\tau\sigma) = \rho_{i_0}(\sigma\tau)$ και επειδή η ρ_{i_0} είναι ένα προς ένα θα έχουμε $\tau\sigma = \sigma\tau$ πράγμα που σημαίνει ότι $\sigma \in Z(G), (\sigma \neq 1)$. Αποδείξαμε ότι η G έχει μη-τετριμμένο κέντρο και, αφού είναι απλή, θα έχουμε $G = Z(G)$, δηλαδή η G είναι αβελιανή, $G \neq \{1\}$. Αλλα G απλή, G αβελιανή και $G \neq \{1\}$ συνεπάγεται ότι, κατάνάγκη η τάξη της G είναι δύναμη πρώτου αριθμού.

Με την βοήθεια των τελευταίων λημμάτων είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το (p, q)-θεώρημα του Burnside.

Απόδειξη: του θεωρήματος (2.10)

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά ως προς την τάξη της ομάδος G. Αν $\#G = 1$ τότε προφανώς, η G είναι επιλύσιμη. Για δοσμένη ομάδα G τώρα, υποθέτουμε ότι αν H ομάδα με τάξη $\#H < \#G$ και ότι η τάξη της H είναι γινόμενο δύο το πολύ πρώτων αριθμών, τότε η H είναι επιλύσιμη. Ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Υποθέτουμε ότι $\alpha = 0$ (ανάλογα για $\beta = 0$) Στην περίπτωση αυτή η G είναι p-ομάδα και συνεπώς επιλύσιμη (δες, σελ. 153).

Περίπτωση 2: Υποθέτουμε ότι $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Εστω P μία p-Sylow υποομάδα της G. Προφανώς $P \neq \{1\}$, αφού $\alpha > 0$. Επιπλέον ισχύει $\{1\} < Z(P) \triangleleft P$, $\{1\} \neq Z(P)$. Αν $\sigma \in Z(P) \backslash \{1\}$, τότε η P είναι υποομάδα του κεντροποιητή του σ $Z_G(\sigma)$, $P \subseteq Z_G(\sigma)$. Είναι όμως γνωστό ότι (δες, σελ. 148):

$$\#[\sigma] = [G : Z_G(\sigma)]/[G : P] = \frac{\#G}{\#P} = \frac{p^\alpha q^\beta}{p^\alpha} = q^\beta$$

Η τάξη της κλάσεως συζυγίας είναι, λοιπόν, δύναμη πρώτου αριθμού.

Λόγω του λήμματος (2.12), αφού η G δεν είναι τάξεως δυνάμεως πρώτου αριθμού, η G δεν είναι απλή. Υπάρχει επομένως $N \triangleleft G$,

$$\{1\} < N < G, \quad N \neq \{1\},\ N \neq G.$$

Προφανώς $\#N, \#G/N < \#G$ και έχουν τάξη γινόμενο δυνάμεων το πολύ δύο πρώτων. Σύμφωνα με την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής, οι N και G/N είναι επιλύσιμες. Επομένως (δες, σελ. 153) και η G είναι επιλύσιμη.

Παρατηρήσεις:

(1) Το (p, q)-θεώρημα του Burnside είναι το καλύτερο δυνατό, με την έννοια ότι υπάρχουν ομάδες των οποίων η τάξη είναι γινόμενο δυνάμεων τριών ακριβώς πρώτων και των οποίων η ομάδα δεν είναι επιλύσιμη, όπως παραδείγματος χάριν η A_5.

(2) Με μεθόδους καθαρά της θεωρίας ομάδων (χωρίς την χρήση της θεωρίας χαρακτήρων) το θεώρημα αποδείχτηκε από τον H.Bender, A group theoretic proof of Burnside's $p^{\alpha}q^{\beta}$-theorem, Math.Z. 126 (1972), 327-328.

Χωρίς απόδειξη τέλος αναφέρουμε το

Θεώρημα 2.13 (Feit,Thomson (1963)) *Κάθε πεπερασμένη ομάδα περιττής τάξης είναι επιλύσιμη.*

Πρόκειται για ένα αρκετά πολύπλοκο και βαθύ αποτέλεσμα της θεωρίας ομάδων. Ηταν εικασία του Burnside ήδη από το 1911. (δες, W.Feit και J.G. Thomson, ((Solvability of groups of odd order)) Pacific.J. Math 13 (1963), 775-1029). Για μία πιο «βατή» απόδειξη δες το βιβλίο των H.Bender και G.Glauberman, Local Analysis for the Odd Order Theorem, Cambridge University Press, 1994).

3 Emmy Noether και θεωρία παραστάσεων

3.1 Modules

Εστω R ένας, όχι κατ' ανάγκη αντιμεταθετικός, δακτύλιος με μοναδιαίο $1_R \in R$.

Ορισμός 3.1 *Εστω M ένα μη-κενό σύνολο. Το M θα λέγεται αριστερό R-module όταν:*

(1) Το M είναι προσθετική αβελιανή ομάδα.

(2) Υπάρχει μια εξωτερική πράξη

$$\begin{cases} R \times M & \longrightarrow & M \\ (\rho, \mu) & \longmapsto & \rho \cdot \mu \end{cases}$$

τέτοια ώστε για όλα τα $r, r_1, r_2 \in R$ και $m, m_1, m_2 \in M$ να ισχύουν:

(i) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$.

(ii) $r(m_1 + m_2) = r_1 m_1 + r m_2$.

(iii) $r_2(r_2 m) = (r_1 r_2)m$.
Αν επιπλέον ισχύει η

(iv) $1 \cdot m = m$, *τότε το M θα λέγεται μοναδιαίο (unitary) R-module.*

Τα αριστερά R-modules M θα τα συμβολίζουμε με $_RM$. Ανάλογα ορίζονται δεξιά R-modules και συμβολίζονται με M_R.
Εστω $_RM$ ένα R-module και $N \subseteq M$. Το N θα λέγεται υπomodule του $_RM$ όταν το N είναι επίσης R-module ως προς τις πράξεις του M.
Προφανώς το $N \subseteq M$ είναι υπomodule τότε και μόνο τότε όταν

$$N + N \subset N \quad \text{και} \quad R \cdot N \subset N.$$

Παραδείγματα:

1. Ο R ως προς τον εαυτό του είναι ένα R-module. Τα υπomodule του $_RR$ θα λέγονται αριστερά module του R.

2. Εστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος και ${}_RM$ ένα αριστερό R-module. Τότε αν ορίσουμε $m\alpha := \alpha m$ τότε το ${}_RM$ γίνεται και δεξιό R-module.

3. Κάθε προσθετική αβελιανή ομάδα M είναι αριστερό $\mathbb{Z}$-module ως προς την πράξη

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times M & \longrightarrow & M \\ (\alpha, m) & \longmapsto & \alpha m \end{cases}$$

κάθώς και δεξιό $\mathbb{Z}$-module ως προς την πράξη

$$\begin{cases} M \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & M \\ (m, \alpha) & \longmapsto & m\alpha. \end{cases}$$

4. Αν R σώμα, όχι κατ΄ ανάγκη αντιμεταθετικό, τότε τα αριστερά R-module ταυτίζονται με τα δεξιά R-module.

Εστω ${}_RM$ αριστερό R-module και $(M_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια υποmodules του ${}_RM$. Ορίζουμε άθροισμα των υποmodules της οικογένειας $(M_i)_{i\in I}$ το υποmodule του M,

$$\sum_{i\in I} M_i := \{\sum_{r=1}^{n} a_{i_r} | n \in \mathbb{N}, \quad i_1, i_2, \cdots, i_n \in I, \quad a_{i_r} \in M_{i_r}\}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η τομή $\cap_{i\in I} M_i$ είναι υποmodule του ${}_RM$.

Ορισμός 3.2 *Εστω $E \subseteq {}_RM$. Το υποmodule*

$${}_R< E >:= \cap_{E\subset N\subset {}_RM} N$$

θα λέγεται υποmodule του ${}_RM$ που παράγεται από το E.

Προφανώς ισχύουν:

(1) ${}_R< E >= \sum_{a\in E} Ra$.
Αν $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$, τότε:

$${}_R< \{a_1, a_2, \cdots, a_r\} >=:< a_1, a_2, \cdots, a_r >= \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i | \lambda_i \in R\}.$$

(2) Αν $\{E_i | i \in I\}$ οικογένεια υποσυνόλων του ${}_RM$, τότε ισχύει:

$$< \cup_{i\in I} E_i >= \sum_{i\in I} {}_R < E_i > .$$

Αν ειδικά $\{M_i | i \in I\}$ οικογένεια υποομάδων του ${}_RM$, τότε:

$${}_R < \cup_{i\in I} M_i >= \sum_{i\in I} M_i.$$

Ορισμός 3.3 *Εστω $B \subseteq {}_RM$. Το B θα λέγεται βάση του ${}_RM$ όταν κάθε $a \in {}_RM$ έχει μονοσήμαντη παράσταση της μορφής:*

$$a = \sum_{u\in B} \lambda_u u, \quad \text{όπου } \lambda_u \in R, \quad \text{σχεδόν όλα μηδέν.}$$

Το R-module ${}_RM$ θα λέγεται ελεύθερο όταν έχει μια βάση B, δηλαδή όταν υπάρχει $B \subseteq {}_RM$ τέτοιο ώστε ${}_RM = {}_R< B >$ και αν $\sum_{u\in B} \lambda_u u = 0$ έπεται ότι όλα τα $\lambda_u = 0$.

Παραδείγματα:

1. Αν R είναι σώμα τότε το R-module ${}_RM$ είναι R-διανυσματικός χώρος. Επομένως κάθε υπomodule αυτού είναι ελεύθερο.

2. Το R-module ${}_RR$ είναι ελεύθερο με βάση το 1.

3. Το R-module ${}_RR^n$ είναι ελεύθερο με βάση την κανονική $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.

Θεώρημα 3.4 (Θεώρημα ύπαρξης ελεύθερων modules) *Αν R δακτύλιος με μοναδιαίο και B οποιοδήποτε σύνολο, τότε υπάρχει ελεύθερο R-module ${}_RM$ με βάση το B.*

Απόδειξη: Εστω
$M = \{\alpha : B \to R|$ τέτοιων ώστε για σχεδόν όλα τα $x \in B$ να ισχύει $\alpha(x) = 0\}$.
Το M γίνεται αριστερό R-module ως προς τις πράξεις:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(x) := \alpha_1(x) + \alpha_2(x), \quad (\lambda\alpha)(x) := \lambda\alpha(x).$$

Για κάθε $u \in B$, ορίζουμε:

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x = u \\ 0 & \text{αν} \quad x \neq u. \end{cases}$$

Ταυτίζουμε το u με το $\tilde{u}$ οπότε $B \subset {}_RM$. Εστω $\alpha \in M, \quad \alpha : B \to R$. Το α μπορούμε να το γράψουμε στην μορφή

$$\alpha = \sum_{u \in B} \alpha(u) u.$$

Επομένως έχουμε ότι $M =_R < B >$.

Τέλος, άν $\sum_{u \in B} \lambda_u u = 0$, όπου $\lambda_u \in R$, τότε ισχύει:

$$\forall v \in B, \quad 0 = \sum_{u \in B} \lambda_u \cdot u(v) = \lambda_v.$$

Ορισμός 3.5 *Εστω ${}_RM$ ένα (αριστερό) R-module και N ένα υποmodule αυτού. Ονομάζουμε module πηλίκων την προσθετική ομάδα M/N εφοδιασμένη με την πράξη:*

$$\begin{cases} R \times M/N & \longrightarrow & M/N \\ (r, m+N) & \longmapsto & rm + N \end{cases}$$

Αν ${}_RM'$ ένα άλλο (αριστερό) R-module, τότε η απεικόνιση $f : {}_RM \to {}_RM'$ θα λέγεται ομομορφισμός από R-modules, όταν για όλα τα $a, b \in {}_RM$ και $\lambda \in R$, ισχύουν:

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

(2) $f(\lambda c) = \lambda f(c)$.

Ιδιότητες 3.6

(1) *Αν το σύνολο E παράγει το R-module ${}_RM$ και $f_0 : E \to {}_RM'$, μια συνάρτηση του E στο ${}_RM'$, τότε υπάρχει το πολύ ένας R-module ομομορφισμός $f : {}_RM \to {}_RM'$ τέτοιος ώστε $rest_E f = f_0$.*

(2) *Αν B βάση του ${}_RM$ και $f_0 : B \to {}_RM'$, συνάρτηση του B στο ${}_RM'$, τότε υπάρχει <u>ακριβώς</u> ένας R-module ομομορφισμός $f : {}_RM \to {}_RM'$ τέτοιος ώστε $rest_B f = f_0$.*
<u>Σημείωση:</u> Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η f ορίζεται μονοσήμαντα ως εξής:

$$f : \begin{cases} {}_RM & \longrightarrow & {}_RM' \\ \sum \lambda_u u & \longmapsto & \sum \lambda_u f_0(u). \end{cases}$$

(3) (i) *Αν f είναι R-module ισομορφισμός, τότε το ίδιο είναι και ο $f^{-1} : {}_RM' \to {}_RM$.*

(ii) *Ο f είναι R-module ισομορφισμός ακριβώς τότε όταν υπάρχει $g : {}_RM' \to {}_RM$ με $f \circ g = Id_{{}_RM'}$ και $g \circ f = Id_M$.*

(4) *Εστω ${}_RM = {}_R\!< u_1, u_2, \cdots, u_n >_R$ <u>πεπερασμένα</u> <u>παραγόμενο</u> R-module. Το σύνολο $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ είναι βάση του ${}_RM$ τότε και μόνο τότε όταν:*

$$\eta \quad f : \begin{cases} R^n & \longrightarrow \quad {}_RM \\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) & \longmapsto \quad \sum \lambda_i u_i \end{cases},$$

είναι R-module ισομορφισμός.

Το σύνολο:

$$Hom_R({}_RM, {}_RM') := \{f : {}_RM \to {}_RM' | f \ \ R\text{-module ομομορφισμός}\}$$

είναι ως προς την πράξη:

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad \forall x \in {}_RM$$

αβελιανή ομάδα.

Ειδικότερα το σύνολο $End_R({}_RM) := Hom_R({}_RM, {}_RM)$ αποτελεί δακτύλιο με πράξη πολλαπλασιασμού την σύνθεση συναρτήσεων και μοναδιαίο στοιχείο το $1_{End_R(M)}$ το οποίο ταυτίζεται με την ταυτοτική απεικόνιση του M, Id_M. Η ομάδα $Aut_R({}_RM)$ των αυτομορφισμών του ${}_RM$, είναι η ομάδα των μονάδων του $End_R(M)$ και συμβολίζεται συχνά σαν $GL({}_RM)$.

Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε το

Θεώρημα 3.7 *Εστω $f : {}_RM \to {}_RM'$ R-module ομομορφισμός, $N \subset {}_RM$, και $N' \subset {}_RM'$. Αν $f(N) \subset N'$, τότε υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος R-module ομομορφισμός,*

$$f^* : {}_R(M/N) \longrightarrow {}_R(M'/N')$$

τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & M' \arrow[d, "\pi'"] \\ \frac{M}{N} \arrow[r, "f^*"] & \frac{M'}{N'} \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό (ν, ν' είναι οι φυσικές εμφυτεύσεις στο αντίστοιχο module πηλίκων). Επί πλέον ισχύουν:

1. $ker f^* = f^{-1}(N')/N$

2. $im f^* = (im f + N')/N'$

3. *Αν ο f είναι επιμορφισμός και $N = f^{-1}(N')$ τότε και ο f^* είναι ισομορφισμός.*

(Το 3. λέγεται 3ο θεώρημα ισομορφίας.)

Πόρισμα 3.8 *Εστω $f : {}_R M \to {}_R M'$ R-module ομομορφισμός. Εστω N υποmodule του πυρήνα $ker f$. Τότε υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένος R-module ομομορφισμός $f^* : M/N \to M'$ με την ιδιότητα το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\nu"'] & M' \\
 & \frac{M}{N} \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Επί πλέον ισχύουν:

(1) $ker f^* = ker f/N$

(2) $im f^* = im f$, *και*

(3) (i) *Αν $N = ker f$, τότε ο f^* είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Αν, επιπλέον, ο f είναι επιμορφισμός, τότε ο f^* είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη: Ειδική περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος για $N' = \{0\}$

Αμεση συνέπεια των $3(i)$ και (ii) του προηγούμενου πορίσματος είναι η κανονική ανάλυση του f :

$$M \xrightarrow{\nu} M/ker f \xrightarrow{f^*} im f \xrightarrow{id} M'$$

Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε επίσης τα:

Θεώρημα 3.9 *(2ο θεώρημα ισομορφίας)*

Εστω $N \leq N' \leq {}_RM$ υποmodules. Η απεικόνιση:

$$\varphi : \begin{cases} \frac{(M/N)}{(N'/N)} & \longrightarrow & M/N' \\ (a+N)+N'/N & \longmapsto & a+N' \end{cases}$$

είναι R-module ισομορφισμός.

Θεώρημα 3.10 *(1^o θεώρημα ισομορφίας)*

Αν $N, N' \leq {}_RM$ υποmodules του ${}_RM$, τότε η απεικόνιση:

$$\begin{cases} N/N \cap N' & \longrightarrow & \frac{N+N'}{N'} \\ a+(N\cap N') & \longmapsto & a+N' \end{cases}$$

είναι R-module ισομορφισμός .

Ορισμός 3.11 *Εστω ${}_RM$ αριστερό R-module και $(M_i)_{i\in I}$ οικογένεια υποmodules. Το ${}_RM$ είναι το <u>ευθύ άθροισμα</u> των M_i, ${}_RM = \oplus_{i\in I}M_i$, όταν κάθε $a \in {}_RM$ έχει μια μονοσήμαντη παράσταση $a = \sum_{i\in I} a_i$, όπου $a_i \in {}_RM_i$ και για όλα σχεδόν τα $a_i \in {}_RM_i$, ισχύει $a_i = 0$.*

<u>Παρατηρήσεις :</u>

1. Αν $B \subset {}_RM$ είναι βάση του ${}_RM$, τότε, προφανώς ${}_RM = \oplus_{b\in B}Rb$.

2. Εστω $(M_i)_{i\in I}$ οικογένεια από υποmodules του ${}_RM$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι μεταξύ τους ισοδύναμες:

   (a) $M = \oplus_{i\in I}M_i$.

   (b) $M = \sum_{i\in I} M_i$ και, αν $\sum_{i\in I} a_i = 0$, όπου τα $a_i \in M_i$, τότε $a_i = 0$ για κάθε $i \in I$.

   (c) ${}_RM = \sum_{i\in I} M_i$ και για κάθε $i \in I$, ισχύει $M_i \cap \sum_{j\in I-\{i\}} M_j = \{0\}$.
   <u>Απόδειξη :</u>
   «$(a) \Rightarrow (b)$ »
   Εξ υποθέσεως, κάθε $a \in {}_RM$ έχει μια παράσταση της μορφής $a = \sum_{i\in I} a_i$ με $a_i \in M_i$. Επομένως

$${}_RM = \sum_{i\in I} M_i.$$

Αν τώρα $0 = \sum_{i \in I} a_i$, τότε αφού το 0 γράφεται και στη μορφή $0 = \sum_{i \in I} 0$, το μονοσήμαντο της παράστασης μας δίνει, κατ΄ ανάγκη, ότι $a_i = 0$ για κάθε $i \in I$.

«$(b) \Rightarrow (c)$»

Εστω ότι για κάποιο $i \in I$, $a_i \in M_i \cap \sum_{j \in I - \{i\}} M_j$. Το a_i γράφεται επομένως στη μορφή

$$a_i = \sum_{j \neq i \;\; j \in I} a_j, \quad \text{όπου} \quad a_j \in M_j,$$

οπότε, λόγω της (b), έπεται ότι $a_i = 0$.

«$(c) \Rightarrow (a)$»

Αφού ${}_RM = \sum_{i \in I} M_i$, συνεπάγεται ότι κάθε $a \in {}_RM$ έχει μια παράσταση της μορφής $a = \sum_{i \in I} a_i$, $a_i \in M_i$. Εστω ότι έχει δύο παραστάσεις:

$$a = \sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i', \quad a_i' \in {}_RM_i.$$

Επομένως, για κάθε $i \in I$,

$$a_i - a_i' = \sum_{j \in I - \{i\}} (a_j' - a_j) \in M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}, \;\; \text{δηλαδή} \;\; a_i = a_i'.$$

3. Αν ${}_RM = \oplus_{i \in I} M_i, {}_RM'$, R-modules και $\{f_i : M_i \to M\}_{i \in I}$ οικογένεια R-module ομομορφισμών, τότε υπάρχει ακριβώς ένας R-module ομομορφισμός $f : {}_RM \to {}_RM'$ τέτοιος ώστε για κάθε $i \in I$ να ισχύει, $rest_{M_i} f = f_i$ και ο f αυτός ορίζεται ως εξής:

$$f : \begin{cases} {}_RM & \longrightarrow \;\; {}_RM' \\ \sum_{i \in I} a_i & \longmapsto \;\; \sum_{i \in I} f_i(a_i) \end{cases}$$

Αν ${}_RM = \oplus_{i \in I} M_i$, τότε, για κάθε $j \in I$, ορίζουμε την κανονική j-προβολή:

$$\pi_j : \begin{cases} M & \longrightarrow \;\; M_j \\ \sum_{i \in I} a_i & \longmapsto \;\; a_j \end{cases}$$

η οποία, προφανώς, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ο π_j είναι R-module ομομορφισμός και $rest_{M_j} \pi_j = Id_{M_j}$.
2. $ker \pi_j = \oplus_{i \in I - \{j\}} M_i \leq {}_RM$.
3. $Id_M = \sum_{j \in I} \pi_j$.

4. $\pi_i \circ \pi_j = \pi_j \circ \pi_i = \begin{cases} \pi_i, & \text{για} \quad i = j \\ 0, & \text{για} \quad i \neq j. \end{cases}$

Θεώρημα 3.12 *Εστω ${}_RM$ ένα αριστερό R-module, $r \in \mathbb{N}$, και επίσης $\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_r \in End_R(M)$ όπου $Id_M = \sum_{i=1}^{r} \pi_i$ και*

$$\pi_i \circ \pi_j = \pi_j \circ \pi_i = \begin{cases} \pi_i, & \textit{αν} \quad i = j \\ 0, & \textit{για} \quad i \neq j \end{cases}$$

Τότε ${}_RM = \oplus_{i=1}^{r} \pi(M)$.

Απόδειξη : Εστω $a \in {}_RM$, τότε $a = id_M(a) = \sum_{i=1}^{r} \pi_i(a)$ δηλαδή ${}_RM = \sum_{i=1}^{r} \pi_i(M)$. Από την άλλη μεριά, αν $0 = \sum_{i=1}^{r} a_i$ με $a_i = \pi_i(x_i)$ και $x_i \in {}_RM_i$, τότε:

$$0 = \pi_j(0) = \pi_j(\sum_{i=1}^{r} a_i) = \sum_{i=1}^{r} \pi_j \circ \pi_i(x_i) = a_i,$$

δηλαδή το άθροισμα είναι ευθύ.

Θεώρημα 3.13 *Αν ${}_RM = {}_RM_1 \oplus {}_RM_2$, τότε η απεικόνιση*

$$\begin{cases} M/M_1 & \longrightarrow & M_2 \\ (a_1 + a_2) + M_1 & \longmapsto & a_2 \end{cases}$$

είναι R-module ισομορφισμός.

Ορισμός 3.14 *Εστω ${}_RM$ ένα αριστερό R-module, $N \leq {}_RM$ υποmodule του ${}_RM$. Το N λέγεται ευθύς προσθεταίος του ${}_RM$ όταν υπάρχει ένα υποmodule N_1 του ${}_RM$ τέτοιο ώστε ${}_RM = N \oplus N_1$.*
Το ${}_RM$ θα λέγεται πλήρως αναλύσιμο (ή ημιαπλό) όταν κάθε υποmodule του είναι ευθύς προσθεταίος αυτού.
Το ${}_RM$ θα λέγεται ανάγωγο (ή απλό) όταν το $\{0\}$ και το ${}_RM$ είναι τα μόνα υποmodule του ${}_RM$.

Παρατήρηση : Το ${}_RM$ είναι ανάγωγο ακριβώς τότε όταν, για κάθε $a \in {}_RM$ $a \neq 0$, ${}_RM = {}_R\!< a >$.
Πράγματι, έστω $a \in {}_RM$, $a \neq 0$ και $N =< a > \leq {}_RM$. Αφού ${}_RM$ ανάγωγο και $\{0\} \neq N$

συνεπάγεται ότι $N = {}_R M$. Αντίστροφα, έστω $N \leq {}_R M$ υποmodule του M και ότι $N \neq \{0\}$. Επομένως υπάρχει ένα $a \in N - \{0\}$. Τότε όμως ${}_R M = {}_R < a > \leq N \leq {}_R M$, δηλαδή $N = {}_R M$.

Ορισμός 3.15 *Εστω $R_1, R_2, \cdots, R_k,\ \ R'_1, R'_2, \cdots, R'_l$ δακτύλιοι με μοναδιαίο. Εστω M αβελιανή ομάδα η οποία είναι αριστερό R_i-module για $i = 1, 2, \cdots, k$ και δεξιό R_j-module για $j = 1, 2, \cdots, l$. Συμβολικά γράφουμε $M = {}_{R_i} M$ και $M = M_{R_j}$. Το M θα λέγεται $(R_1, R_2, \cdots, R_k)$-αριστερό και $(R'_1, R'_2, \cdots, R'_l)$-δεξιό πολυmodule και θα το γράφουμε*

$$M =_{R_1, R_2, \cdots, R_k} M_{R'_1, R'_2, \cdots, R'_l}$$

αν ισχύουν:

1. $\forall \lambda_i \in R_i,\ \ \forall \lambda_j \in R_j, \quad \lambda_i(\lambda_j a) = \lambda_j(\lambda_i a)$
2. $\forall \lambda'_\rho \in R'_\rho,\ \ \forall \lambda'_\sigma \in R'_\sigma, \quad (a\lambda'_\rho)\lambda'_\sigma = (a\lambda'_\sigma)\lambda'_\rho$ *και*
3. $\forall \lambda_i \in R_i,\ \ \forall \lambda'_\rho \in R'_\rho, \quad (\lambda_i a)\lambda'_\rho = \lambda_i(a\lambda'_\rho)$.

Για την θεωρία παραστάσεων πεπερασμένων ομάδων σπουδαία είναι η εξής, ειδική, περίπτωση:
Αν R, S δακτύλιοι, με μοναδιαίο, τότε έχουμε τα ακόλουθα δυνατά bimodules:

$${}_{R,S}M, \quad {}_R M_S, \quad M_{R,S}.$$

Παραδείγματα :

1. Τον δακτύλιο R μπορούμε να τον φτιάξουμε αριστερό και δεξιό R-module, έχουμε λοιπόν ${}_R R_R$. Τα υποmodule αυτού θα λέγονται δίπλευρα ιδεώδη του R.
2. Εστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος και ${}_R M$ αριστερό R-module. Το ${}_R M$ γίνεται και δεξιό R-module αν ορίσουμε $a\lambda := \lambda a$. Επομένως έχουμε τα παρακάτω bimodules:

$${}_{R,R}M, \quad {}_R M_R, \quad M_{R,R}.$$

3. Εστω $j : R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων και $M := {}_SM$ ένα αριστερό S-module. Ορίζουμε:

$$j^* : \begin{cases} R \times M & \to M \\ (\lambda, a) & \mapsto j(\lambda)a \end{cases}$$

και $\lambda a = j(\lambda)a$. Μέσω της j^* φτιάχνουμε το M αριστερό R-module (ανάλογα για δεξιό R-module).

Η j^* θα λέγεται η μέσω της j επαγόμενη αριστερή R-module δομή. Ομοίως στο ${}_SM_S$, μπορούμε μέσω της j να ορίσουμε στο M μια R-bimodule δομή. Ιδιαίτερα στο ${}_RS_R$, αν $j(R) \subset Z(S) = \{a \in S | as = sa, \ \ \forall s \in S\}$ τότε η j επάγει σε κάθε αριστερό S-module μια bimodule δομή, $M =_{R,S} M$. Ειδικά, αν $R \leq S$ και $j : R \hookrightarrow S$ η εμφύτευση, τότε η j^* είναι ο περιορισμός των scalars στο R.

3.2 Παραστάσεις και module παραστάσεων

Εστω G μια πεπερασμένη ομάδα, K ένα σώμα και M ένα K-module. Η ιδέα της Noether ήταν να θεωρήσει ομομορφισμούς K-αλγεβρών

$$K[G] \xrightarrow{\varphi} End_K(M)$$

και να πάρει τον περιορισμό αυτών στην G, κατά το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & Aut_K(M) \arrow[d] \\ K[G] \arrow[r, "\varphi"] & End_K(M) \end{tikzcd}$$

Εστω R όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, δακτύλιος με $1_R \in R$.

Ορισμός 3.16 *Εστω K αντιμεταθετικός δακτύλιος. Ενα K-module θα λέγεται K-άλγεβρα όταν επιπλέον*

1. *Στο A έχουμε και πολλαπλασιασμό ο οποίος μαζί με την προσθετική δομή του module, γίνεται δακτύλιος με μοναδιαίο.*

2. Για κάθε $\lambda \in R, \quad a, b \in A, \quad \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Παρατηρήσεις :

1. Η κανονική απεικόνιση:
$$j : \begin{cases} K & \to A \\ \lambda & \mapsto \lambda \cdot 1_A \end{cases}$$
είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

2. Αν K είναι αντιμεταθετικό σώμα, τότε η j είναι ένα προς ένα (injective).
Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\lambda - \mu \neq 0$ τότε $(\lambda - \mu) \cdot 1_A \neq 0$.
Εστω $\lambda' := \lambda - \mu$ και έστω $\lambda' \cdot 1_A = 0$. Τότε
$$\lambda'^{-1}(\lambda' \cdot 1_A) = (\lambda'^{-1}\lambda') \cdot 1_A = 1_A \neq 0,$$
το οποίο είναι άτοπο.
Αν λοιπόν K είναι σώμα τότε, μέσω της j, ταυτίζουμε το K με την εικόνα, δηλαδή θεωρούμε το K σαν υποδακτύλιο της K-άλγεβρας A.

3. $j(K) \subset Z(A)$. Πράγματι:
$$j(\lambda)a = (\lambda \cdot 1_A)a = \lambda(1_A \cdot a) = \lambda a = a\lambda = a \cdot j(\lambda).$$

4. Εστω, αντίστροφα, A δακτύλιος με $1 \in A$ και $j : K \to A$ ομομορφισμός δακτυλίων με $j(K) \subset Z(A)$. Τότε ο A είναι μια K-άλγεβρα. Αυτό το βλέπει κανείς εύκολα ορίζοντας $\lambda \cdot a := j(\lambda) \cdot a$ και αποδεικνύοντας τις απαιτούμενες ιδιότητες.

5. Ειδική περίπτωση: Αν $K \subseteq Z(A)$, A δακτύλιος με μοναδιαίο, τότε ο A είναι K-άλγεβρα.

Παραδείγματα :

1. Ο δακτύλιος ομάδος.
Εστω K αντιμεταθετικός δακτύλιος, G πεπερασμένη ομάδα και $K[G]$ το ελεύθερο K-module με βάση την G (δες θεώρημα 3.4), δηλαδή $K[G] = K^G$ με πράξεις τις συνήθεις

πράξεις σε συναρτήσεις. Κάθε στοιχείο $j \in K[G]$ έχει μια μονοσήμαντη παράσταση της μορφής

$$j = \sum_{\sigma \in G} j(\sigma) \cdot \sigma =: \sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \cdot \sigma$$

Εδώ, θυμούμαστε την ταύτιση που κάναμε στο θεώρημα 3.4 μεταξύ του σ σαν σ-τοιχείου και σαν συνάρτησης

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν} \quad \sigma = t \\ 0, & \text{όταν} \quad \sigma \neq t \end{cases}$$

και ότι $K[G] = \oplus_{\sigma \in G} K\sigma$.

Ο πολαπλασιασμός ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} K[G] \times K[G] & \longrightarrow & K[G] \\ (\sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \sigma, \sum_{t \in G} \mu_t t) & \longmapsto & \sum_{t' \in G} \nu_{t'} \cdot t' \end{cases}$$

με $\nu_{t'} := \sum_{\sigma, t \in G, \sigma \cdot t = t'} \lambda_\sigma \mu_t$. Το $K[G]$ αποτελεί δακτύλιο ως προς την πρόσθεση σαν K-module και ως προς τον ορισθέντα πολλαπλασιασμό. Το $1 \in G$ είναι και μοναδιαίο του $K[G]$. Επίσης η $G \subseteq E(K[G])$ (ομάδα μονάδων του $K[G]$). Τελικά το K-module $K[G]$ είναι μια K-άλγεβρα.

2. Εστω K αντιμεταθετικός δακτύλιος και M ένα K-module. Ο δακτύλος των K-ενδομορφισμών του M $End_K(M)$ αποτελεί μια K-άλγεβρα.

3. Εστω K αντιμεταθετικός δακτύλιος. Ο δακτύλιος των n επί n πινάκων με στοιχεία από το K, $M_n(K)$, είναι επίσης μια K-άλγεβρα.

Ορισμός 3.17 *Εστω A, A' K-άλγεβρες. Μια απεικόνιση $j : A \to A'$ είναι ομομορφισμός K-αλγεβρών όταν η j είναι ομομορφισμός δακτυλίων και συγχρόνως ομομορφισμός modules.*

Ορισμός 3.18 *Εστω K αντιμεταθετικός δακτύλιος και A μια K-άλγεβρα, F ένα K-module. Μια παράσταση της A υπέρ το F θα λέγεται κάθε ομομορφισμός K-αλγεβρών*

$$\rho : A \longrightarrow End_K(F)$$

Δυο παραστάσεις ρ και ρ' της A υπέρ το F θα λέγονται ισοδύναμες όταν υπάρχει ισομορφισμός από modules $\varphi : F \to F'$ τέτοιος ώστε:

$$\forall a \in A, \quad \varphi \circ \rho(a) = \rho'(a) \circ \varphi : F \longrightarrow F'.$$

Θεμελιώδες Θεώρημα 3.19 *Εστω K αντιμεταθετικός δακτύλιος, A μια K-άλγεβρα F ένα K-module και $\rho : A \to End_K(F)$ παράσταση της A υπέρ το F. Τότε:*

1. *Το K-module F γίνεται μέσω του πολλαπλασιασμού*

$$\rho^* : \begin{cases} A \times F & \to F \\ (a, v) & \mapsto \rho(a)(v) =: av \end{cases}$$

είναι αριστερό A-module.

2. *Αν $j : \begin{cases} K & \to A \\ \lambda & \mapsto \lambda \cdot 1_A \end{cases}$ ο φυσικός ομομορφισμός του K στην A τότε ισχύει*

$$\forall \lambda \in K, \ \ \forall v \in F, \ \ \lambda v = \rho(j(\lambda))v = j(\lambda)v$$

δηλαδή η δομή του A-module που μας δίνει η ρ^* ξαναδίνει, αν την περιορίσουμε στο $j(K)$, την αρχική δομή του F σαν K-module.

3. *Για κάθε $\lambda \in K$ και για κάθε $a \in A$ ισχύει $\lambda(av) = a(\lambda v)$, δηλαδή τα δύο γινόμενα αντιμετατίθενται, οπότε το F είναι ένα (A, K)-bimodule.*

<u>Απόδειξη:</u>

1. Ισχύουν τα εξής:

$$a(v_1 + v_2) := \rho(a)(v_1 + v_2) = \rho(a)(v_1) + \rho(a)(v_2) =: av_1 + av_2.$$

$$(a + b)(v) := \rho(a + b)(v) = (\rho(a) + \rho(b))(v) =$$

$$:= \rho(a)(v) + \rho(b)(v) = av + bv.$$

$$1_A \cdot v = \rho(1_A)(v) = Id_F(v) = v.$$

Επομένως το K-module F είναι και (αριστερό) A-module.

2. $\rho(j(\lambda))(v) = \rho(\lambda \cdot 1_A)(v) = \lambda \cdot v.$

3. Τέλος:

$$\lambda(av) := \lambda(\rho(a)(v)) = \lambda\rho(a)(v) =$$

$$= \rho(a)(\lambda v) =: a(\lambda v).$$

Ορισμός 3.20 *Το αριστερό A-module του προηγουμένου θεωρήματος* (F,ρ^*) *θα λέγεται* *module παράστασης της παράστασης* ρ *της άλγεβρας* A.

Θεώρημα 3.21 *Οι παραστάσεις* ρ *και* ρ' *της άλγεβρας* A *είναι ισοδύναμες ακριβώς τότε όταν* $(F,\rho^*) \cong (F',\rho'^*)$ *σαν αριστερά A-modules.*

Απόδειξη: Οι ρ, ρ' είναι ισοδύναμες όταν υπάρχει K-module ισομορφισμός $\varphi : F \to F'$ τέτοιος ώστε για κάθε $a \in A$, $\varphi \circ \rho(a) = \rho'(a) \circ \varphi$, δηλαδή για κάθε $a \in A$ και για κάθε $v \in F$, $\varphi(\rho(a))(v) = \rho'(a)(\varphi(v)))$. Επομένως οι ρ και ρ' είναι μεταξύ τους ισοδύναμες ακριβώς τότε όταν $\varphi(av) = a\varphi(v)$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $v \in F$. Δηλαδή ακριβώς τότε όταν ο $\varphi : F \to F'$ είναι A-modules ισομορφισμός.

Θεώρημα 3.22 *Εστω* A *μια* K*-άλγεβρα,* ${}_AF$ *ένα αριστερό A-module και*

$$f : \begin{cases} K & \to A \\ \lambda & \mapsto \lambda \cdot 1_A \end{cases}$$

ο κανονικός ομομορφισμός. Τότε το F *με πράξη:*

$$\begin{cases} K \times F & \to F \\ (\lambda, v) & \mapsto f(\lambda)v = (\lambda \cdot 1_A)v = \lambda v \end{cases}$$

γίνεται K*-module και ισχύει:*

$$\forall \lambda \in K \;\; \text{και} \;\; \forall a \in A, \;\; \lambda(av) = a(\lambda v).$$

Μέσω της A *φτιάχνουμε λοιπόν το* F *κατά φυσικό τρόπο* K*-module και μάλιστα το* F *γίνεται* (A,K)*-bimodule.*

Απόδειξη: Εχουμε:

$$\lambda(v_1 + v_2) = (\lambda \cdot 1_A)(v_1 + v_2) = (\lambda \cdot 1_A)v_1 + (\lambda \cdot 1_A)v_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2.$$

$$(\lambda + \mu)v = ((\lambda + \mu) \cdot 1_A)v = (\lambda \cdot 1_A + \mu \cdot 1_A)v = (\lambda \cdot 1_A)v + (\mu \cdot 1_A)(v) = \lambda v + \mu v.$$

$$\lambda(av) = (\lambda \cdot 1_A)(av) = (\lambda \cdot 1_A a)(v) = (\lambda a)v = (a\lambda)(v).$$

Θεώρημα 3.23 *Εστω* F *ένα αριστερό A-module (δηλαδή* $F = {}_AF$ *και, λόγω του θεωρήματος* 3.22, $F = {}_KF$*). Τότε:*

1. *Η απεικόνιση (για $a \in A$):*

$$\varphi_a : \begin{cases} F & \to F \\ v & \mapsto av \end{cases}$$

είναι ένας ενδομορφισμός του ${}_K F$.

2. *Η κανονική απεικόνιση:*

$$\rho : \begin{cases} A & \to End_K(F) \\ a & \mapsto \varphi_a \end{cases}$$

είναι μια παράσταση της A *ως προς το* ${}_K F$ *η οποία έχει ως module παράστασης το* $({}_K F, \rho^*) =_A F$.

Απόδειξη:

1. Εχουμε $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$. Από το θεώρημα 3.22 έπεται ότι ισχύει $a(\lambda v) = \lambda(av)$. Επομένως ο φ_a είναι K-ενδομορφισμός.

2. Για κάθε $v \in F$ ισχύει:

$$\rho(a+b)(v) = (a+b)(v) = av + bv =$$

$$= \rho(a)(v) + \rho(b)(v) \Rightarrow \rho(a+b) = \rho(a) + \rho(b).$$

$$\rho(ab)(v) = (ab)v = a(bv) = \rho(a)(\rho(b)(v)) =$$

$$= (\rho(a) \cdot \rho(b))(v) \Rightarrow \rho(ab) = \rho(a) \cdot \rho(b)$$

Αρα ο ρ είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Αλλά

$$\rho(\lambda a)(v) = (\lambda a)v = \lambda(av) = \lambda(\rho(a)(v), \quad \forall v \in F$$

Συνεπώς $\rho(\lambda a) = \lambda \rho(a)$ δηλαδή ο ρ είναι K-module ομομορφισμός. Αρα τελικά ρ είναι ομομορφισμός K-αλγεβρών, δηλαδή μια παράσταση της A ως προς το ${}_K F$ με module παράστασης $({}_K F, \rho^*) = {}_A F$.

Ορισμός 3.24 *Η παράσταση* ρ *του προηγούμενου θεωρήματος* 3.23 *λέγεται η παράσταση η αντιστοιχούσα στο* A*-module* F.

Από τα προηγούμενα θεωρήματα έχουμε ότι σε κάθε παράσταση $\rho : A \to End_K(F)$ αντιστοιχεί κάποιο αριστερό A-module σαν module παράστασης και κάθε αριστερό A-module είναι module μιας παράστασης ρ της A. Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο:

Θεώρημα 3.25 *Αν K αντιμεταθετικός δακτύλιος, τότε υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, ανάμεσα στις κλάσεις ισοδυνάμων παραστάσεων μιας K-άλγεβρας A και κλάσεις ισομορφίας (αριστερών) A-modules σαν modules παραστάσεων.*

Εστω τώρα K σώμα. Η K-άλγεβρα A είναι (σαν K-module) και K-διανυσματικός χώρος. Εστω $dim_K A < \infty$. Αν $\rho : A \to End_K(F)$ μια παράσταση της A τότε και ${}_K F$ είναι επίσης K-διανυσματικός χώρος

Η $dim_K F$ θα λέγεται βαθμός της παράστασης.

Στα επόμενα θα θεωρούμε παραστάσεις πεπερασμένου βαθμού, $dim_K F < \infty$.

Θεώρημα 3.26 *Εστω A μια K-άλγεβρα με $dim_K A < \infty$. Οι κλάσεις ισοδυνάμων παραστάσεων (πεπερασμένου βαθμού) της A αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα στις κλάσεις ισομορφίας των πεπερασμένα παραγόμενων A-modules.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι το ${}_A F$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο ακριβώς τότε όταν ισχύει $dim_K F < \infty$.

Εστω $F =_A < u_1, u_2, \cdots, u_m >$. Εξ υποθέσεως $A =_K < a_1, a_2, \cdots, a_n >$.

Κάθε $v \in F$, γράφεται στη μορφή

$$v = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \lambda_j^{(i)} a_i) u_j$$

όπου $\lambda_j^{(i)} \in K$. Επομένως

$$F =_K < a_i u_j | i = 1, 2, \cdots, n, \ \ j = 1, 2, \cdots, m >, \ \ \text{δηλαδή} \ \ dim_K F < \infty.$$

Αντίστροφα, έστω $F =_K < v_1, v_2, \cdots, v_s >$. Τότε κάθε $u \in F$, γράφεται:

$$u = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{s} (\lambda_i \cdot 1_A) v_i. \ \ \text{Συνεπώς} \ \ F =_A < n v_1, v_2, \cdots, v_s > .$$

Εστω τώρα V, W K-διανυσματικοί χώροι.

Ορισμός 3.27 *Εστω A K-άλγεβρα με* $dim_K A < \infty$, $\rho : A \to End_K(V)$ *παράσταση της A και* (V, ρ^*) *το module παράστασης αυτής.*

1. *Μια παράσταση* $\rho' : A \to End_K(V')$ *θα λέγεται υποπαράσταση της ρ όταν το* $(V', \rho'^*) \subseteq (V, \rho^*)$ *(είναι A-υπomodule του* (V, ρ^*)*)*

2. *Η ρ θα λέγεται ευθύ άθροισμα των υποπαραστάσεων* $\rho_i : A \to End_K(V_i)$ *και θα συμβολίζεται με* $\rho = \oplus_{i=1}^{r} \rho_i$ *όταν* $(V, \rho^*) = \oplus_{i=1}^{r} (V_i, \rho_i^*)$.

3. *Η ρ θα λέγεται ανάγωγη όταν* (V, ρ^*) *είναι ένα ανάγωγο (απλό) αριστερό A-module.*

4. *Η ρ θα λέγεται πλήρως αναλύσιμη όταν το* (V, ρ^*) *είναι πλήρως αναλύσιμο αριστερό A-module.*

Σημείωση : Προφανώς ένα module είναι πλήρως αναλύσιμο όταν κάθε υπomodule του είναι ευθύς προσθεταίος αυτού.

Ειδικά τώρα παίρνουμε $A = K[G]$.

Θεώρημα 3.28 *Εστω G πεπερασμένη ομάδα και* $\rho : K[G] \to End_K(V)$ *παράσταση της* $K[G]$ *ως προς τον V. Εστω* $W \leq V$ *(υπόχωρος του K-διανυσματικού χώρου V). Τότε:*

1. *Η* $\rho_G : G \to GL(V)$ *είναι παράσταση της G (η* ρ_G *είναι ο περιορισμός της ρ στην G).*

2. *Ο W είναι* $K[G]$*-υπomodule του* (V, ρ^*) *ακριβώς τότε όταν ο W είναι* ρ_G*-αναλλοίωτος.*

3. *Η* $\rho' : K[G] \to End_K(W)$ *είναι μια υποπαράσταση της ρ τότε και μόνο τότε όταν* ρ'_G *είναι υποπαράστση της* ρ_G.

4. *Η ρ είναι ανάγωγη ακριβώς τότε όταν η* ρ_G *είναι ανάγωγη.*

5. *Αν* $\rho = \oplus_{i=1}^{r} \rho_i$ *τότε* $\rho_G = \oplus_{i=1}^{r} \rho_{i,G}$ *και αντιστρόφως.*

6. *Η ρ είναι πλήρως αναλύσιμη ακριβώς τότε όταν η* ρ_G *είναι πλήρως αναλύσιμη.*

Απόδειξη:

1. Ο ομομορφισμός δακτυλίων $\rho : K[G] \to End_K(V)$ επάγει έναν ομομορφισμό ομάδων:

$$E(K[G]) \longrightarrow E(End_K(V)) = GL(V)$$

όπου $E(R)$ συμβολίζει την ομάδα των μονάδων του δακτυλίου R.
Επειδή $G \subset E(K[G])$, έπεται ότι η $\rho_G : G \to GL(V)$ είναι μια παράσταση της G.

2. Εστω $W \leq (V, \rho^*)$ ένα $K[G]$-υποmodule. Για κάθε $a \in K[G]$ και για κάθε $w \in W$, ισχύει $aw = \rho(a)(w) \in W$. Ιδιαίτερα για κάθε $\sigma \in G$ και κάθε $w \in G$, ισχύει:

$$\rho(\sigma)(w) = \rho_G(\sigma)(w) \in W,$$

δηλαδή ο W είναι ρ_G-αναλλοίωτος.
Αντίστροφα τώρα έστω ότι ο W είναι ρ_G-ανλλοίωτος, δηλαδή ότι

$$\text{για κάθε } \ \sigma \in G \ \text{ και } \ \text{για κάθε } \ w \in W, \ \ \rho(\sigma)(w) \in W.$$

Αν $a \in K[G]$, τότε το a γράφεται μονοσήμαντα στην μορφή

$$a = \sum_{t \in G} \lambda_t t \ \text{ όπου } \ \lambda_t \in K. \ \text{Επομένως } \ \rho(a) = \rho(\sum_{t \in G} \lambda_t t) = \sum_{t \in G} \lambda_t \rho(t),$$

δηλαδή $\rho(a)(w) = \sum_{t \in G} \lambda_t \rho(t)(w) \in W$, για κάθε $a \in K[G]$ και κάθε $w \in W$, πράγμα που σημαίνει ότι ο W είναι $K[G]$-υπόmodule του $K[G]$-module (V, ρ^*).

3. Η $\rho' : K[G] \to End_K(V)$ είναι υποπαράσταση της ρ ακριβώς τότε όταν το $(W, \rho^{*\prime})$ είναι $K[G]$-module τέτοιο ώστε $rest_W \rho(a) = \rho'(a)$ για κάθε $a \in K[G]$, το οποίο είναι με την σειρά του ισοδύναμο με το ότι ο W είναι ρ_G-αναλλοίωτος υπόχωρος του V και ότι $rest_W \rho(\sigma) = \rho'(\sigma)$ για κάθε $\sigma \in G$, δηλαδή ακριβώς τότε όταν η ρ'_G είναι υποπαράσταση της ρ_G.

4. Το ανάγωγο της ρ είναι ισοδύναμο, εξ ορισμού, με το ότι (V, ρ^*) είναι ανάγωγο $K[G]$-module, δηλαδή είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι το (V, ρ^*) δεν έχει κανένα μη-τετριμμένο $K[G]$-υποmodule. Σύμφωνα με το 2. αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι το V δεν έχει κανένα μη τετριμμένο ρ_G-αναλλοίωτο υπόχωρο, δηλαδή με το ότι η ρ_G δεν έχει καμμία μη-τεριμμένη υποπαράσταση.

5. Η ρ γράφεται $\rho = \oplus_{i=1}^{r} \rho_i$ ακριβώς τότε όταν $\rho_i : K[G] \to End_K(V), \;\; i = 1, 2, \cdots, r$ είναι υποπαραστάσεις της ρ με $(V, \rho^*) = \oplus_{i=1}^{r} (V_i, \rho_i^*)$. Ισοδύναμα, λόγω της 3., $\rho_{i,G} : G \to GL(V_i)$ είναι υποπαραστάσεις της ρ_G με χώρους παράστασης V_i και $V = \oplus_{i=1}^{r} V_i$, δηλαδή τότε και μόνο τότε όταν $\rho_G = \oplus_{i=1}^{r} \rho_{i,G}$.

6. Το ότι η παράσταση ρ είναι πλήρως αναλύσιμη είναι ισοδύναμο με το ότι ο (V, ρ^*) είναι πλήρως αναλύσιμο αριστερό $K[G]$-module, δηλαδή με το ότι για κάθε υπomodule $W \leq (V, \rho^*)$ υπάρχει $W_1 \leq (V, \rho^*)$ τέτοιο ώστε $(V, \rho^*) = W \oplus W_1$. Ισοδύναμα, λόγω της 2., για κάθε ρ_G-αναλλοίωτο υπόχωρο $W' \leq V$, υπάρχει ρ_G-αναλλοίωτος υπόχωρος $W_1' \leq V$ τέτοιος ώστε $V = W_1' \oplus W_2'$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε υποπαράσταση $\rho' \subset \rho$ υπάρχει υποπαράσταση $\rho_1' \subset \rho_G$ τέτοια ώστε $\rho_G = \rho' \oplus \rho_1'$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι η παράσταση ρ_G είναι πλήρως αναλύσιμη.

Θεώρημα 3.29 *Εστω $\rho_0 : G \to GL(V)$ παράσταση της G. Υπάρχει ακριβώς μια παράσταση $\rho : K[G] \to End_K(V)$ της $K[G]$ με $\rho_G = \rho_0$ (δηλαδή υπάρχει ακριβώς μια επέκταση της παράστασης ρ_0 της G σε παράσταση ρ του $K[G]$).*

Απόδειξη: Αφού η ομάδα $G \subseteq K[G]$ είναι βάση του K-module $K[G]$ συνεπάγεται ότι υπάρχει ομομορφισμός από K-modules $\rho : K[G] \to End_K(V)$ με $\rho_0 = \rho_{|_G}$ και μάλιστα ορίζεται ως εξής:

$$\rho(\sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \sigma) := \sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \rho_0(\sigma).$$

Οπως ορίστηκε ο ρ είναι και ομομορφισμός K-αλγεβρών, διότι

$$\rho(\sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \sigma) \cdot \rho(\sum_{t \in G} \mu_t t) := \sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \rho_0(\sigma) \cdot \sum_{t \in G} \mu_t \rho_0(t) = \sum_{t' \in G} (\sum_{t, \sigma \in G t' = \sigma t} \lambda_\sigma \mu_t) \rho_0(t') =$$

$$= \rho(\sum_{t' \in G} (\sum_{\sigma, t \in G, \;\; \sigma t = t'} \lambda_\sigma \mu_t) t') = \rho(\sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \sigma \cdot \sum_{t \in G} \mu_t t).$$

Ανάλογα εργαζόμαστε για το άθροισμα στοιχείων της $K[G]$ και το γινόμενο στοιχείων της $K[G]$ με στοιχεία του K.

Θεώρημα 3.30 *Αν $\rho : K[G] \to End_K(V), \;\; \rho' : K[G] \to End_K(V')$ παραστάσεις της $K[G]$, τότε η ρ ισοδύναμη με την ρ' ακριβώς τότε όταν ρ_G ισοδύναμη με την ρ'_G.*

Απόδειξη: Η ρ είναι ισοδύναμη με την ρ' ακριβώς τότε όταν υπάρχει K- ισομορφισμός διανυσματικών χώρων $\varphi : V \to V'$ τέτοιος ώστε για κάθε $a \in K[G]$ να ισχύει,

$$\varphi \circ \rho(a) = \rho'(a) \circ \varphi \ \text{ ή ισοδύναμα } \ \varphi \circ \rho(\sigma) = \rho'(\sigma) \circ \varphi \ \text{ για κάθε} \sigma \in G,$$

δηλαδή η ρ_G είναι ισοδύναμη με την ρ'_G.

Πόρισμα 3.31 1. *Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις κλάσεις ισοδυνάμων παραστάσεων της G και στις κλάσεις ισομορφίας πεπερασμένα παραγόμενων αριστερών $K[G]$-modules.*

2. *Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις κλάσεις ισοδυνάμων αναγώγων παραστάσεων της G και στις κλάσεις ισομορφίας πεπερασμένα παραγόμενων αναγώγων $K[G]$-modules.*

Ορισμός 3.32 1. *Εστω $\rho_0 : G \to GL(V)$ παράσταση της G, και $\rho : K[G] \to End_K(V)$ η επαγώμενη παράσταση της ρ_0 (δηλαδή $\rho_G = \rho_{|_G} = \rho_0$). Το module $(V, \rho^*) = {}_{K[G]}V$ θα λέγεται module παράστασης της ρ_0.*

2. *Εστω M πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό $K[G]$-module και $\rho : K[G] \to End_K(V)$ η στο M αντιστοιχούσα παράσταση της $K[G]$. Τότε η $\rho_G := \rho_{|_G}$ θα λέγεται η στο M αντιστοιχούσα παράσταση της G.*

Θεώρημα 3.33 *Αν ρ_0 παράσταση της G και M πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό $K[G]$-module, τότε το M είναι module παράστασης της ρ_0 ακριβώς τότε όταν η ρ_0 είναι η στο M αντιστοιχούσα παράσταση της G.*

Απόδειξη: Προφανής.

Θεώρημα 3.34 *(Λήμμα του Schur για $K[G]$-modules)*
1ο μέρος Εστω M_1, M_2 ανάγωγα αριστερά $K[G]$-modules και $j : M_1 \to M_2$ ένας $K[G]$-ομομορφισμός. Τότε $j = 0$ ή j ισομορφισμός.
2ο μέρος Εστω ότι το σώμα K αλγεβρικά κλειστό και M ένα ανάγωγο αριστερό $K[G]$-module, $j : M_1 \to M_2$ ένας $K[G]$-ομομορφισμός modules. Τότε η j έχει την μορφή:

$$j = \lambda \cdot Id_M, \quad \lambda \in K.$$

Απόδειξη:

1ο μέρος : Το $j(M_1) \subset M_2$ είναι $K[G]$-υποmodule του M_2 και το γεγονός ότι το M_2 είναι ανάγωγο συνεπάγεται ότι:

$$j(M_1) = \{0\}, \ \text{οπότε} \ j = 0 \ \text{ή} \ j(M_1) = M_2, \ \text{δηλαδή ότι } j = 0 \text{ ή ότι η } j \text{ είναι επί.}$$

Αφού το M_1 είναι ανάγωγο συνεπάγεται ότι, στην πρώτη περίπτωση, $kerj = M_1$, δηλαδή $j = 0$ ενώ, στην δεύτερη περίπτωση, ότι $kerj = \{0\}$, δηλαδή ότι η j είναι ένα προς ένα και επί.

2ο μέρος : Εστω $\varphi(X) \in K[X]$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της j. Επειδή το K είναι αλγεβρικά κλειστό έπεται ότι το $\varphi(X)$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα έστω λ στο K^*.
Επομένως $\varphi(\lambda) := det(\lambda \cdot Id_M - A) = 0$, δηλαδή ο ομομορφισμός K-διανυσματικών χώρων $j_0 := \lambda \cdot Id_M - j$ δεν είναι ισομορφισμός, οπότε, από το 1^o μέρος έπεται ότι $j_0 = 0$ και άρα $j = \lambda \cdot Id_M$.

Θεώρημα 3.35 *Η παράσταση της G που αντιστοιχεί στο αριστερό $K[G]$-module ${}_{K[G]}K[G]$ είναι ομαλή.*

Απόδειξη: Εστω $\rho_0 : G \to GL(K[G])$ αυτή η παράσταση. Για κάθε $\sigma \in G$ και κάθε $a \in K[G]$ ισχύει

$$\rho_0(\sigma)a := \sigma a$$

οπότε το σύνολο $\{\rho_0(\sigma)(1_G) | \sigma \in G\} = G$, είναι μια K-βάση της άλγεβρας $K[G]$ (Κεφ. 1, 1.5(5)).

Πόρισμα 3.36 *Εστω ρ_0 παράσταση της G υπέρ το σώμα K και ${}_{K[G]}M$ το module παράστασης της ρ_0. Τότε ισχύει ότι η ρ_0 είναι ομαλή ακριβώς τότε όταν ${}_{K[G]}M \cong_{K[G]} K[G]$.*

Απόδειξη: Προφανής, αφού ως γνωστό υπάρχει μια ακριβώς κλάση ομαλών παραστάσεων της G (Κεφ. 1, 1.5(4)) το πόρισμα $3.31, 1$ και το θεώρημα 3.33.

3.3 Δομή και ταξινόμηση των $K[G]$-modules όταν η χαρακτηριστική του K δεν διαιρεί την τάξη της G

Θεώρημα 3.37 (Maschke)
Εστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό $K[G]$-module. Τότε ισχύουν:

1. *Το M είναι πλήρως αναλύσιμο.*

2. $M = \oplus_{i=1}^{r} M_i$ *με* <u>*ανάγωγα*</u> $K[G]$*-υποmodules* $M_i \leq M$.

<u>Απόδειξη :</u> Αποτελεί συνέπεια άμεση του θεωρήματος Maschke του 1ου κεφαλαίου (θεώρημα 1.21) και του θεωρήματος 3.28.

Πόρισμα 3.38 *Το $K[G]$ θεωρούμενο σαν αριστερό $K[G]$-module έχει μια ανάλυση της μορφής $K[G] = \oplus_{i=1}^{r} L_i$, όπου L_i αριστερά minimal ιδεώδη του.*

<u>Απόδειξη:</u> Αμεση συνέπεια του θεωρήματος του Maschke αρκεί να παρατηρήσουμε ότι τα (αριστερά) ανάγωγα υποmodule του $K[G]$ είναι minimal αριστερά ιδεώδη (όπου mininal σημαίνει ότι δεν περιέχουν γνήσια ιδεώδη).

Θεώρημα 3.39 *Εστω $K[G] = \oplus_{i=1}^{r} L_i$ μια ανάλυση του ${}_{K[G]}K[G]$ σε ανάγωγα (minimal) αριστερά ιδεώδη του L_i, $M \neq 0$ ένα* <u>*ανάγωγο*</u> *αριστερό $K[G]$-module. Τότε το $M \cong L_i$, για κάποιο $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$.*

<u>Απόδειξη:</u> Εστω $m \in M, m \neq 0$. Τότε αφού, εξ υποθέσεως, M ανάγωγο έπεται ότι $M = K[G] \cdot m$. Η συνάρτηση:

$$\varphi : \begin{cases} K[G] & \longrightarrow & M \\ a & \longmapsto & am \end{cases}$$

είναι ένας επιμορφισμός από $K[G]$-modules. Από το 3^o θεώρημα ισομορφίας (θεώρημα 3.7) έπεται ότι η

$$\varphi^* : \begin{cases} K[G]/ker(\varphi) & \rightarrow & M \\ a + ker(\varphi) & \mapsto & am \end{cases}$$

είναι ισομορφισμός από $K[G]$-modules. Τώρα ο πυρήνας $ker(\varphi) \subset K[G]$ είναι ένα αριστερό ιδεώδες του αριστερού $K[G]$-module ${}_{K[G]}K[G]$ το οποίο είναι πλήρως αναλύσιμο. Επομένως ο $ker(\varphi)$ είναι ευθύς προσθεταίος του $K[G]$, δηλαδή υπάρχει ένα αριστερό ιδεώδες L του $K[G]$ τέτοιο ώστε $K[G] = L \oplus ker(\varphi)$. Επομένως η συνάρτηση:

$$\psi : \begin{cases} L & \longrightarrow & K[G]/ker(\varphi) \\ b & \longmapsto & b + ker(\varphi) \end{cases}$$

είναι ισομορφισμός μεταξύ των $K[G]$-modules L και $K[G]/ker(\varphi)$. Αρα και η σύνθεση $\varphi^* \circ \psi : L \to M$ είναι επίσης ισομορφισμός από $K[G]$-modules. Το M όμως είναι ανάγωγο, επομένως και το L είναι ανάγωγο. Συνεπώς το L σαν ανάγωγο υπομodule του $K[G]$ είναι minimal. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $L \cong L_i$, για κάποιο $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$. Εστω $L = K[G] \cdot l, \;\; l \in K[G], \;\; l \neq 0$. Η απεικόνιση:

$$l^* : \begin{cases} K[G] & \longrightarrow L \\ a & \longmapsto \quad al \end{cases}$$

είναι ομομορφισμός από $K[G]$-modules. Αρα από το λήμμα του Schur για $K[G]$-modules (θεώρημα 3.34) έπεται ότι για κάθε $i \in \{1, 2 \cdots, r\}$ $\;l^*_{|_{L_i}} = 0$ ή $l^*_{|_{L_i}}$ είναι ισομορφισμός, (τα L, L_i είναι ανάγωγα). Η απεικόνιση l^* όμως είναι μη-μηδενική, διότι $l \neq 0$ και $K[G] = \oplus_{i=1}^{r} L_i$. Επομένως για τουλάχιστο ένα i ισχύει ότι $l^*_{|_{L_i}}$ είναι ισομορφισμός και άρα, γι' αυτό το i, $\;L_i \cong L$.

Πόρισμα 3.40 *1. Υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους μη-ισόμορφα αριστερά ιδεώδη του $K[G]$. Αυτά αποτελούν ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων των κλάσεων ισομορφίας αριστερών αναγώγων $K[G]$-modules.*

2. *Υπάρχουν πεπερασμένου μόνο πλήθους μη-ισοδύναμες ανά δύο, ανάγωγες παραστάσεις της G υπέρ το K.*

3. *Οι πεπερασμένου πλήθους κλάσεις ισοδυναμίας αναγώγων παραστάσεων της G υπέρ το K αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα στις κλάσεις ισομορφίας αριστερών minimal ιδεωδών της $K[G]$.*

4. *Εστω $\rho_{o\mu} = \oplus_{i=1}^{r} \rho_i$ η ανάλυση της $\rho_{o\mu}$ σε ευθύ άθροισμα αναγώγων. Τότε το $\{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_r\}$ περιέχει ένα σύνολο αντιπροσώπων των κλάσεων ιδοδυναμίας αναγώγων παραστάσεων της G.*

Από εδώ και κάτω υποθέτουμε ότι K είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα και $char(K) = 0$. Ξανά, έστω G πεπερασμένη ομάδα, $h = h_G$ το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G, $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \cdots, \tilde{\rho}_h$ ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων αναγώγων παραστάσεων της G υπέρ το K, $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_h$ οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G και $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_h$ module παραστάσεων των $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \cdots, \tilde{\rho}_h$ αντίστοιχα. Εστω τέλος $n_i := deg\tilde{\rho}_i = dim_K \tilde{L}_i$.

Θεώρημα 3.41 *Ισχύει:*

$$K[G] = \oplus_{i=1}^{h}(\oplus_{i=1}^{n_i} L_i^{(j)})$$

όπου $L_i^{(j)} \subset K[G]$, *αριστερά minimal ιδεώδη του* $K[G]$ *και* $L_i^{(j)} \cong \tilde{L}_i$.

Απόδειξη: Αμεση συνέπεια του θεωρήματος 1.39 του $1^{ου}$ Κεφαλαίου.

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με το ερώτημα πότε ένα στοιχείο $a \in K[G]$ ανήκει στο κέντρο $Z(K[G])$.

Θεώρημα 3.42 *Εστω* $a = \sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \sigma \in K[G]$. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι μεταξύ τους ισοδύναμες:*

1. $a \in Z(K[G])$,

2. *Η απεικόνιση* $f_a : \begin{cases} G & \longrightarrow & K \\ \sigma & \longmapsto & \lambda_\sigma \end{cases}$
   είναι μια συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G.

Απόδειξη: Το $a = \sum_{t \in G} \lambda_t t$ ανήκει στο κέντρο του $K[G]$ ακριβώς τότε όταν $ab = ba$ για κάθε $b \in K[G]$. Η αντιμετάθεση ως προς όλα τα στοιχεία του $K[G]$ είναι ισοδύναμη με την αντιμετάθεση ως προς όλα τα στοιχεία της G, δηλαδή

$$\sigma(\sum_{t \in G} \lambda_t t) = (\sum_{t \in G} \lambda_t t)\sigma \quad \text{για κάθε} \quad \sigma \in G.$$

Η τελευταία σχέση, εύκολα φαίνεται ότι είναι ισοδύναμη με το ότι $\lambda_{\sigma t} = \lambda_{t \sigma}$ για κάθε $\sigma, t \in G$, το οποίο μας λέει ότι η f_a είναι συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G.

Θεώρημα 3.43 *Ισχύουν:*

1. *Η διάσταση του* K*-διανυσματικού χώρου* $Z(K[G])$ *είναι* h.

2. *Το σύνολο* $\{\sum_{\sigma \in G} \chi_\sigma(\sigma)\sigma | i = 1, 2 \cdots, h\}$ *είναι μια* K*-βάση του κέντρου* $Z(K[G])$.

Απόδειξη: Εστω $a = \sum_{t \in G} \lambda_t t \in Z(K[G])$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.42 η f_a είναι συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G. Λόγω της 1.39(3) του $1^{ου}$ Κεφαλαίου, έχουμε

$$f_a = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i \quad \text{οπότε} \quad a = \sum_{\sigma \in G} f_a(\sigma)\sigma =$$

$$= \sum_{\sigma \in G} (\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i(\sigma))\sigma = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i (\sum_{\sigma \in G} \chi_i(\sigma)\sigma),$$

δηλαδή το σύνολο $\sum_{\sigma \in G} \chi_i(\sigma)\sigma$ παράγει τον $Z(K[G])$. Θα αποδείξουμε ότι είναι και K-γραμμικά ανεξάρτητο. Αν λοιπόν

$$0 = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \sum_{\sigma \in G} \chi_i(\sigma)\sigma = \sum_{\sigma \in G} (\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i(\sigma))\sigma$$

τότε αφού τα στοιχεία της G αποτελούν βάση του K-διανυσματικού χώρου $K[G]$ έπεται ότι για κάθε $\sigma \in G$ ισχύει $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i(\sigma) = 0$ δηλαδή ότι $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i = 0$. Επειδή τα χ_i είναι βάση του χώρου των συναρτήσεων κλάσεων συζυγίας της G, από το θεώρημα 1.39 του $1^{ου}$ Κεφαλαίου έπεται ότι για κάθε $i = 1, 2, \cdots, h, \ \ \lambda_i = 0$, δηλαδή το σύνολο $\{\sum_{\sigma \in G} \chi_\sigma(\sigma)\sigma | i = 1, 2, \cdots, h\}$ είναι μια K-βάση του κέντρου $Z(K[G])$.

Ορισμός 3.44 *Για $i = 1, 2, \cdots, h$ έστω:*

$$e_i := \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i(t^{-1})t = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i(t)t^{-1}$$

όπου $n_i = deg\chi_i$.

Ιδιότητες 3.45 *(1) $e_i \in Z(K[G])$.*

(2) $\sum_{i=1}^{h} e_i = e$, το μοναδιαίο της $K[G]$.

(3) Αν $K[G] = \oplus_{j=1}^{h}(\oplus_{\nu=1}^{n_i} L_j^{(\nu)})$ η ανάλυση της $K[G]$ σε αριστερά minimal ιδεώδη με $L_j^{(v)} \cong \tilde{L}_j$, τότε ισχύει:

$$e_i K[G] = \oplus_{i=1}^{n_i} L_i^{(\nu)}$$

(ευθύ άθροισμα των προς το $\tilde{L}_i$ ισόμορφων αριστερών minimal ιδεωδών του $K[G]$).

(4) $K[G] = \oplus_{i=1}^{h} e_i K[G]$.

(5) Τα e_i είναι ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους και ταυτοδύναμα, δηλαδή $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$.

(6) Τα e_i είναι ανά δύο ορθογώνια πρωταρχικά στοιχεία του $Z(K[G])$, δηλαδή δεν αναλύονται πιο κάτω σε ανά δύο αρθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία του κέντρου διαφορετικά του μηδενός.

(7) *Εστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο $e \in R$. Αν:*

$$e = e_1 + e_2 + \cdots + e_r = e'_1 + e'_2 + \cdots + e'_r$$

σε ορθογώνια ανά δύο πρωταρχικά ταυτοδύναμα στοιχεία του κέντρου $Z(R)$, τότε $r = r'$ και $e_i = e'_i$.

(8) *Αν R δακτύλιος με μοναδιαίο $e \in R$ και $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_r$ μια ανάλυση του e σε ανά δύο μεταξύ τους ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία του $Z(R)$, τότε ισχύει:*

$$R = \sum_{i=1}^{r} e_i R =: \oplus_{i=1}^{r} R_i =: \times_{i=1}^{r} R_i$$

έχουμε δηλαδή μια ανάλυση του R σε ευθύ άρθροισμα δακτυλίων (ευθύ γινόμενο δακτυλίων).

Απόδειξη:

(1) Η $f_{e_i} : \sigma \mapsto \frac{n_i}{g}\chi_i(\sigma)$ είναι συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G οπότε, από το θεώρημα 3.42, ισχύει το ζητούμενο.

(2) Εχουμε

$$\sum_{i=1}^{h} e_i = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{h} n_i \sum_{t\in G}\chi_i(t)t^{-1} = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}(\sum_{i=1}^{h} n_i\chi_i)(t)t^{-1},$$

Ο $\sum_{i=1}^{h} n_i\chi_i$ είναι ο χαρακτήρας $\chi_{\text{ομ}}$ της ομαλής παράστασης $\rho_{\text{ομ}}$ της G.

Επειδή $\chi_{\text{ομ}}(g) = \begin{cases} g, & \text{όταν} \quad t = e \\ 0, & \text{όταν} \quad t \neq e \end{cases}$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{h} e_i = \frac{1}{g} g e = e.$$

(3) Εστω

$$e_i^* : \begin{cases} K[G] & \longrightarrow K[G] \\ a & \longmapsto e_i a = a e_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, h).$$

Οι απεικονίσεις αυτές είναι ομομορφισμοί αριστερών $K[G]$-modules. Εστω L ένα αριστερό minimal ιδεώδες της $K[G]$. Το $im e_i^*|_L$ μπορεί να θεωρηθεί σαν στοιχείο του

$End_{K[G]}(L)$, διότι $ime_i^*|_L = e_iL \subseteq L$. Επειδή το L είναι ανάγωγο, τό λήμμα του Schur, μας δίνει:

$$e_i^*|_L = \lambda \cdot Id_V, \quad \text{με } \ \lambda \in K.$$

Εστω $\rho : G \to GL(V)$ η παράσταση της G που αντιστοιχεί στο L.

Για την παράσταση αυτή έχουμε ότι $\rho(t)(a) = ta$, για κάθε $t \in G$ και κάθε $a \in L$.

Η παράσταση ρ είναι ανάγωγη. Επομένως υπάρχει $l \in \{1, 2, \cdots, h\}$ τέτοιο ώστε $\chi_\rho = \chi_l, \;\; dim_K L = n_l$.

Επιπλέον, προφανώς, ισχύει,

$$tr(\lambda \cdot Id_L) = \lambda \cdot n_l = tr(e_i^*|_L) = tr(\rho(e_i)).$$

Για κάθε $a \in L$, έχουμε

$$tr(e_i^*(a)) = tr(e_ia) = tr(\rho(e_i)(a)) = tr(\frac{n_i}{g}\sum_{t\in G}\chi_i(t)\rho(t^{-1}))(a) =$$

$$= \frac{n_i}{g}\sum_{t\in G}\chi_i(t)\chi_l(t^{-1}))(a) = n_i \cdot \delta_{il}(a).$$

Συνεπώς

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{όταν} \quad i = l \\ 0, & \text{όταν} \quad i \neq l \end{cases} \quad \text{δηλαδή } \ e_i^*|_L = \begin{cases} Id_L, & \text{όταν} \quad L \cong L_i \\ 0, & \text{όταν} \quad L \ncong L_i. \end{cases}$$

Τελικώς προκύπτει ότι

$$e_iK[G] = e_i^*(K[G]) = \sum_{j=1}^{h}(\sum_{v=1}^{n_j} e_i^*(L_j^{(v)})) = \sum_{v=1}^{n_i} L_i^{(v)} = \oplus_{v=1}^{n_i} L_i^{(v)}$$

(4) Αμεση συνέπεια των (2) και (3).

(5) Εστω $i \neq j$. Τότε $e_ie_j \in e_ie_jK[G] = e_i^*(e_jK[G])$. Από την απόδειξη όμως της (3) έπεται ότι $e_i^*(e_jK[G]) = 0$ για $i \neq j$. Συνεπώς $e_ie_j = 0$. Από την άλλη μεριά

$$e_i = e_ie = e_i\sum_{j=1}^{n} e_j = \sum_{j=1}^{n} e_ie_j = 0 + e_i^2 = e_i^2.$$

(6) Αν $e_1 = e_1' + e_2'$ με

$$e_1'e_2' = 0, \;\; {e_i'}^2 = e_i', \;\; e_i' \neq 0, \;\; e_i' \in Z(K[G]),$$

τότε τα $\{e_1', e_2', e_2, \cdots, e_h\}$ είναι $(h+1)$-ορθογώνια ανά δύο ταυτοδύναμα στοιχεία του κέντρου $Z(K[G])$. Πράγματι, για $i \geq 2$, έχουμε

$$0 = e_1 e_i = (e_1' + e_2')e_i = e_1' e_i + e_2' e_i$$

$$\text{οπότε} \;\; 0 = e_1' 0 = {e_1'}^2 e_i + e_1' e_2' e_i = e_1' e_i$$

$$\text{και} \;\; 0 = e_2' 0 = e_1' e_2' e_i + {e_2'}^2 e_i = e_2' e_i.$$

Τα $\{e_1', e_2', e_2, \cdots, e_h\}$ είναι K-γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι αν

$$0 = \lambda_1' e_1' + \lambda_2' e_2' + \sum_{j=2}^{h} \lambda_j e_j \;\; \text{θα είχαμε}$$

$$\begin{cases} 0 = e_i' 0 = \lambda_i' e_i' \Rightarrow \lambda_i' = 0 \\ 0 = e_i 0 = \lambda_i e_i \Rightarrow \lambda_i = 0 \end{cases}$$

δηλαδή θα είχαμε $dim Z(K[G]) \geq h+1$, άτοπο.

(7) Εχουμε $e_i' = e_i' e = e_i' e_1 + \cdots + e_i' e_r$ $(*)$ και:

$$e_i' e_\nu e_i' e_\mu = {e_i'}^2 e_\nu e_\mu = \begin{cases} 0, & \text{όταν} \;\; \nu \neq \mu \\ e_i' e_\nu, & \text{όταν} \;\; \nu = \mu \end{cases}$$

Δηλαδή $(e_i' e_\nu)^2 = e_i' e_\nu$ και $(e_i' e_\nu)(e_i' e_\mu) = 0$ για $\nu \neq \mu$. Αφού λοιπόν τα $e_i' e_\nu \in Z(R)$ έχουμε στην $(*)$ μια ανάλυση του e_i' σε ορθογώνια ανά δύο ταυτοδύναμα στοιχεία του κέντρου $Z(R)$. Αφού όμως e_i' πρωταρχικά, έπεται ότι:

$$e_i' e_j = \begin{cases} e_i', & \text{για ακριβώς ένα } j \in \{1, 2, \cdots, r\} \\ 0, & \text{για όλα τα υπόλοιπα } j \end{cases}$$

Με το παραπάνω αυτό j, $e_j = e e_j = e_1' e_j + \cdots + e_{r'}' e_j$. Ανάλογα εντελώς ισχύει:

$$e_i' e_j = \begin{cases} e_j & \text{για ένα ακριβώς } i \in \{1, 2, \cdots, r'\} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} .$$

Επομένως $e_i' = e_j$, δηλαδή το ζητούμενο.

(8) Λόγω της ιδιότητας (7), κάθε στοιχείο του R γράφεται σαν άθροισμα στοιχείων των $e_i R$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ και η παράσταση αυτή είναι μοναδική.

Συνοψίζοντας όλες τις προηγούμενες ιδιότητες έχουμε το

Θεώρημα 3.46 *Το μοναδιαίο e του $K[G]$ έχει την μονοσήμαντη ανάλυση $e = \sum_{i=1}^{h} e_i$ σε ορθογώνια μεταξύ τους ανά δύο πρωταρχικά ταυτοδύναμα στοιχεία e_i του κέντρου $Z(K[G])$. Τα e_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$ ορίζονται*

$$e_i := \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi(t^{-1})t, \quad \textit{όπου} \;\; n_i := deg\chi_i.$$

Επομένως έχουμε την κανονική ανάλυση:

$$K[G] = \oplus_{i=1}^{h} e_i K[G], \quad e_i K[G] = \oplus_{i=1}^{n_i} L_i^{(\nu)}, \;\; L_i^{(\nu)} \cong \tilde{L}_i.$$

Παρατήρηση : Για τους υποδακτύλιους $e_i K[G]$ μπορεί να δει κανείς ότι

$$e_i K[G] \cong M_{n_i}(K).$$

$$\text{Συνεπώς } K[G] = \oplus_{i=1}^{h} M_{n_i}(K).$$

4 Επαγώμενες παραστάσεις

4.1 Τανυστικά γινόμενα

Ορισμός 4.1 *Εστω R δακτύλιος, M_R και ${}_RN$ R-modules. $X(M,N) :=$ το ελεύθερο $\mathbb{Z}$-module με βάση $M \times N$, και $Y(M,N)$ το υποmodule του $X(M,N)$ που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής:*

(i) $(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$

(ii) $(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)$

(iii) $(m\lambda, n) - (m, \lambda n)$

για όλα τα $m, m_1, m_2 \in M,\ n, n_1, n_2 \in N,\ \lambda \in R$. Το $\mathbb{Z}$-module πηλίκων:

$$M \otimes_R N := \frac{X(M,N)}{Y(M,N)}$$

θα λέγεται τανυστικό γινόμενο των M και N υπέρ τον R.

Παρατήρηση: Το $M \otimes_R N$ είναι $\mathbb{Z}$-module εν γένει όμως δεν έχει καμμία R-module δομή. Εστω

$$\pi : \begin{cases} X(M,N) & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ x & \longmapsto & x + Y(M,N) \end{cases}$$

ο κανονικός ομομορφισμός και

$$\pi_0 := \pi_{M \times N} : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ (m,n) & \longmapsto & \pi_0(m,n) =: m \otimes n. \end{cases}$$

Τα στοιχεία του $M \otimes_R N$ λέγονται τανυστές ενώ τα στοιχεία της μορφής $m \otimes n$ στοιχειώδεις τανυστές.

Ιδιότητες

$T_1)$ $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$

$T_2)$ $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$

$T_3)$ $m\lambda \otimes n = m \otimes \lambda n$

$T_4)$ $m \otimes 0 = 0 \otimes n = 0$

$T_5)$ $(-m) \otimes n = m \otimes (-n) = -(m \otimes n)$

Απόδειξη: $T_1)$ Ο πυρήνας της π είναι $ker\pi = Y(M,N)$. Επομένως $(m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n) \in ker\pi$, δηλαδή $\pi((m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n)) = 0$, οπότε $\pi(m_1+m_2,n)-\pi(m_1,n)-\pi(m_2,n)$. Συνεπώς $(m_1+m_2)\otimes n - m_1 \otimes n - m_2 \otimes n = 0$. Ανάλογα αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες.

Θεώρημα 4.2 *Ισχύει:*

$$M \otimes_R N =_{\mathbb{Z}}< m \otimes n / m \in M, n \in M >=$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i / r \in \mathbb{N}, m_i \in M, n_i \in N \right\}$$

Απόδειξη: Η πρώτη ισότητα είναι προφανής, αφού $M \times N$ βάση του $M \otimes_R N$. Η δεύτερη είναι συνέπεια των ιδιοτήτων $T_2), T_4), T_5)$. Επομένως οι στοιχειώδεις τανυστές αποτελούν ένα σύστημα γεννητόρων του $M \otimes_R N$ σαν $\mathbb{Z}$-module και κάθε στοιχείο του $M \otimes_R N$ γράφεται σαν άθροισμα στοιχειωδών τανυστών.

Παρατήρηση: Η παραπάνω παράσταση δεν είναι μονοσήμαντη. Για παράδειγμα:

$$(2m) \otimes n = m \otimes (2n)$$

δηλαδή οι στοιχειώδεις τανυστές δεν αποτελούν βάση.

Εστω $M_{R,R}N$, R-modules και A μία προσθετική αβελιανή ομάδα ($\mathbb{Z} - module$). Η συνάρτηση

$$f : M \times N \longrightarrow A$$

θα λέγεται R-προσθετική όταν:

$B_1)$ $f(m_1+m_2,n) = f(m_1,n) + f(m_2,n)$

$B_2)$ $f(m,n_1+n_2) = f(m,n_1) + f(m,n_2)$

$B_3)$ $f(m\lambda,n) = f(m,\lambda n)$

Θεώρημα 4.3 *Η συνάρτηση*

$$\pi_0 : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ (m,n) & \longmapsto & m \otimes n \end{cases}$$

είναι R-<u>προσθετική</u>.

<u>Απόδειξη:</u> Αμεση συνέπεια των ιδιοτήτων T_1, T_2, T_3, T_4.

Θεώρημα 4.4 (Η universal ιδιότητα της π_0) *Αν A αβελιανή ομάδα ($\mathbb{Z}$-module) και $f : M \times N \longrightarrow A$ είναι R-προσθετική τότε υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων ($\mathbb{Z}$-module ομομορφισμός):*

$$f^* : M \otimes_R N \longrightarrow A$$

έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "f^*"] \\ & A \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό, δηλαδή $f = f^* \circ \pi_0$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε: Η R-προσθετική συνάρτηση αναλύεται μονοσήμαντα υπέρ την π_0.

<u>Απόδειξη:</u> Αφου $X(M,N)$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-module με βάση $M \times N$ έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός $\mathbb{Z}$-module ομομορφισμός:

$$\bar{f} : X(M,N) \longrightarrow A$$

τέτοιος ώστε $\bar{f}|_{M\times N} = f$. Ισχυρίζομαι ότι $Y(M,N) \subset ker\bar{f}$. Πράγματι: αφού f είναι R-προσθετική

$$\bar{f}((m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n)) = f((m_1+m_2,n)) - f(m_1,n) - f(m_2,n) = 0.$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε και για τις υπόλοιπες ιδιότητες που καθορίζουν τον $Y(M,N)$. Από το πόρισμα 3.8 έχουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένας $\mathbb{Z}$-module ομομορφισμός

$$f^* : M \otimes_R N = \frac{X(M,N)}{Y(M,N)} \longrightarrow A$$

τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
X(M,N) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & M \otimes_R N = \frac{X(M,N)}{Y(M,N)} \arrow[dl, "f^*"'] \\
A &
\end{tikzcd}
$$

να είναι αντιμεταθετικό. Συνολικά λοιπόν έχουμε:

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & X(M,N) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & M \otimes_R N = \frac{X(M,N)}{Y(M,N)} \arrow[dl, "f^*"'] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

δηλαδή

$$f = \bar{f} \circ i = (f^* \circ \pi) \circ i = f^* \circ (\pi \circ i) = f^* \circ \pi_0.$$

Θεώρημα 4.5 (Χαρακτηρισμός τανυστικού γινομένου) *Εστω T αβελιανή ομάδα ($\mathbb{Z}$-module), $\tau : M \times N \longrightarrow T$ μια R-προσθετική απεικόνιση με την επιπλέον ιδιότητα: Για κάθε αβελιανή ομάδα A και κάθε R-προσθετική απεικόνιση $j : M \times N \longrightarrow A$ υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων ($\mathbb{Z}$-module ομομορφισμός) $j^* : T \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα:*

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "j"'] & T \arrow[d, "j^*"] \\
& A
\end{tikzcd}
$$

να είναι αντιμεταθετικό. (Αυτό θα το λέμε: Κάθε R-προσθετική απεικόνιση

$$f : M \times N \longrightarrow A,$$

όπου A αβελιανή ομάδα, αναλύεται μονοσήμαντα υπέρ τον τ). Τότε υπάρχει ακριβώς ένας ισομορφισμός ομάδων $\phi : M \otimes_R N \longrightarrow T$ τέτοιος ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[dr, "\tau"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "\phi"] \\
& T
\end{tikzcd}$$

<u>Απόδειξη</u>: Αφού $\pi_0 : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ είναι R-προσθετική, λόγω της υπόθεσης έπεται ότι υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων:

$$\psi : T \longrightarrow M \otimes_R N$$

τέτοιως ώστε (1) $\psi \circ \tau = \pi_0$, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\pi_0"'] & T \arrow[d, "\psi"] \\
& M \otimes_R N
\end{tikzcd}$$

Από την άλλη μεριά η τ είναι R-προσθετική. Επομένως, λόγω του θεωρήματος (4.4) υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων:

$$\phi : M \otimes_R N \longrightarrow T$$

τέτοιος ώστε (2) $\phi \circ \pi_0 = \tau$, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[dr, "\tau"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "\phi"] \\
& T
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς ισχύει: $\psi \circ \phi \circ \pi_0 \overset{(2)}{=} \psi \circ \tau \overset{(1)}{=} \pi_0$ και $\phi \circ \psi \circ \tau \overset{(1)}{=} \phi \circ \pi_0 \overset{(2)}{=} \tau$ δηλαδή έχουμε τα επόμενα δύο αντιμεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
& M \times N \arrow[dl, "\pi_0"'] \arrow[dr, "\pi_0"] & \\
M \otimes_R N \arrow[rr, "\psi \circ \phi"] & & M \otimes_R N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& M \times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\
T \arrow[rr, "\phi \circ \psi"] & & T
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς $\psi \circ \phi = Id_{M \otimes_R N}$ και $\phi \circ \psi = Id_T$, δηλαδή ο ϕ είναι ισομορφισμός.

Θεώρημα 4.6 *Εστω* $M_R, M'_R,\ {}_RN,\ {}_RN'$ *R-modules,* $f : M \longrightarrow M'$, $g : N \longrightarrow N'$ *R-modules ομομορφισμοί. Τότε ισχύει ότι:*

(1) Υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων:

$$f \otimes g : M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$$

τέτοιος ώστε για κάθε $m \in M$ *και κάθε* $n \in N$ *να ισχύει:*

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n).$$

Ο $f \otimes g$ *λέγεται* <u>*τανυστικό γινόμενο*</u> *των* f, g.

(2) Αν $M''_R,\ {}_RN''$ *άλλα δύο R-modules και* $f' : M' \longrightarrow M''$, $g' : N' \longrightarrow N''$ *R-modules ομομορφισμοί τότε ισχύει:*

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

<u>Απόδειξη:</u>

(1) Η μοναδικότητα είναι προφανής, διότι $M \otimes_R N =_{\mathbb{Z}} < m \otimes n / m \in M, n \in N >$. Ισχυριζόμαστε ότι αρκεί να δείξουμε:

$$f \times g : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & M' \otimes_R N' \\ (m, n) & \longmapsto & f(m) \otimes g(n) \end{cases}$$

είναι R-προσθετική, διότι τότε, από το θεώρημα (4.4), έπεται ότι υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων:

$$f \otimes g : M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$$

τέτοιως ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[dr, "f \times g"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "f \otimes g"] \\ & M' \otimes_R N' \end{tikzcd}$$

Συνεπώς

$$f(m) \otimes g(n) = (f \times g)(m,n) = (f \otimes g) \circ \pi_0(m,n) = (f \otimes g)(m \otimes n)$$

και τελικά

$$(f \otimes g) \circ \pi_0(m,n) = (f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n).$$

Το ότι η $f \times g$ είναι R-προσθετική επαληθεύται με απλό έλεγχο των ιδιοτήτων. Για παράδειγμα αποδεικνύουμε ότι ισχύει η B_1:

$$(f \times g)(m_1 + m_2, n) = f(m_1 + m_2) \otimes g(n) = (f(m_1) + f(m_2)) \otimes g(n) =$$

$$= f(m_1) \otimes g(n) + f(m_1) \otimes g(n) = (f \times g)(m_1, n) + (f \times g)(m_2, n).$$

(2) Απλά κάνουμε τις πράξεις:

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)(m \otimes n) = (f' \otimes g')(f(m) \otimes g(n)) = (f'(f(m)) \otimes = g'(g(m)) =$$

$$= ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(m \otimes n)$$

δηλαδή

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)).$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Εχουμε ότι
$$(f \otimes g)\left(\sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i\right) = \sum_{i=1}^{r} f(m_i) \otimes g(n_i),$$
παρά το ότι για $x \in M \otimes_R N$ η παράσταση $x = \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

2. Εστω $M_1 \subset M_R$ υπomodule του δεξιού R-module M_R, ${}_RN$ αριστερό R-module και $i_1 : M_1 \hookrightarrow M$. Η
$$i \otimes Id_N : M_1 \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$$
δεν είναι, εν γένει, ένα προς ένα (injective). Πράγματι, θεωρούμε τα τανυστικά γινόμενα:
$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \quad kai \quad \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$$

Από την μια μεριά εχουμε ότι $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \cong 0$, διότι αν $r \in \mathbb{Q}, u \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ τότε

$$r \otimes u = \frac{r}{2} 2 \otimes u = \frac{r}{2} \otimes 2u = \frac{r}{2} \otimes 0 = 0.$$

Απο την άλλη μεριά έχουμε ότι $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. (δες θεώρημα 4.11, παρακάτω)

Θεώρημα 4.7 *Εστω $M_1 \subset M$ ευθύς προσθεταίος, ${}_RN, M_R$ δυο R-modules και $i : M_1 \hookrightarrow M$ η ταυτοτική εμφύτευση. Τότε η*

$$i \otimes Id_N : M_1 \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$$

είναι ένα προς ένα (injective). Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ταυτίσουμε το $m_1 \otimes n \in M_1 \otimes_R N$ με το $m_1 \otimes n \in M \otimes_R N$.

Απόδειξη: Εστω π_1 η κανονική προβολή του M στο M_1. Εχουμε ότι $\pi_1 \circ i : M_1 \longrightarrow M_1$ είναι η $Id_{M_1} = \pi_1|_{M_1}$. Ισχύει:

$$Id_{M_1 \otimes_R N} = Id_{M_1} \otimes_R Id_N = (\pi_1 \circ i) \otimes (Id_N \circ Id_N) = (\pi_1 \otimes Id_N) \circ (i \otimes Id_N)$$

δηλαδή η $i \circ Id_N$ είναι ένα προς ένα (injective) και η $\pi_1 \otimes Id_N$ είναι επί (surjective).

Θεώρημα 4.8 *Αν $M_R = M_1 \oplus M_2$, τότε ισχύει $M \otimes_R N = (M_1 \otimes_R N) \oplus (M_2 \otimes_R N)$.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι

(1) $M \otimes_R N = M_1 \otimes_R N + M_2 \otimes_R N$ και

(2) $(M_1 \otimes_R N) \cap (M_2 \otimes_R N) = \{0\}$

Το πρώτο είναι προφανές ενω για το δεύτερο έστω $T := (M_1 \otimes_R N) \cap (M_2 \otimes_R N)$. Εχουμε

$$\pi_1 \otimes Id_N|_{M_1 \otimes_R N} = \pi_1|_{M_1} \otimes_R Id_N = Id_{M_1} \otimes_R Id_N = Id_{M_1 \otimes_R N}.$$

Επίσης ισχύει

$$\pi_1 \otimes Id_N|_{M_2 \otimes_R N} = \pi_1|_{M_2} \otimes_R Id_N = 0 \otimes_R Id_N = 0$$

Επομένως $\pi_1 \otimes Id_N|_T = Id_T$ και $\pi_1 \otimes Id_N|T = 0$, δηλαδή $T = \{0\}$.

Εστω R, R' δακτύλιοι, $M = {}_R M_{R'}$ ένα bimodule και $N = {}_{R'} N$ ένα αριστερό R-module.

Θεώρημα 4.9 *Η απεικόνιση:*

$$\begin{cases} R \times (M \otimes_{R'} N) & \longrightarrow & M \otimes_{R'} N \\ (\lambda, \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{r} \lambda m_i \otimes n_i =: \lambda(\sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i) \end{cases}$$

είναι καλά ορισμένη και επάγει την δομή αριστερού R-module στο $M \otimes_{R'} N$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε το καλώς ορισμένο της συνάρτησης. Το ότι στην συνέχεια το $M \otimes_{R'} N$ γίνεται R-module χρειάζεται απλή επαλήθευση. Για το πρώτο, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\lambda \in R$, υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\psi_\lambda : M \otimes_{R'} N \longrightarrow M \otimes_{R'} N$$

με την ιδιότητα: Για κάθε ζευγάρι $(m, n) \in M \times N, \psi_\lambda(m \otimes n) = \lambda m \otimes n$. (Πράγματι, τότε $\psi_\lambda(\sum m_i \otimes n_i) = \sum \psi_\lambda(m_i \otimes n_i) = \sum \lambda m_i \otimes n_i$, οπότε το καλά ορισμένο της απεικόνισης είναι συνέπεια του καλά ορισμένου της ψ_λ.)

Εστω $\lambda \in R$. Αρκεί να δείξουμε ότι η

$$f_\lambda : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_{R'} N \\ (m, n) & \longmapsto & (\lambda m) \otimes n \end{cases}$$

είναι R-προσθετική, διότι τότε υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων ψ_λ τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & M \otimes_{R'} N \arrow[d, "\psi_\lambda"] \\ & M \otimes_{R'} N \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό δηλαδή $\psi_\lambda(m \otimes n) = (\lambda m) \otimes n$. Το ότι η f_λ είναι R-προσθετική είναι εύκολο π.χ. $f_\lambda(m_1 + m_2, n) = \lambda(m_1 + m_2) \otimes n = \lambda m_1 \otimes n + \lambda m_2 \otimes n = f_\lambda(m_1, n) + f_\lambda(m_2, n)$. Ομοίως αποδυκνείουμε και τις άλλες ιδιότητες.

Θεώρημα 4.10 *Εστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος, M, N δύο R-modules. Τότε το $M \otimes_R N$ γίνεται R-module μέσω της πράξης $\lambda(m \otimes n) := (\lambda m) \otimes n = m \otimes (\lambda n)$ και αν $M =< u_1, ..., u_l >_R, \ \ N =_R< v_1, ..., v_k >$, τότε ισχύει:*

$$M \otimes_R N =_R< u_i \otimes v_j / i = 1, 2, ..., l, \ j = 1, 2, ..., k >$$

Απόδειξη: Για το πρώτο το M είναι ένα (R,R)-bimodule, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.9. Για το δεύτερο, παρατηρούμε ότι:

$$m\otimes n=\left(\sum_i \lambda_i u_i\right)\otimes\left(\sum_j \mu_j v_j\right)=\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j u_i\otimes v_j.$$

Εστω ${}_RN$ ένα αριστερό R-module. Θεωρούμε το R σαν διπλό module του εαυτού του, $R={}_RR_R$. Απο το θεώρημα 4.9 έπεται ότι το $R\otimes_R N$ είναι αριστερό R-module.

Θεώρημα 4.11 *Η απεικόνιση*

$$\phi:\begin{cases} {}_RN & \longrightarrow & R\otimes_R N\\ n & \longmapsto & 1\otimes n\end{cases}$$

είναι ισομορφισμός αριστερών R-modules.

Απόδειξη: Η ϕ είναι, λόγω της γνωστής ιδιότητας πρόσθεσης τανυστών, ένας ομομορφισμός αριστερών R-modules. Θα έχουμε αποδείξει ότι είναι ισομορφία αν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων:

$$\psi:R\otimes_R N\longrightarrow N$$

με $\psi\circ\phi=Id_N$, $\phi\circ\psi=Id_{R\otimes_R N}$. Καταρχήν η

$$j:\begin{cases} R\times N & \longrightarrow & N\\ (\lambda,n) & \longmapsto & \lambda n\end{cases}$$

είναι R-προσθετική. Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα 4.5 υπάρχει ομομορφισμός

$$\psi:R\otimes_R N\longrightarrow N$$

με $\psi(\lambda\otimes n)=\lambda n$, δηλαδή $\psi(1\otimes n)=n$.

Ορισμός 4.12 *Εστω $R\leq E$ δύο δακτύλιοι. Θεωρούμε $E={}_EE_R$. Εστω ${}_RN$ ένα αριστερό R-module. Το αριστερό E-module*

$$N^E:=E\otimes_R N$$

θα το λέμε επέκταση των συντελεστών (scalars) του N με E.

Θεώρημα 4.13 *Εστω M_R και ${}_RN$ δύο R-modules και έστω ότι το ${}_RN$ είναι ελεύθερο με μία βάση το σύνολο $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Τότε κάθε $x \in M \otimes_R N$ γράφεται μονοσήμαντα στην μορφή:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes v_i$$

Απόδειξη: Εξ υποθέσεως έχουμε: $M \otimes_R N = M \otimes_R (\oplus_{i=1}^{n} Rv_i) = \oplus_{i=1}^{n} (M \otimes_R Rv_i)$. Επομένως κάθε $x \in M \otimes_R N$ γράφεται μομοσήμαντα στην μορφή: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ με $x_i \in M \otimes_R Rv_i$, δηλαδή

$$x_i = \sum_{\nu=1}^{r} m_{i_\nu} \otimes \lambda_i v_i = \sum_{\nu=1}^{r} m_{i_\nu} \lambda_i \otimes v_i = m_i \otimes v_i. \qquad (r = r(i))$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι τα x_i καθορίζουν μονοσήμαντα τα m_i. Η συνάρτηση $\begin{cases} R & \longrightarrow & Rv_i \\ \lambda & \longmapsto & \lambda v_i \end{cases}$ είναι ένας ισομορφισμός από R-modules, αφού τα v_i αποτελούν βάση. Από το θεώρημα 4.11 έπεται ότι η απεικόνιση:

$$\begin{cases} M & \longrightarrow & M \otimes_R R \\ m & \longmapsto & m \otimes 1 \end{cases}$$

είναι ισομορφισμός ομάδων. Επομένως η απεικόνιση:

$$\begin{cases} M & \longrightarrow & M \otimes_R R & \longrightarrow & M \otimes_R Rv_i \\ m & \longmapsto & m \otimes 1 & \longmapsto & m \otimes v_i \end{cases}$$

είναι ισομορφισμός ομάδων, δηλαδή το m_i, καθορίζεται μονοσήμαντα από το x_i.

Πόρισμα 4.14 *Εστω $R \leq E$ δακτύλιοι, ${}_RN$ ελεύθερο R-module με βάση $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ και $E =_E E_R$. Τότε ισχύουν:*

(1) $N^E := E \otimes_R N$ είναι ένα ελεύθερο E-module με βάση το σύνολο $\{1 \otimes v_1, ..., 1 \otimes v_n\}$.

(2) Η απεικόνιση:

$$\begin{cases} N & \longrightarrow & N^E \\ n & \longmapsto & 1 \otimes n \end{cases}$$

είναι ένας ένα προς ένα ομομορφισμός από R-modules, ορίζει δηλαδή μία εμφύτευση $N \hookrightarrow N^E$.

Απόδειξη:

(1) Είναι γνωστό,θεώρημα 4.13, ότι κάθε $x \in N^E$ έχει μία μονοσήμαντη παράσταση της μορφής

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i(1 \otimes v_i) \ \ a_i \in E.$$

Επομένως το σύνολο $\{1 \otimes v_i / i = 1, 2, ...n\}$ αποτελεί ένα σύστημα γεννητόρων και, λόγω του μονοσημάντου της παράστασης, επίσης βάση.

(2) Η απεικόνιση είναι ομομορφισμός από R-modules. Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ένα προς ένα. Εστω $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \neq 0$ όπου $\lambda_i \in R$ όχι όλα μηδέν. Τότε

$$1 \otimes u = 1 \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (1 \otimes \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1 \otimes v_i) \neq 0,$$

οπότε, λόγω της πρώτης ιδιότητας, η απεικόνιση είναι ένα προς ένα.

Πόρισμα 4.15 *Αν ο R είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος, M ελεύθερο R-module με βάση $\{u_1, ..., u_k\}$ και N ελεύθερο R-module με βάση $\{v_1, ..., v_l\}$, τότε και το $M \otimes_R N$ είναι ελεύθερο R-module με βάση $\{u_i \otimes v_j / i = 1, 2, ..., k, j = 1, 2, ..., l\}$*

Απόδειξη: Είναι ήδη γνωστό ότι $M \otimes_R N =_R < u_i \otimes v_j >$. Εστω ότι για $\lambda_{ij} \in R$ ισχύει:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \lambda_{ij} (u_i \otimes v_j) = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij} u_i \right) \otimes v_j$$

Από το θεώρημα 4.13 έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij} u_i = 0$, και, λόγω της υποθέσεως, $\lambda_{ij} = 0$ για κάθε $i \in \{1, 2, ..., k\}$ και $j \in \{1, 2, ..., l\}$.

Θεώρημα 4.16 *Εστω R, R' δακτύλιοι και L_R, ${}_R M_{R'}$, ${}_{R'} N$ modules. Τότε υπάρχει ακριβώς ένας ισομορφισμός ομάδων:*

$$\phi : L \otimes_R (M \otimes_{R'} N) \longrightarrow (L \otimes_R M) \otimes_{R'} N$$

τέτοιος ώστε για κάθε $(l, m, n) \in L \times M \times N$ να ισχύει:

$$\phi(l \otimes (m \otimes n)) = (l \otimes m) \otimes n.$$

Αν ταυτίσουμε πρότυπα και εικόνες μέσω του ισομορφισμού, έχουμε

$$l \otimes (m \otimes n) = (l \otimes m) \otimes n,$$

δηλαδή το τανυστικό γινόμενο είναι προσεταιριστικό.

Απόδειξη: Εστω $l \in L$ σταθερό. Η απεικόνιση

$$f_l : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & (L \otimes_R M) \otimes_{R'} N \\ (m, n) & \longmapsto & (l \otimes m) \otimes n \end{cases}$$

είναι R'-προσθετική. Επομένως, θεώρημα 4.5, υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\psi_l : \begin{cases} M \otimes_{R'} N & \longrightarrow & (L \otimes_R N) \otimes_{R'} N \\ m \otimes n & \longmapsto & (l \otimes m) \otimes n \end{cases}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η απεικόνιση:

$$\psi_l : \begin{cases} L \times (M \otimes_{R'} N) & \longrightarrow & (L \otimes_R M) \otimes_{R'} N \\ (l, m \otimes n) & \longmapsto & (l \otimes m) \otimes n \end{cases}$$

είναι R-προσθετική. Επομένως υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων:

$$\phi : \begin{cases} L \otimes_R (M \otimes_{R'} N) & \longrightarrow & (L \otimes_R M) \otimes_{R'} N \\ l \otimes (m \otimes n) & \longmapsto & (l \otimes m) \otimes n \end{cases}$$

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων:

$$\chi : \begin{cases} (L \otimes_R M) \otimes_{R'} N & \longrightarrow & L \otimes_R (M \otimes_{R'} N) \\ (l \otimes m) \otimes n & \longmapsto & l \otimes (m \otimes n) \end{cases}$$

Επιπλέον ισχύει $\phi \circ \chi = Id_{(L \otimes_R M) \otimes_{R'} N}$ και $\chi \circ \phi = Id_{L \otimes_R (M \otimes_{R'} N)}$, δηλαδή ϕ είναι ισομορφισμός.

Θεώρημα 4.17 *Εστω K αντιμεταθετικός δακτύλιος, A_1, A_2, K-άλγεβρες και έστω:*

$$f_1 : \begin{cases} K & \longrightarrow & A_1 \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \cdot 1_{A_1} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} K & \longrightarrow & A_2 \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \cdot 1_{A_2} \end{cases}$$

οι κανονικοί ομομορφισμοί, οι οποίοι είναι μονομορφισμοί αν K είναι σώμα. Τότε στο R-module $A_1 \otimes_K A_2$ ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο πολλαπλασιασμός έτσι ώστε το $A_1 \otimes_K A_2$ να γίνεται K-άλγεβρα με πράξη:

$$(a_1 \otimes a_2) \cdot (b_1 \otimes b_2) = (a_1 b_1) \otimes (a_2 b_2)$$

Για τον φυσικό ομομορφισμό:

$$f : \begin{cases} K & \longrightarrow & A_1 \otimes_K A_2 \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \cdot 1_{A_1 \otimes A_2} \end{cases}$$

ισχύουν $f(\lambda) = f_1(\lambda) \otimes 1_{A_2} = 1_{A_1} \otimes f_2(\lambda) = \lambda(1_{A_1} \otimes 1_{A_2})$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση:

$$\begin{cases} (A_1 \otimes_K A_2) \times (A_1 \otimes_K A_2) & \longrightarrow & A_1 \otimes_K A_2 \\ (\sum_i a_1^{(i)} \otimes a_2^{(i)}, \sum_j b_1^{(j)} \otimes b_2^{(j)}) & \longmapsto & \sum_{i,j} (a_1^{(i)} b_1^{(j)}) \otimes (a_2^{(i)} b_2^{(j)}) \end{cases}$$

είναι καλά ορισμένη. Αυτό όμως είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.4. Το ότι το K-module $A_1 \otimes_K A_2$ γίνεται K-άλγεβρα με βάση τον παραπάνω πολλαπλασιασμό είναι απλή επαλήθευση των ιδιοτήτων. Τέλος οι ιδιότητες της f είναι προφανείς.

Θεώρημα 4.18 *Αν A είναι K-άλγεβρα $f : K \longrightarrow A$ ο φυσικός ομομορφισμός και R ένας υπερδακτύλιος του K, τότε το $R \otimes_K A$ γίνεται μέσω του πολλαπλασιασμού:*

$$(\lambda \otimes a)(\lambda' \otimes a') := (\lambda\lambda') \otimes (aa'),$$

μία R-άλγεβρα με την φυσική εμφύτευση: $\begin{cases} R & \longrightarrow & R \otimes_K A \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \otimes 1_A \end{cases}.$

Απόδειξη: Το θεώρημα είναι ειδική περίπτωση του πορίσματος 4.14 και του θεωρήματος 4.17.

Ορισμός 4.19 *Το $A^R := R \otimes_K A$ θα λέγεται επέκταση των συνετελεστών (scalars) της άλγεβρας A.*

Τέλος χωρίς αποδείξεις αναφέρουμε τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 4.20 *Εστω R αντιμεταθετικός υπερδακτύλιος του K, τέτοιος ώστε το μοναδιαίο του K να συμπίπτει με το μονάδιαιο του R. Τότε ισχύουν:*

(1) Υπάρχει ακριβώς ένας ισομορφισμός R-αλγεβρών

$$\Phi : M_n(K)^R := R \otimes_K M_n(K) \longrightarrow M_n(R)$$

τέτοιως ώστε για κάθε $a \in M_n(K)$, $\Phi(1 \otimes a) = a$.

(2) Υπάρχει ακριβώς ένας ισομορφισμός R-αλγεβρών:

$$\Psi : K[G]^R := R \otimes_K K[G] \longrightarrow R[G]$$

τέτοιως ώστε για κάθε $a \in K[G], \Psi(1 \otimes a) = a$.

Ταυτίζοντας πρότυπα και εικόνες, παίρνουμε $M_n(K) \subset M_n(R)$ και $K[G] \subset R[G]$.

Θεώρημα 4.21 *Εστω* $K \leq L$, *όπου* K, L *είναι σώματα,* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, V_1, V_2 K*-διανυσματικοί χώροι. Εστω ακόμη* $B_1 = \{u_1, u_2, ..., u_{n_1}\}$ *βάση του* V_1, $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_{n_2}\}$ *βάση του* V_2 *και*

$$\Phi_{B_1,B_2} : \begin{cases} Hom_K(V_1, V_2) & \longrightarrow & M_{n_1\times n_2}(K) \\ \phi & \longmapsto & a_{ij} \end{cases}$$

όταν $\phi(u_i) = \sum_j a_{ij} v_j$. *Τότε ισχύουν:*

(1) *Το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} L \otimes_K Hom_K(V_1, V_2) \arrow[r, "\cong", "\sigma"'] \arrow[d, "\cong"] & Hom_L(V_1^L, V_2^L) \arrow[d, "\cong"] \\ L \otimes_K M_{n_1\times n_2}(K) \arrow[r, "\cong", "\tau"'] & M_{n_1\times n_2}(L) \end{tikzcd}$$

όπου $\sigma(1 \otimes \phi) = Id_L \otimes \phi$ *και* $\tau(1 \otimes a) = a$.

(2) *Αν* $V = V_1 = V_2$, $n = n_1 = n_2$, *τότε έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα* $L-$*αλγεβρών:*

$$\begin{tikzcd} L \otimes_K End_K(V) \arrow[r, "\cong", "\sigma"'] \arrow[d, "\cong\, Id_L \otimes \Phi_B"] & End_L(V) \arrow[d, "\Phi_{1\otimes B}"', "\cong"] \\ L \otimes_K M_n(K) \arrow[r, "\cong", "\tau"'] & M_n(L) \end{tikzcd}$$

4.2 Επαγώμενες παραστάσεις και χαρακτήρες

Εστω K σώμα, G πεπερασμένη ομάδα τάξης g και $chK \not| g$. Εστω $H \leq G$, $G = \dot{\cup}_{i=1}^{r} \sigma_i H$, η ανάλυση της G σε αριστερές πλευρικές κλάσεις ως προς την H. Ισχύει

$$K[H] \subseteq K[G].$$

Θεώρημα 4.22 *Η $K[G]$ είναι ένα ελεύθερο δεξιό $K[H]$-module με βάση το σύνολο $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$, δηλαδή:*

$$K[G] = \oplus_{i=1}^{r} \sigma_i K[H]$$

<u>Απόδειξη:</u> Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $a \in K[G]$ έχει μονοσήμαντη παράσταση της μορφής

$$a = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i a_i, \quad a_i \in K[H].$$

Για την ύπαρξη παρατηρούμε ότι:

$$a = \sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \sigma = \sum_{i=1}^{r} \sum_{t \in H} \lambda_{i,t} \sigma_i t = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \left(\sum_{t \in H} \lambda_{i,t} t \right) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i a_i,$$

όπου $a_i \in H$. Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα υποθέτουμε ότι έχουμε δύο παραστάσεις:

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma_i \left(\sum_{t \in H} \lambda_{i,t} t \right) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \left(\sum_{t \in H} \lambda'_{i,t} t \right).$$

Επομένως

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{t \in H} \lambda_{i,t} \sigma_i t = \sum_{i=1}^{r} \sum_{t \in H} \lambda'_{i,t} \sigma_i t$$

Τότε όμως θα έπρεπε $\lambda_{i,t} = \lambda'_{i,t}$ για όλα τα $i \in \{1, 2, ..., r\}$ και όλα τα $t \in H$, διότι το σύνολο $\{\sigma_i t / i = 1, 2, ..., r, t \in H\}$ είναι βάση της $K[G]$ υπέρ το K.

Ορισμός 4.23 *Εστω $N =_{K[H]} N$ ένα αριστερό $K[H]$-module. Το $K[G]$-module*

$$N^G := N^{K[G]} = K[G] \otimes_{K[H]} N$$

θα λέγεται το από το N <u>επαγόμενο</u> $K[G]$-module.

Παρατηρούμε ότι έχει τις παρακάτω ιδιότητες: Απο το θεώρημα 4.22 έπεται ότι $K[G] = \oplus_{i=1}^{r}\sigma_i K[H]$, δηλαδή

$$N^G = \oplus_{i=1}^{r}\left(\sigma_i K[H] \otimes_{K[H]} N\right).$$

Συνεπώς, λόγω του θεωρήματος 4.13, κάθε $x \in N^G$ έχει μονοσήμαντη παράσταση της μορφής $x = \sum \sigma_i \otimes m_i, m_i \in N$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma_1 = e$. Επομένως το $\sigma_1 K[H] = K[H]$, είναι ευθύς προσθεταίος του $K[G]$, συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα 4.7, το $K[H] \otimes_{K[H]} N$ εμφυτεύεται κανονικά μέσα στο $N^G = K[G] \otimes_{K[H]} N$ όπου φυσικά ταυτίζουμε ταυτίζουμε το $t \otimes n, t \in H$ σαν στοιχείο του $K[H] \otimes_{K[H]} N$ με το $t \otimes n$ σαν στοιχείο του $K[G] \otimes_{K[H]} N$.

Ακόμη, λόγω του θεωρήματος 4.11, ισχύει:

$$\begin{cases} N \cong K[H] \otimes_{K[H]} N \\ \quad n \longmapsto e \otimes n. \end{cases}$$

Μέσω αυτής της ταύτισης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:$N \leq N^G$. Επομένως έχουμε ότι κάθε $x \in N^G$ έχει μια μονοσήμαντη παράσταση της μορφής

$$x = \sum_{i=1}^{r}(\sigma_i \otimes n_i) = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i(e \otimes n_i) = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i n_i$$

συνεπώς

$$N^G = \oplus_{i=1}^{r}\sigma_i N.$$

Θεώρημα 4.24 *Εστω $H \leq G$ και $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{r} \sigma_i H$, M ένα αριστερό $K[G]$-module και $N \subseteq M$ ένα $K[H]$-υποmodule. Τότε ισχύει:*

$$M = N^G \Leftrightarrow M = \oplus_{i=1}^{r}\sigma_i N.$$

<u>Απόδειξη:</u> Αν $M = N^G$ τότε κατάνάγκην $M = \oplus_{i=1}^{r}\sigma_i N$, όπως μόλις αποδείξαμε. Αντίστροφα έστω $M = \oplus_{i=1}^{r}\sigma_i N$ δηλαδή κάθε $x \in M$ παρίσταται μονοσήμαντα σαν $x = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i n_i$, $n_i \in N$. Ισχυρίζομαι ότι τα n_i ορίζονται μονοσήμαντα από την σχέση $\sigma_i n_i = x_i$. Πράγματι, αν $\sigma n = \sigma n'$ τότε $\sigma(n-n') = 0$ δηλαδή $\sigma^{-1}\sigma(n-n') = e(n-n') = n-n' = 0$. Επομένως, οι συναρτήσεις:

$$\phi : \begin{cases} M & \longrightarrow & N^G \\ \sum \sigma_i n_i & \longmapsto & \sum \sigma_i \otimes n_i \end{cases}$$

και

$$\psi : \begin{cases} N^G & \longrightarrow & M \\ \sum \sigma_i \otimes n_i & \longmapsto & \sum \sigma_i n_i \end{cases}$$

είναι καλά ορισμένες και ομομορφισμοί από $K[G]$-modules. Επειδή $\phi \circ \psi = Id_{N^G}$ και $\psi \circ \phi = Id_M$ έχουμε ότι ϕ και ψ είναι ισομορφισμοί. Επομένως

$$M = \oplus_{i=1}^r \sigma_i N \cong N^G = K[G] \otimes_{K[H]} N.$$

Δηλαδή, ταυτίζοντας τα ισόμορφα, $M = N^G$.

Ορισμός 4.25 *Εστω $H \leq G$ και*

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

$$\rho_0 : H \longrightarrow GL(W)$$

δύο παραστάσεις, των G και H υπέρ το K. Εστω επιπλέον $N =_{K[H]} N = (W, \rho_0^*)$ και $M =_{K[G]} M = (V, \rho^*)$ τα αντίστοιχα modules παραστάσεων. Θα λέμε ότι η ρ <u>επάγεται από την</u> ρ_0 όταν $M \cong N^G$.

Θεώρημα 4.26 *Εστω ρ, ρ' δύο ισοδύναμες παραστάσεις της G και ρ_0, ρ_0' ισοδύναμες παραστάσεις της H. Τότε ισξύει ότι:*

$$(\rho \text{ επάγεται από την } \rho_0) \Leftrightarrow (\rho' \text{ επάγεται από την } \rho_0')$$

<u>Απόδειξη:</u> Προφανής από την αντιστοιχία ισοδυνάμων παραστάσεων και modules παράστασης (δες θεώρημα 3.21).

Θεώρημα 4.27 *Εστω ρ_0 παράσταση της H και ρ, ρ' παραστάσεις της G επαγώμενες της ρ_0. Τότε οι ρ, ρ' είναι μεταξύ τους ισοδύναμες, δηλαδή, modulo ισοδυναμία, υπάρχει <u>ακριβώς μια</u> παράσταση της G η οποία επάγεται από την παράσταση ρ_0 της H.*

<u>Απόδειξη:</u> Αν N ένα module παράστασης της ρ_0 τότε το N^G είναι, modulo ισομορφία, μονοσήμαντα ορισμένο $K[G]$-module.

Θεώρημα 4.28 *Εστω $H \leq G$ υποομάδα της ομάδας G και $W \leq V$ διανυσματικός υπόχωρος του K-διανυσματικού χώρου V. Αν*

$$\rho_0 : H \longrightarrow GL(W) \text{ είναι μια παράσταση της } H$$

$$\rho : G \longrightarrow GL(V) \text{ είναι μια παράσταση της } G$$

Τότε ισχύει

$$(\text{η } \rho \text{ επάγεται από την } \rho_0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (a) & \forall\, t \in H, \text{ και } \forall\, w \in W \;\; \rho_0(t)(w) = \rho(t)(w) \text{ και} \\ (b) & \text{αν } G = \dot{\cup}_{i=1}^{r}\, \sigma_i H \text{ τότε } V = \oplus_{i=1}^{r} \rho(\sigma_i) W \end{array} \right\}$$

<u>Απόδειξη:</u> Η παράσταση ρ της G επάγεται από την παράσταση ρ_0 της H ακριβώς τότε όταν $(V, \rho^*) = (W, \rho_0^*)^G$. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.24 η τελευταία σχέση ισχύει ακριβώς τότε όταν $(V, \rho^*) = \oplus_{i=1}^{r} \rho^*(\sigma_i) W = \oplus_{i=1}^{r} \sigma_i W$ και W είναι ένα $K[H]$-υπomodule, το οποίο είναι ισοδύναμο με την ισχύ των (a) και (b).

Θεώρημα 4.29 *Εστω $U \leq H \leq G$ και $M =_{K[U]} M$ ένα αριστερό $K[U]$-module. Τότε ισχύει:*

$$M^G \cong (M^H)^G$$

δηλαδή η έννοια του επαγώμενου module και συνεπώς και της επαγώμενης παράστασης είναι <u>μεταβατική</u>.

<u>Απόδειξη:</u>

$$(M^H)^G = K[G] \otimes_{K[H]} \big(K[H] \otimes_{K[U]} M \big) =$$

$$\overset{(\Theta.4.16)}{=} \big(K[G] \otimes_{K[H]} K[H] \big) \otimes_{K[U]} M \cong K[G] \otimes_{K[U]} M = M^G.$$

Εστω τώρα $H \leq G$, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, $\rho_0 : H \longrightarrow GL(W)$ δύο παραστάσεις των ομάδων G και H υπέρ το K και έστω ότι η ρ επάγεται από την ρ_0, $\rho = Ind_H^G \rho_0$. Ποιά σχέση έχει ο πίνακας παράστασης της ρ με τον πίνακα παράστασης της ρ_0; Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι: $W \leq V$, διότι

$$(V, \rho^*) \cong (W, \rho_0^*)^G = K[G] \otimes_{K[H]} (W, \rho_0^*)$$

και η $(W, \rho_0^*) \cong K[H] \otimes_{K[H]} (W, \rho_0^*)$ μπορεί να εμφυτευθεί μέσα στον (V, ρ^*). Αν λοιπόν $W \leq V$ τότε από το θεώρημα 4.28 έπεται ότι

$$V = \oplus_{i=1}^{r} \rho(\sigma_i) W, \text{ όπου } G = \dot{\cup}_{i=1}^{r}\, \sigma_i H.$$

Αν $B_0 = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ είναι μια K-βάση του W, τότε το σύνολο $B = \{\rho(\sigma_i)(w_j)/i = 1, 2, ..., r, j = 1, 2, ..., m\}$ είναι μια K-βάση του διανυσματικού χώρου V. Το ζευγάρι (i, j) θα θεωρείται διατεταγμένο λεξικογραφικά. Για $\sigma \in G$ σταθερό, έχουμε $M(\sigma) = \Phi_B(\rho(\sigma))$. Για κάθε $\sigma \in G$ το $r(\sigma) \in GL(V)$ Εφαρμόζουμε το $\rho(\sigma)$ στα στοιχεία της βάσης B και έχουμε

$$\rho(\sigma)\left(\rho(\sigma_i)(w_j)\right) = \sum_{\nu,\mu=1}^{r,m} \alpha_{(\nu,\mu),(i,j)} \rho(\sigma_\nu)(w_\mu)$$

όπου $\alpha_{(\nu,\mu),(i,j)} \in K$. Εστω τώρα ότι $\sigma\sigma_i = \sigma_{s(i)} t_i$, όπου $s(i) \in \{1, 2, ..., r\}, t_i \in H$. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $s \in S_r$ διότι η απεικόνιση

$$\sigma_i H \longrightarrow \sigma\sigma_i H = \sigma_{s(i)} H$$

είναι αμφιμονοσήμαντη (bijection). Επομένως έχουμε

$$\rho(\sigma)(\rho(\sigma_i)(w_j)) = \rho(\sigma\sigma_i)(w_j) = \rho(\sigma_{s(i)} t_i)(w_j) =$$

$$= \rho(\sigma_{s(i)})(\rho_0(t_i)(w_j) = \rho(\sigma_{s(i)}) \left(\sum_{\mu=1}^{m} \beta_{\mu j}(t_i) w_\mu \right) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \beta_{\mu j}(t_i) \rho(\sigma_{s(i)})(w_\mu) = \sum_{\mu=1}^{m} \beta_{\mu j}(t_i) \left(\sum_{\nu=1}^{r} \delta_{\nu,s(i)} \rho(\sigma_\nu)(w_\mu) \right) =$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{m,r} \beta_{\mu j}(t_i) \delta_{\nu,s(i)} \rho(\sigma_\nu)(w_\mu).$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς προκύπτει ότι:

$$\alpha_{(\nu,\mu),(i,j)} = \beta_{\mu j}(t_i)\delta_{\nu,s(i)} = \begin{cases} \beta_{\mu j}(t_i), & \text{όταν} \quad s(i) = \nu \\ 0, & \text{όταν} \quad s(i) \neq \nu \end{cases}$$

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\beta_{\mu j}(t_i) = \Phi_{B_0}(\rho_0(t_i)) =: M_0(t_i)$$

οπότε

$$M(\sigma) = (\alpha_{(\nu,\mu),(i,j)}) = (\beta_{\mu j}(t_i)\delta_{\nu,s(i)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} M_0(t_1)\delta_{1,s(1)} & \cdots & M_0(t_r)\delta_{1,s(r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_0(t_1)\delta_{r,s(1)} & \cdots & M_0(t_r)\delta_{r,s(r)} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $M(\sigma)$ είναι ένας $r \times r$- πίνακας του Kronecker όπου σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη υπάρχει ακριβώς ένας ομαλός $m \times m$ πίνακας και όλοι οι άλλοι είναι μηδενικοί πίνακες. Οι ομαλοί αυτοί πίνακες βρίσκονται στην θέση «τομής» της $s(i)$-γραμμής με την i-στήλη.

Ειδικές περιπτώσεις

(1) Εστω $H = \{1\}$ και έστω ότι $degM_0 = 1$. Τότε η M είναι η ομαλή παράσταση της G

(2) Εστω $H \leq G$ και M_0 η ομαλή παράσταση της H. Η M είναι τότε η ομαλή παράσταση της G.

(3) Αν η M_0 είναι η μοναδιαία παράσταση της H τότε η M είναι παράσταση δια μεταθέσεων της G/H.

(4) Αν η M_0 είναι βαθμού 1, τότε οι $M(\sigma)$ είναι πίνακες στους οποίους σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο της ομάδας K^*. Τέτοιες παραστάσεις λέγονται μονωνυμικές (monomial).

Θεώρημα 4.30 *Εστω $H \leq G$ υποομάδα της G, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ παράσταση της G, $\rho_0 : H \longrightarrow GL(W)$ παράσταση της H και έστω ότι η ρ είναι επαγώμενη της ρ_0 $\rho = Ind_H^G \rho_0$. Εστω $\chi := \chi_\rho, \chi_0 := \chi_{\rho_0}$ οι αντίστοιχοι χαρακτήρες. Τότε για κάθε $\sigma \in G$ ισχύει:*

$$\chi(\sigma) = \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}\sigma t \in H}} \chi_0(t^{-1}\sigma t).$$

Απόδειξη: Ως γνωστό, έχουμε:

$$\chi(\sigma) = \chi_\rho(\sigma) = tr(M(\sigma)) = \sum_{(\nu,\mu)=(1,1)}^{(r,m)} \alpha_{(\nu,\mu),(\nu,\mu)}$$

όπου $\alpha_{(\nu,\mu),(\nu,\mu)} = \begin{cases} \beta_{\mu\mu}(t_\nu), & \text{όταν} \quad s(\nu) = \nu \\ 0, & \text{όταν} \quad s(\nu) \neq \nu. \end{cases}$

Επομένως έχουμε

$$\chi(\sigma) = \sum_{\substack{\nu = 1 \\ s(\nu) = \nu}}^{r} \sum_{\mu=1}^{m} \beta_{\mu\mu}(t_\nu) = \sum_{\substack{\nu = 1 \\ s(\nu) = \nu}}^{r} \chi_0(t_\nu)$$

Για $s(\nu) = \nu$ ισχύει ακόμη $H \ni t_\nu = \sigma_{s(\nu)}^{-1}\sigma\sigma_\nu = \sigma_\nu^{-1}\sigma\sigma_\nu$. Αν πάλι $s(\nu) \neq \nu$ τότε $\sigma_\nu^{-1}\sigma\sigma_\nu = \sigma_\nu^{-1}\sigma_{s(\nu)}t_\nu \notin H$ οπότε

$$\chi(\sigma) = \sum_{\substack{\nu = 1 \\ \sigma_\nu^{-1}\sigma\sigma_\nu \in H}}^{r} \chi_0(\sigma_\nu^{-1}\sigma\sigma_\nu).$$

Εστω $t \in G$ (οποιοδήποτε). Γράφουμε $t = \sigma_l t'$ με $l = \{1, 2, ..., r\}, t' \in H$ και έχουμε $t^{-1}\sigma t = (\sigma_l t')^{-1}\sigma(\sigma_l t) = t'^{\,-1}(\sigma_l^{-1}\sigma\sigma_l)t'$ το οποίο ανήκει στην H ακριβώς τότε όταν $\sigma_l^{-1}\sigma\sigma_l \in H$.

Επομένως $\chi_0(t^{-1}\sigma t) = \chi_0(\sigma_l^{-1}\sigma\sigma_l)$ και συνεπώς τα $\#H$ διαφορετικά στοιχεία $t \in \sigma_l H$ δίνουν την ίδια τιμή $\chi_0(t^{-1}\sigma t)$.

Μπορούμε να τροποποιήσουμε την έκφραση του θεωρήματος 4.30 κατά το,

Θεώρημα 4.31 *Εστω $H \leq G$ υποομάδα της G και χ_0 χαρακτήρας της H. Εστω ακόμη $g \in G$ και s το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της H των οποίων στοιχεία είναι συζυγή στην G με το g. Αν χ είναι ο επαγώμενος χαρακτήρας του χ_0 στην G τότε αν $s = 0$ έχουμε $\chi(g) = 0$. Αν $s \neq 0$ και $h_1, h_2, ..., h_s$ αντιπρόσωποι των s κλάσεων συζυγίας της H, τότε*

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\#Z_G(g)}{\#Z_H(h_i)}\chi_0(h_i).$$

Απόδειξη: Αν το $s = 0$, τότε το σύνολο $\{x \in G / x^{-1}gx \in H\}$ είναι κενό, οπότε το θεώρημα 4.30 μας δίνει: $\chi(g) = 0$. Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι $s > 0$ και θεωρούμε τα σύνολα

$$A_i := \{x \in G / x^{-1}gx \in H \text{ και } x^{-1}gx \text{ είναι συζυγές του } h_i\}, i = 1, 2, ..., s.$$

Τα σύνολα A_i είναι, εξ ορισμού, ξένα μεταξύ τους ανά δύο και η ένωση τους

$$\cup_{i=1}^{s} A_i = \{x \in G / x^{-1}gx \in H\}.$$

Λόγω του θεωρήματος 4.30 και πάλι έχουμε:

$$\chi(g) = \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{x \,\in\, G \\ x^{-1}gx \,\in\, H}} \chi_0(x^{-1}gx) = \frac{1}{\#H}\sum_{i=1}^{s}\sum_{x\in A_i}\chi_0(x^{-1}gx) =$$

$$= \frac{1}{\#H}\sum_{i=1}^{s}\sum_{x\in A_i}\chi_0(h_i) = \sum_{i=1}^{s}\frac{\#A_i}{\#H}\chi_0(h_i).$$

Σταθεροποιούμε τώρα κάποιο $i \in \{1, 2, ..., s\}$ και διαλέγουμε ένα $t_i \in G$ τέτοιο ώστε $t_i^{-1}gt_i = h_i$. Δεχόμαστε κατ' αρχήν, θα το αποδείξουμε σε λίγο, ότι:

$$A_i = Z_G(g)t_iH. \qquad (*)$$

Επομένως

$$\#A_i = \#(Z_G(g)t_iH) = \frac{(\#Z_G(g)) \cdot (\#H)}{\#(H \cap t_i^{-1}Z_G(g)t_i)}.$$

(Για την τελευταία ισότητα δες παράρτημα, σελ. 147.) Επειδή $t_i^{-1}Z_G(g)t_i = Z_G(t_i^{-1}gt_i) = Z_G(h_i)$, έχουμε

$$\#A_i = [H : H \cap Z_G(h_i)] \cdot (\#Z_G(g)) = [H : Z_H(h_i)] \cdot (\#Z_G(g)).$$

Συνεπώς

$$\frac{\#A_i}{\#H} = \frac{[H : Z_H(h_i)] \cdot (\#Z_G(g))}{\#H} = \frac{Z_G(g)}{Z_H(h_i)}$$

για κάθε $i \in \{1, 2, ..., s\}$, δηλαδή το θεώρημα. Απομένει η απόδειξη της $(*)$.

Για <u>κάθε</u> στοιχείο $c \in Z_G(g)$ και κάθε $h \in H$ έχουμε

$$(ct_ih)^{-1}g(ct_ih) = h^{-1}t_i^{-1}c^{-1}gct_ih \overset{c\in Z_G(g)}{=} h^{-1}t_i^{-1}c^{-1}cgt_ih = h^{-1}t_i^{-1}gt_ih = h^{-1}h_ih.$$

Αυτό σημαίνει ότι για το στοιχείο $y := ct_ih$ έχουμε $y^{-1}gy \in H$ και μάλιστα $y^{-1}gy = h^{-1}h_ih$, δηλαδή συζυγές του h_i. Συνεπώς $ct_ih \in A_i$ οπότε $Z_G(g)t_iH \subseteq A_i$ (1).

Αντίστροφα, αν $x \in A_i$ τότε, εξ ορισμού του A_i, έπεται ότι υπάρχει $h \in H$ τέτοιο ώστε

$$x^{-1}gx = h^{-1}h_ih = h^{-1}(t_i^{-1}gt_i)h.$$

Η τελευταία ισότητα μας δίνει,

$$g(xh^{-1}t_i^{-1}) = (xh^{-1}t_i^{-1})g,$$

δηλαδή ότι $xh^{-1}t_i^{-1} \in Z_G(g)$. Επομένως το $x \in Z_G(g)t_ih \subseteq Z_G(g)t_iH$, δηλαδή ότι

$$Z_G(g)t_iH \subseteq A_i(2).$$

Από τις (1) και (2) έπεται η $(*)$.

Αμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.31 είναι το ακόλουθο

Πόρισμα 4.32 *Εστω $H \leq G$ υποομάδα της G, $g \in G$ και έστω ότι το s, δηλαδή το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της H των οποίων στοιχεία είναι συζυγή στην G με το g, είναι <u>θετικό</u>. Εστω ℓ η τάξη της κλάσης συζυγίας στην G του g και έστω $h_1, h_2, ..., h_s$ αντιπρόσωποι αυτών των s κλάσεων συζυγίας της H και $k_1, k_2, ..., k_s$ οι τάξεις αυτών των κλάσεων. Τότε, αν χ ο επαγώμενος χαρακτήρας της χ_0 στην G,*

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{s}[G : H]\frac{k_i}{\ell}\chi_0(h_i).$$

Απόδειξη: Αμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.31 και της σχέσης $\#C_g = [G : Z_G(g)]$.

Ορισμός 4.33 *Εστω $H \leq G$ υποομάδα της G και $K^{(H)}$ ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων κλάσεων συζυγίας της H, $f : H \longrightarrow K$ ενώ $K^{(G)}$ ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων κλάσεων συζυγίας της G. Εστω $< \cdot, \cdot >_H$, $< \cdot, \cdot >_G$ τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα στους $K^{(H)}$ και $K^{(G)}$. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση:*

$$Ind_H^G := Ind : \begin{cases} K^{(H)} & \longrightarrow & K^{(G)} \\ f & \longmapsto & Indf \end{cases}$$

όπου, για κάθε $\sigma \in G$ η $Indf$ ορίζεται ώς εξής:

$$(Indf)(\sigma) = \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}\sigma t \in H}} f(t^{-1}\sigma t).$$

Η $Indf$ είναι προφανώς μια συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G και ονομάζεται η από την f επαγώμενη απεικόνιση.

Αν $Ind\rho_0$ είναι η από την ρ_0 επαγώμενη παράσταση τότε, λόγω του θεωρήματος 4.30, έχουμε:

$$\chi_{Ind\rho_0} = Ind\chi_{\rho_0}.$$

Αν πάλι f συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G, θεωρούμε τον περιορισμό

$$Rest : \begin{cases} K(G) & \longrightarrow & K^{(H)} \\ f & \longmapsto & Rest_H f := f|_H. \end{cases}$$

Θεώρημα 4.34 (Νόμος αντιστροφής του Frobenius) *Αν $H \leq G$ υποομάδα της G, $\phi \in K^{(H)}$ και $\psi \in K^{(G)}$, τότε ισχυει*

$$< \phi, Rest\psi >_H = < Ind\phi, \psi >_G .$$

Απόδειξη: Εστω $g := \#G, h := \#H$. Τότε

$$< \phi, Rest\psi >_H = \frac{1}{h}\sum_{t\in H}\phi(t)(Rest\psi)(t^{-1}) = \frac{1}{h}\sum_{t\in H}\phi(t)\psi(t^{-1}) \ kai$$

$$< Ind\phi, \psi >_G = \frac{1}{g}\sum_{\sigma\in G}(Ind\phi)(\sigma)\psi(\sigma^{-1}) = \frac{1}{g}\sum_{\sigma\in G}\left(\frac{1}{h}\sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}\sigma t \in H}}\phi(t^{-1}\sigma t)\right)\psi(\sigma^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{gh}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\substack{t\in G\\ t^{-1}\sigma t\in H}}\phi(t^{-1}\sigma t)\psi(\sigma^{-1}) = \frac{1}{gh}\sum_{t\in G}\sum_{\sigma\in tHt^{-1}}\phi(t^{-1}\sigma t)\psi(\sigma^{-1}) =$$

$$\overset{(t'=t^{-1}\sigma t)}{=} \frac{1}{gh}\sum_{t\in G}\sum_{t'\in H}\phi(t')\psi(t'^{-1}).$$

Παρατήρηση: Οπως θα δούμε παρακάτω ο νόμος αντιστροφής του Frobenius μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε χαρακτήρες της G όταν είναι γνωστοί χαρακτήρες μιας υποομάδος $H \leq G$.

Πόρισμα 4.35 *Εστω K αλγεβρικά κλειστό, $ch(K) = 0$, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, ανάγωγη παράσταση της G και $\rho_0 : H \longrightarrow GL(W)$ ανάγωγη παραστάση της H. Εστω ακόμη $Ind\rho_0 = Ind_H^G\rho_0 : G \longrightarrow GL(\tilde{V})$ η επαγώμενη από την ρ_0 παράσταση και έστω $Ind\rho_0 = \oplus_{i=1}^r \rho^{(i)}$ η ανάλυση της σε ανάγωγες παραστάσεις της G. Εστω $Rest_H^G\rho = \oplus_{i=1}^l \rho_0^{(i)}$ η ανάλυση του περιορισμού σε ανάγωγες παραστάσεις της H. Στο σύνολο $\{\rho^{(1)}, ...\rho^{(r)}\}$ υπάρχουν ακριβώς τόσες παραστάσεις ισοδύναμες προς την ρ όσες υπάρχουν στο σύνολο $\{\rho_0^{(1)}, ...\rho_0^{(l)}\}$ και είναι ισοδύναμες προς την ρ_0.*

Απόδειξη: Καταρχήν σύμφωνα με το θεώρημα 1.36 του $1^{ου}$ κεφαλαίου, το εσωτερικό γινόμενο $< \chi_{\rho_0}, \chi_{Rest\rho} >_H$ ισούται με το πλήθος παραστάσεων του συνόλου $\{\rho_0^{(1)}, ...\rho_0^{(l)}\}$ που είναι ισοδύναμες προς την ρ_0. Επίσης, αφού $\chi_{Rest\rho} = Rest\chi_\rho$, έχουμε ότι

$$< \chi_{\rho_0}, \chi_{Rest\rho} >_H = < \chi_{\rho_0}, Rest\chi_\rho >_H .$$

Από την άλλη μεριά το εσωτερικό γινόμενο $< \chi_{Ind_H^G\rho_0}, \chi_\rho >_G$ παριστά το πλήθος των παραστάσεων του συνόλου $\{\rho^{(1)}, ...\rho^{(r)}\}$ που είναι ισοδύναμες προς την ρ και αφού $\chi_{Ind\rho_0} = Ind\chi_{\rho_0}$ έχουμε ότι

$$< \chi_{Ind\rho_0}, \chi_\rho >_G = < Ind\chi_{\rho_0}, \chi_\rho >_G .$$

Τέλος ο νόμος αντιστροφής του Frobenius μας δίνει:

$$< \chi_{\rho_0}, Rest\chi_\rho >_H = < Ind\chi_{\rho_0}, \chi_\rho >_G .$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε το ζητούμενο.

Πόρισμα 4.36 *Εστω K αλγεβρικά κλειστό και $ch(K) = 0$. Εστω ακόμη $A \leq G$, A αβελιανή υποομάδα της G. Αν $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ ανάγωγη παράσταση της G υπέρ το K,* *τότε ο βαθμός*

$$deg\rho \leq [G:A].$$

Απόδειξη: Εστω $\rho_0 \subset Rest_A\rho$ ανάγωγη υποπαράσταση της ομάδος A. Από το θεώρημα του Maschke έχουμε ότι η ρ_0 είναι ευθύς προσθεταίος της $Rest_A\rho$, δηλαδή η ρ_0 εμφανίζεται (modulo ισοδυναμία) σε κάθε ανάλυση της $Rest_A\rho$ σε ευθύ άθροισμα αναγώγων. Εστω $\rho_1 = Ind_A^G\rho_0$. Από το πόρισμα 4.35 έχουμε ότι η ρ_1 περιέχει στην ανάλυση της σε ευθύ άθροισμα αναγώγων μια ισοδύναμη προς την ρ δηλαδή

$$deg\rho \leq deg\rho_1.$$

Απο την άλλη μεριά

$$deg\rho_1 = \chi_{\rho_1}(e) = \frac{1}{\#A} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}et \in A}} \chi_0(t^{-1}et) = \frac{g}{\#A}\chi_0(e) = [G:A]deg\rho_0$$

Επειδή η A είναι αβελιανή, έπεται ότι $deg\rho_0 = 1$.

Σημείωση Αν η G είναι αβελιανή τότε αποδείξαμε με άλλο τρόπο ότι κάθε ανάγωγη παράστασή της έχει βαθμό 1.

Παρατήρηση: Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε ότι αν η A όχι μόνο αβελιανή αλλά και $A \lhd G$ τότε ισχύει $deg\rho | [G:A]$. Η σχέση αυτή εφαρμόζεται ιδιαίτερα για $A = Z(G)$ το κέντρο της G.

Εστω $H \leq G$ υποομάδα της G. Αν χ ανάγωγος χαρακτήρας της G ο περιορισμός της χ στην H, $\chi_H := Rest_H(\chi)$ δεν είναι κατάνάγκη ανάγωγος. Το ερώτημα που τίθεται είναι πως αναλύεται ο χ_H σε άθροισμα αναγώγων χαρακτήρων της H. Θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση όπου η $H \lhd G$ είναι κανονική υποομάδα της G. Αν f μια συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της H και $\sigma \in G$, ορίζουμε την

$$f^\sigma : \begin{cases} H & \longrightarrow & K \\ h & \longmapsto & f(\sigma h \sigma^{-1}). \end{cases}$$

Η f^σ θα λέγεται συζυγής της f στην G. (Υπενθυμίζουμε για μια ακόμη φορά ότι το σώμα K είναι αλγεβρικά κλειστό χαρακτηριστικής μηδέν.)

Λήμμα 4.37 *Αν $H \lhd G$ κανονική υποομάδα της G, f, ϕ συναρτήσεις κλάσεων συζυγίας της H και $\sigma, \tau \in G$ τότε:*

(i) *Η* f^σ *είναι επίσης συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της* H,

(ii) $(f^\sigma)^\tau = f^{\sigma\tau}$,

(iii) $< f^\sigma, \phi^\sigma >_H = < f, \phi >_H$

(iv) $< \chi_H, \phi^\sigma >_H = < \chi_H, \phi >_H$, *για κάθε* $\phi \in K^{(H)}$,

(v) *Αν η* f *είναι* _χαρακτήρας_ *της* H *το ίδιο ισχύει και για την* f^σ.

Απόδειξη:

(i) Εστω $h \sim_H k$. Υπάρχει $h_1 \in H$ τέτοιο ώστε $k = h_1^{-1} h h_1$. Για κάθε στοιχείο g της G θεωρούμε τα στοιχεία $h^g = g^{-1} h g$ και $k^g = g^{-1} k g = g^{-1} h_1^{-1} h h_1 g$ της ομάδος H. Επειδή η υποομάδα H της G είναι κανονική έπεται ότι υπάρχει $h_2 \in H$ τέτοιο ώστε $h_1 g = g h_2$. επομένως $k^g = (g h_2)^{-1} h (g h_2) = h_2^{-1} g^{-1} h g h_2 = h_2^{-1} h^g h_2$, δηλαδή $k^g \sim_H h^g$.

Εξ ορισμού της f^σ, $f^\sigma(h) = f(h^{\sigma^{-1}})$. Η f όμως είναι συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της H. Συνεπώς

$$f^\sigma(h) = f(h^{\sigma^{-1}}) = f(k^{\sigma^{-1}}) = f^\sigma(k).$$

(ii)

$$(f^\sigma)^\tau(h) = f^\sigma(\tau h \tau^{-1}) = f(\sigma\tau h \tau^{-1}\sigma^{-1}) = f^{\sigma\tau}(h).$$

(iii)

$$< f^\sigma, \phi^\sigma >_H = \frac{1}{\#H} \sum_{h\in H} f^\sigma(h) \phi^\sigma(h^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{\#H} \sum_{h\in H} f(\sigma h \sigma^{-1}) \phi(\sigma h^{-1} \sigma^{-1}) = \frac{1}{\#H} \sum_{h\in H} f(h) \phi(\sigma^{-1}) = < f, \phi >_H .$$

(Οταν το h διατρέχει τα στοιχεία της H τότε και το $\sigma h \sigma^{-1}$ κάνει το ίδιο.)

(iv) Προφανώς $(\chi_H)^\sigma(h) = \chi_H(\sigma h \sigma^1) = \chi_H(h)$. Στην συνέχεια εφαρμόζουμε την *(iii)* και έχουμε το ζητούμενο.

(v) Υποθέτουμε ότι η f είναι χαρακτήρας της H. Εστω $\rho := \rho_f$ παράσταση της H που έχει χαρακτήρα τον f. Ορίζουμε

$$\rho^\sigma : \begin{cases} H & \longrightarrow \quad GL(V) \\ h & \longmapsto \rho(\sigma h \sigma^{-1}). \end{cases}$$

Η ρ^σ είναι παράσταση της H. Ο χαρακτήρας της παράστασης αυτής είναι

$$tr(\rho^\sigma(h)) = tr(\rho(\sigma h \sigma^{-1})) = f(\sigma h \sigma^{-1}) = f^\sigma(h),$$

δηλαδή η f^σ είναι χαρακτήρας της ομάδας H.

Θεώρημα 4.38 (Clifford) *Εστω $H \lhd G$ κανονική υποομάδα και χ ανάγωγος χαρακτήρας της G. Εστω ακόμη ψ μια ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα χ_H. Αν $\psi = \psi_1, \psi_2, ..., \psi_t$ είναι όλοι οι διακεκριμένοι χαρακτήρες οι οποίοι είναι συζυγείς της ψ στην G τότε*

$$\chi_H = e \sum_{i=1}^{t} \psi_i,$$

όπου $e := < \chi_H, \psi >_H$.

Απόδειξη: Θα υπολογίσουμε την $Rest_H(Ind_H^G \psi)$. Για κάθε $h \in H$ έχουμε,

$$(Ind_H^G \psi)(h) = \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}ht \in H}} \psi(t^{-1}ht) = \frac{1}{\#H} \sum_{t \in G} \psi^t(h).$$

(Η $t^{-1}ht$ είναι πάντα αληθής, αφού $H \lhd G$.) Επομένως

$$\#H \cdot Rest_H(Ind_H^G \psi) = \sum_{t \in G} \psi^t.$$

Αν λοιπόν ϕ ανάγωγος χαρακτήρας της H τέτοιος ώστε $\phi \notin \{\psi_i / i = 1, 2, ..., t\}$ τότε θα έχουμε $< \sum_{t \in G} \psi^t, \phi >_H = 0$ οπότε κατ' ανάγκη και $< Rest_H(Ind_H^G \psi), \phi >_H = 0$. Επειδή ο ανάγωγος χαρακτήρας χ αποτελεί συνιστώσα στην ανάλυση του $Ind_H^G \psi$, από τον νόμο αντιστροφής του Frobenius έπεται ότι

$$< \chi_H, \phi >_H = 0 \ \text{ για κάθε } \phi \notin \{\psi_i / i = 1, 2, ..., t\}.$$

Αρα οι ανάγωγες συνιστώσες που υπεισέρχονται στην ανάλυση του χ_H είναι μεταξύ των ψ_i $(i = 1, 2, ..., t)$. Συνεπώς ο χ_H γράφεται,

$$\chi_H = \sum_{i=1}^{t} < \chi_H, \psi_i >_H \cdot \psi_i.$$

Λόγω της ιδιότητος (iv) του λήμματος 4.37 έχουμε $< \chi_H, \psi_i >_H = < \chi_H, \psi >_H$ για κάθε $i = 1, 2, ..., t$.

Σαν μια, απλή, εφαρμογή του θεωρήματος του Clifford αναφέρουμε το

Πόρισμα 4.39 *Αν $H \triangleleft G$ κανονική υποομάδα και χ ανάγωγος χαρακτήρας της G τέτοιος ώστε $< \chi_H, 1_H >_H \neq 0$, τότε $H \subseteq ker\chi$.*

Απόδειξη: Από το θεώρημα του Clifford έπεται ότι $\chi_H = e\sum_{i=1}^{t} \psi_i$. Λόγω της υπόθεσης κάποιος από τους ψ_i, έστω ο ψ_1, είναι ο 1_H. Επειδή οι συζυγείς του 1_H στην G

$$\psi^\sigma(h) = 1_H(\sigma h \sigma^{-1}) = 1_H(h),$$

ταυτίζονται με τον 1_H για όλα τα $\sigma \in G$, έπεται ότι $\chi_H = \chi(1) \cdot 1_H$ δηλαδή ότι για κάθε $h \in H$ ισχύει $\chi(h) = \chi_H(h) = \chi(1) \cdot 1_H(h) = \chi(1)$ και συνεπώς $H \subseteq ker\chi$.

Εστω $H \leq G$ υποομάδα της G και $\rho : H \longrightarrow GL(W)$ μια παράσταση αυτής. Στην παράσταση αυτή της H αντιστοιχεί η επαγώμενη παράσταση

$$\rho_0 := Ind_H^G \rho : G \longrightarrow GL(V)$$

της G. Αν $H' \leq G$ επίσης υποομάδα της G ενδιαφερόμαστε να περιγράψουμε τον περιορισμό της $Ind_H^G\ \rho' := Rest_{H'}(Ind_H^G \rho)$ στην H'.

Εστω S ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων των διπλών (H, H')-πλευρικών ομάδων (double (H, H')-cosets) της G. Επομένως η G γράφεται σαν ξένη ένωση των $H'sH$, $G = \dot{\cup}_{s \in S} H'sH$. (Αυτό το γράφουμε συχνά και ως εξής: $s \in H' \backslash G / H$.) Για κάθε $s \in S$ ορίζουμε το σύνολο $H_s := sHs^{-1} \cap H'$. Προφανώς η $H_s \leq H$ είναι υποομάδα της H'. Για κάθε $x \in H_s$ ορίζουμε $\rho^s(x) := \rho(s^{-1}xs)$. Προφανώς η $\rho^s : H_s \longrightarrow GL(W)$ είναι μια παράσταση της H_s. Θεωρούμε την επαγώμενη παράσταση $Ind_{H_s}^{H'} \rho^s : H' \longrightarrow GL(W_s)$.

Θεώρημα 4.40 *Η παράσταση $Rest_{H'}(Ind_H^G \rho)$ είναι ισόμορφη προς το ευθύ άθροισμα των παραστάσεων $Ind_{H_s}^{H'} \rho^s$ $s \in S \cong H' \backslash G / H$.*

Απόδειξη: Εστω $N =_{K[H]} N = (W, \rho^*)$ και $M =_{K[G]} M = (V, \rho_0^*)$ τα αντίστοιχα modules παραστάσεων των ρ και ρ_0. Επειδή η ρ_0 είναι επαγώμενη της ρ, έπεται ότι $M = N^G$. Συνεπώς από το θεώρημα 4.24 έπεται ότι

$$M = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma N.$$

Για κάθε $s \in S$ ορίζουμε το υποmodule του M

$$M(s) := < \sigma N / \sigma \in H' s H >$$

το οποίο παράγεται από τα σN για εκείνα τα σ τα οποία ανήκουν στην κλάση $H'sH$. Προφανώς

$$M = \bigoplus_{\sigma \in H' \backslash G/H} M(s), \text{ διότι } G = \dot{\cup}_{\sigma \in H' \backslash G/H} \ H'sH.$$

Τα modules $M(s)$ είναι H'-αναλλοίωτα, δηλαδή $K[H']$-modules. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.28 αρκεί να αποδείξουμε ότι τα $M(s)$ είναι $K[H']$ ισόμορφα προς τα module παραστάσεων $N_s :=_{K[H_s]} N_s$ των ρ^s. Κατάρχήν παρατηρούμε ότι

$$H_s = \{h' \in H' / h'(sN) = sN\}$$

και

$$M(s) = \bigoplus_{h' \in H'/H_s} h'(sN).$$

Από το θεώρημα 4.24 έχουμε ότι $M(s) = (sN)^G$. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι τα $K[H_s]$-modules N_s και sN είναι ισόμορφα. Ο ισομορφισμός αυτός δίνεται από $s : N_s \longrightarrow sN$.

Παρατήρηση: Δεδομένου ότι το $M(s)$ εξαρτάται μόνο από την διπλή (H', H)-πλευρική ομάδα στην οποία ανήκει το s, και η παράσταση $Ind_{H_s}^{H'}(\rho^s)$ εξαρτάται ομοίως από την (H', H)-πλευρική ομάδα του s.

Εφαρμόζουμε στην συνέχεια το προηγούμενο αποτέλεσμα στην ειδική περίπτωση που $H' = H$. Για κάθε $\sigma \in G$ η $H_s := sHs^{-1} \cap H$ είναι τώρα υποομάδα της H. Η παράσταση ρ της H ορίζει παράσταση $Rest_s(\rho)$ της H_s (τον περιορισμό της ρ στην H_s).

Θεώρημα 4.41 (Θεώρημα αναγωγισιμότητας του Mackey) *Η επαγώμενη παράσταση $\rho' := Ind_H^G(\rho)$ της ρ στην G είναι ανάγωγη παράσταση της G ακριβώς τότε όταν ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες.*

(a) Η ρ είναι ανάγωγη παράσταση της H και

(b) Για κάθε $s \in G \backslash H$ οι παραστάσεις ρ^s και $Rest_s(\rho)$ της H_s είναι ξένες μεταξύ τους.

Ορισμός 4.42 *Δύο παραστάσεις ρ_1 και ρ μιας ομάδας G θα λέγονται ξένες μεταξύ τους όταν δεν έχουν κοινή καμμία ανάγωγη συνιστώσα.*

Απόδειξη: (του θεωρήματος 4.41). Ως γνωστό, η παράσταση ρ' είναι ανάγωγη παράσταση της G ακριβώς τότε όταν $< \rho', \rho' >_G = 1$. Από τον νόμο αντιστροφής του Frobenius προκύπτει ότι

$$< \rho', \rho' >_G = < \rho, Rest_H(\rho') >_H .$$

Από το θεώρημα 4.40 προκύπτει τώρα ότι

$$Rest_H(\rho') = \oplus_{s \in H \backslash G/H} Ind_{H_s}^H(\rho^s).$$

Επομένως,

$$< \rho', \rho' >_G = \sum_{s \in H \backslash G/H} < \rho, Ind_{H_s}^H(\rho^s) >_H .$$

Ο νόμος αντιστροφής του Frobenius μας δίνει

$$< \rho, Ind_{H_s}^H(\rho^s) >_H = < Rest_s(\rho), \rho^s >_{H_s} .$$

Συνεπώς

$$< \rho', \rho' >_G = \sum_{s \in H \backslash G/H} < Rest_s(\rho), \rho^s >_{H_s} .$$

Για $s = 1$, $< Rest_s(\rho), \rho^s >_{H_s} = < \rho, \rho >_H \geq 1$. Για να είναι λοιπόν $< \rho', \rho' >_G = 1$ πρέπει και αρκεί $< \rho, \rho >_H = 1$ και για κάθε άλλο $s \in G \backslash H$ $< Rest_s(\rho), \rho^s >_{H_s} = 0$, δηλαδή να ισχύουν οι δύο συνθήκες (a) και (b).

Πόρισμα 4.43 *Υποθέτουμε τώρα ότι η H είναι κανονική υποομάδα της G. Η επαγώμενη παράσταση $Ind_H^G(\rho)$ της ρ στην G είναι ανάγωγη τότε και μόνο τότε όταν η ρ είναι ανάγωγη παράσταση της H και δεν είναι ισόμορφη με καμία από τις συζυγείς της ρ^s για κάθε $s \in G \backslash H$.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $H_s = H$, $Rest_s(\rho) = \rho$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα 4.42.

4.3 Πίνακες χαρακτήρων

Μια αρκετά χρήσιμη πηγή πληροφοριών μιας ομάδας G είναι ο πίνακας χαρακτήρων αυτής. Ο πίνακας χαρακτήρων μιας ομάδας G είναι ένας τετραγωνικός πίνακας του οποίου οι γραμμές αντιστοιχούν στους ανάγωγους χαρακτήρες της G και οι στήλες στις κλάσεις συζυγίας αυτής. Συνήθως μια επιπλέον γραμμή πάνω από τις κλάσεις συζυγίας μας δίνει το πλήθος των στοιχείων της αντίστοιχης κλάσης.

Εστω τώρα $N \triangleleft G$ κανονική υποομάδα της G. Το ερώτημα είναι πως σχετίζονται οι παραστάσεις των ομάδων $N, G/N$ και G μεταξύ τους. Αν $\tilde{\rho} := \tilde{\rho}_N : G/N \to GL(V)$ παράσταση της G/N βαθμού m τότε η απεικόνιση

$$\rho : \begin{cases} G & \longrightarrow & GL(V) \\ g & \longmapsto & \tilde{\rho}(gN) \end{cases}$$

είναι παράσταση της G. Αν $\tilde{\chi}$ ο χαρακτήρας της $\tilde{\rho}$ τότε $\chi(g) := \tilde{\chi}(gN)$ είναι ο χαρακτήρας της ρ. Επιπλέον, για $\tau \in N$ ισχύει $\chi(\tau) = \chi(1) = m$ δηλαδή η N περιέχεται στον πυρήνα $ker\chi$ της χ. Η παράσταση της ρ θα λέγεται ανυψωμένη (lifted) από την παράσταση $\tilde{\rho}$ της G/N και ο χαρακτήρας χ ανυψωμένος του $\tilde{\chi}$.

Από τον ορισμό της ρ, είναι προφανές ότι η ρ είναι ανάγωγη παράσταση της G ακριβώς τότε όταν η $\tilde{\rho}$ είναι ανάγωγη παράσταση της G/N. Εστω τώρα ρ παράσταση της G, χ ο χαρακτήρας αυτής. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει κανονική υποομάδα $N \triangleleft G$ της G και παράσταση $\tilde{\rho}$ της G/N έτσι ώστε η ρ να είναι η ανυψωμένη της $\tilde{\rho}$.

Από το θεώρημα 2.8(a) έχουμε ότι η

$$N := ker\rho = ker\chi = \{g \in G | \chi(g) = \chi(1)\}$$

είναι κανονική υποομάδα της G. Η απεικόνιση

$$\tilde{\rho} \begin{cases} G/N & \longrightarrow & GL(V) \\ gN & \longmapsto & \rho(g) \end{cases}$$

είναι μια παράσταση της G/N ανυψωμένη της οποίας είναι η ρ. Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε αποδείξει την

Πρόταση 4.44 *Εστω $N \triangleleft G$ κανονική υποομάδα της G.*

(i) *Αν χ χαρακτήρας της G και $N \subseteq ker\chi$ τότε η χ είναι σταθερή στις πλευρικές ομάδες της G/N και η απεικόνιση*

$$\tilde{\chi} : \begin{cases} G/N & \longrightarrow & K^* \\ gN & \longmapsto & \chi(g) \end{cases}$$

είναι χαρακτήρας της G/N.

(ii) *Αν $\tilde{\chi}$ χαρακτήρας της G/N τότε η απεικόνιση*

$$\chi : \begin{cases} G & \longrightarrow & K^* \\ g & \longmapsto & \chi(gN) \end{cases}$$

είναι χαρακτήρας της G.

(iii) *Και στις δύο περιπτώσεις (i) και (ii) ο χ είναι ανάγωγος ακριβώς τότε όταν ο $\tilde{\chi}$ είναι ανάγωγος.*

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον πίνακα χαρακτήρων κάποιων συγκεκριμένων ομάδων.

(1) Κυκλικές ομάδες.
Εστω $G =< g >\cong \mathbb{Z}_n$ κυκλική ομάδα τάξεως n με γεννήτορα το g και $\zeta := \zeta_n$ πρωταρχική n-ρίζα της μονάδας. Οι απεικονίσεις

$$\chi_j = \rho_j : \begin{cases} G & \longrightarrow & K^* \\ g & \longmapsto & \zeta^{j-1} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

είναι διακεκριμμένες (ανάγωγες) παραστάσεις (χαρακτήρες) της ομάδας G. Επειδή το πλήθος τους είναι $n = \#G$ έπεται ότι αυτές είναι όλες οι ανάγωγες παραστάσεις της G.

	1	1	1	...	1
	1	g	g^2	...	g^{n-1}
$\chi_1 = 1$	1	1	1	...	1
χ_2	1	ζ	ζ^2	...	ζ^{n-1}
χ_3	1	ζ^2	ζ^4	...	ζ^{n-2}
...	...	...	...	...	...
χ_n	1	ζ^{n-1}	ζ^{n-2}	...	ζ

Παρατηρούμε ότι και η ομάδα των χαρακτήρων της G είναι επίσης κυκλική με γεννήτορα τον χαρακτήρα χ_2.

(2) Αβελιανές ομάδες.

Εστω G μια αβελιανή ομάδα τάξης n. Εχουμε ήδη αποδείξει ότι οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G είναι όλοι πρώτου βαθμού και, συνεπώς, ότι το πλήθος τους είναι n. Θα συνδέσουμε το παράδειγμά μας με το παράδειγμα (1) μέσω του θεμελιώδους θεωρήματος της θεωρίας των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων το οποίο μας λέει ότι η G είναι το ευθύ γινόμενο κυκλικών p-ομάδων.

Εστω λοιπόν ότι η $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_t$, όπου $G_i =< g_i >\cong \mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$.

Κάθε χαρακτήρας χ της G είναι ένας ομομορφισμός ομάδων $\chi : G \to K^*$. Συνεπώς ο χ είναι πλήρως ορισμένος από τις τιμές του στους γεννήτορες των G_i, g_i,
$i = 1, 2, \cdots, t$. Από το παράδειγμα (1) έπεται ότι το $\chi(g_i)$ είναι μια $p_i^{a_i}$-ρίζα της μονάδας. Επομένως υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των αναγώγων χαρακτήρων της G και των t-άδων $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_t)$ όπου ζ_i είναι μια $p_i^{a_i}$-ρίζα της μονάδας.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την πιο απλή περίπτωση, $G =< g_1, g_2 >\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Τα στοιχεία g_1 και g_2 της G έχουν τάξη 2. Επομένως οι τέσσερις χαρακτήρες της G αντιστοιχούν στα τέσσερα διατεταγμένα ζευγάρια $(1, 1), (1, -1), (-1, 1)$ και $(-1, -1)$. Οι πίνακες λοιπόν των χαρακτήρων της G είναι:

	1	1	1	1
	1	g_1	g_2	g_1g_2
$\chi_1 = 1$	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

Τα διατεταγμένα ζευγάρια μου έδωσαν την δεύτερη και την τρίτη στήλη του πίνακα. Η τέταρτη προκύπτει αμέσως σαν γινόμενο της δεύτερης με την τρίτη στήλη.

Προτού συνεχίσουμε με άλλα παραδείγματα υπολογισμού πινάκων χαρακτήρων θα μείνουμε για λίγο στους ανάγωγους χαρακτήρες πρώτου βαθμού.

Ως γνωστό η ομάδα $G/[G, G]$ είναι αβελιανή. Επομένως έχει $\#(G/[G, G])$ (ανάγωγους) χαρακτήρες πρώτου βαθμού. Οι ανυψωμένοι αυτών μας δίνουν διακεκριμμένους (ανάγωγους) χαρακτήρες πρώτου βαθμού της G. Αν τώρα $\chi : G \to K^*$ χαρακτήρας πρώτου βαθμού της G τότε, θεώρημα 2.18, ο πυρήνας του χ $ker\chi$ είναι κανονική υποομάδα της G και μάλιστα η ομάδα πηλίκων $G/ker\chi$ είναι αβελιανή, σαν ισόμορφή με μια υποομάδα της (αβελιανής) ομάδας K^*. Συνεπώς, (δες παράρτημα, σελ. 152), $[G, G] \leq ker\chi$. Σύμφωνα με την πρόταση 4.44 ο χαρακτήρας χ της G είναι ο ανυψωμένος ενός χαρακτήρα πρώτου βαθμού της $G/[G, G]$. Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε την

Πρόταση 4.45 *Κάθε πεπερασμένη ομάδα G έχει ακριβώς $\#(G/[G, G])$ (ανάγωγους) χαρακτήρες πρώτου βαθμού και όλοι τους είναι ανυψώσεις των αναγώγων χαρακτήρων της αβελιανής ομάδας $G/[G, G]$.*

(3) Συμμετρική ομάδα S_3.

Η S_3 έχει, (δες παράρτημα, σελ. 150), τρείς κλάσεις συζυγίας, τις $\{1\}, \{(12), (13), (23)\}$ και $\{(123), (132)\}$.

Επειδή $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$ έπεται ότι η S_3 έχει δύο (ανάγωγους) χαρακτήρες πρώτου βαθμού οι οποίοι είναι ανυψώσεις των χαρακτήρων της $\mathbb{Z}_2$. Αν τους ονομάσουμε χ_1, χ_2 τότε έχουμε τον ακόλουθο όχι πλήρη πίνακα: $(S_3 = A_3 \,\dot{\cup}\, (12)A_3)$

	1	3	2
	1	(12)	(123)
$\chi_1 = 1$	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	*	*

Από την ισότητα $6 = 1^2 + 1^2 + (deg\chi_3)^2$ έπεται ότι $deg\chi_3 = 2$. Οι σχέσεις ορθογωνιότητας κατά στήλες μας δίνουν:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot \chi_3((12)) = 0 \quad \text{και}$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \chi_3((123)) = 0$$

Συνεπώς $\chi_3((12)) = 0$ και $\chi_3((123)) = -1$.

Ο πίνακας χαρακτήρων της S_3 είναι πλήρης:

	1	3	2
	1	(12)	(123)
$\chi_1 = 1$	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

(4) Αναλλοίωτη ομάδα A_4.

Η A_4 έχει 12 στοιχεία τα οποία κατανέμονται σε τέσσερις κλάσεις συζυγίας,

$$\{1\}, \quad \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

$$\{(123), (243), (134), (142)\} \quad \text{και}$$

$$\{(132), (234), (143), (124)\}.$$

Σημείωση: Οι δύο τελευταίες κλάσεις συζυγίας της A_4 ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της S_4. Γενικά ισχύει ότι κάθε κλάση συζυγίας της S_n που αποτελείται από άρτιες μεταθέσεις είναι κλάση συζυγίας της A_n ή ένωση δύο κλάσεων συζυγίας της A_n.

Η τεραεδρική ομάδα του Klein

$$V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

είναι υποομάδα της A_4. Η V περιέχει όλα τα στοιχεία της S_4 της μορφής $(**)(**)$. Συνεπώς θα περιέχει και όλα τα συζυγή τους. Επειδή δε δεν περιέχει τίποτε άλλο παρά μόνο στοιχεία του τύπου $(**)(**)$ έπεται ότι η V είναι κανονική υποομάδα της S_4, $V \triangleleft S_4$. Κατά μείζονα λόγο είναι και κανονική υποομάδα της A_4 $V \triangleleft A_4$. Η ομάδα πηλίκων A_4/V έχει τάξη 3, άρα $A_4/V \cong \mathbb{Z}_3$.

Ο πίνακας χαρακτήρων της A_4/V μας είναι γνωστός (δες παράδειγμα (1)):

	1	1	1
	1	g	g^2
$\psi_1 = 1$	1	1	1
ψ_2	1	ω	ω^2
ψ_3	1	ω^2	ω

Το ω εδώ είναι μια πρωταρχική 3-ρίζα της μονάδας. Η A_4 έχει τρείς (ανάγωγους) χαρακτήρες πρώτου βαθμού οι οποίοι είναι οι ανυψωμένοι των $\psi_i, i = 1,2,3$. Από την σχέση $12 = 1+1+1+(deg\chi_4)^2$ έπεται ότι χ_4 έχει βαθμό $deg\chi_4 = 3$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι, $A = V \dot{\cup} (123)V \dot{\cup} (132)V$.

Ο πίνακας χαρακτήρων της A_4 μπορεί, μέχρι στιγμής, να συμπληρωθεί ως εξής:

	1	3	4	4
	1	(12)(34)	(123)	(132)
$\chi_1 = 1$	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	*	*	*

Οι σχέσεις ορθογωνιότητας μεταξύ της πρώτης και των δεύτερης, τρίτης και τέταρτης στήλης αντίστοιχα μας δίνουν

$$3+3\cdot\chi_4((12)(34)) = 0, \quad 1+\omega+\omega^2+3\chi_4((123)) = 0 \;\text{ και }\; 1+\omega+\omega^2+3\chi_4((132)) = 0.$$

Συνεπώς $\chi_4((12)(34)) = -1$, $\chi_4((123)) = 0$ και $\chi_4((132)) = 0$. Ο πλήρης πίνακας των χαρακτήρων της A_4 είναι τώρα:

	1	3	4	4
	1	(12)(34)	(123)	(132)
$\chi_1 = 1$	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

(5) <u>Συμμετρική ομάδα</u> S_4.

Η συμμετρική ομάδα S_4 έχει 5 κλάσεις συζυγίας

$$K_1 = [(1)], \quad K_2 = [(12)(34)], \quad K_3 = [(123)],$$

$$K_4 = [(12)] \quad \text{και} \quad K_5 = [(1234)].$$

Οι τάξεις αυτών είναι $1, 3, 8, 6$ και 6 αντιστοίχως. Η A_4 είναι υποομάδα της S_4 με δείκτη $[S_4 : A_4] = 2$. Επομένως είναι κανονική υποομάδα της S_4. Μάλιστα η A_4 συμπίπτει με την ομάδα των μεταθετών της S_4 (δες παράρτημα, σελ. 152). Επομένως η S_4 έχει ακριβώς δύο (ανάγωγους) χαρακτήρες <u>πρώτου</u> βαθμού. Συγκεκριμένα έχει τον ταυτοτικό και αυτόν που μας δίνει την τιμή 1 στα στοιχεία της A_4 και -1 σε κάθε περιττή μετάθεση.

Και η τετραεδρική ομάδα του Klein V είναι <u>κανονική</u> υποομάδα της S_4. Η ομάδα πηλίκων S_4/V έχει τάξη 6. Η S_4/V όμως δεν είναι αβελιανή διότι αν ήταν θα έπρεπε η ομάδα μεταθετών της S_4 που είναι η A_4 να περιέχεται στην τεραεδρική ομάδα του Klein, πράγμα που φυσικά είναι άτοπο. Επομένως $S_4/V \cong S_3$.

Θα βρούμε τους χαρακτήρες της S_4 που προκύπτουν από ανύψωση των χαρακτήρων της S_3. Για δύο από αυτούς το κάναμε ήδη με την βοήθεια της A_4. Μας απομένει ο τρίτος χ_3 ο οποίος είναι βαθμού $deg\chi_3 = 2$. Θα πρέπει λοιπόν να δούμε τις εικόνες των αντιπροσώπων των κλάσεων συζυγίας της S_4 στην ομάδα S_4/V. Οι εικόνες των K_1 και K_2 είναι, προφανώς, τετριμμένες, η εικόνα της K_3 είναι τάξης 3 και οι εικόνες των K_4 και K_5 είναι τάξης 2. Σύμφωνα με τον πίνακα χαρακτήρων της S_3 (δες παράδειγμα (3)) έχουμε

$$\chi_3(K_1) = \chi_3(K_2) = 2, \;\; \chi_3(K_3) = -1 \;\text{ και }\; \chi_3(K_4) = \chi_3(K_5) = 0.$$

Μέχρι στιγμής ο πίνακας χαρακτ·ηρων της S_4 μπορεί να συμπληρωθεί ως εξής:

	1	3	8	6	6
	$K_1 = [(1)]$	$K_2 = [(12)(34)]$	$K_3 = [(123)]$	$K_4 = [(12)]$	$K_5 = [(1234)]$
$\chi_1 = 1$	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	-1	0	0
χ_4	3	*	*	*	*
χ_5	3	*	*	*	*

Οι βαθμοί των χαρακτήρων χ_4 και χ_5 είναι άμεση συνέπεια της ισότητας

$$24 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + (deg\chi_4)^2 + (deg\chi_5)^2.$$

Οι σχέσεις ορθογωνιότητας μεταξύ της πρώτης και των: δεύτερης, τρίτης, τέταρτης και πέμπτης στήλης μας δίνουν:

$$1 + 1 + 4 + 3\chi_4(K_2) + 3\chi_5(K_2) = 0,$$

$$1 + 1 - 2 + 3\chi_4(K_3) + 3\chi_5(K_3) = 0,$$

$$1 - 1 + 0 + 3\chi_4(K_4) + 3\chi_5(K_4) = 0 \ \text{και}$$

$$1 - 1 + 0 + 3\chi_4(K_5) + 3\chi_5(K_5) = 0.$$

Οι παραπάνω ισότητες μας δίνουν τις τιμές του χαρακτήρα χ_5 μέσω αυτών του χ_4 :

$$\chi_5(K_2) = -2 - \chi_4(K_2), \quad \chi_5(K_3) = -\chi_4(K_3),$$

$$\chi_5(K_4) = -\chi_4(K_4) \ \text{ και } \ \chi_5(K_5) = -\chi_4(K_5).$$

Για λόγους ευκολίας ας ονομάσουμε $a_i := \chi_4(K_i), i = 1, 2, 3, 4, 5$. Στην συνέχεια εφαρμόζουμε τις σχέσεις ορθογωνιότητος μεταξύ της τέταρτης και των πρώτης, δεύτερης και τρίτης γραμμής αντίστοιχα (θεώρημα 1.43) :

$$1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot a_2 + 8 \cdot 1 \cdot a_3 + 6 \cdot 1 \cdot a_4 + 6 \cdot 1 \cdot a_5 = 0,$$

$$1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot a_2 + 8 \cdot 1 \cdot a_3 + 6 \cdot (-1) \cdot a_4 + 6 \cdot (-1) \cdot a_5 = 0$$

$$\text{και } \ 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot a_2 + 8 \cdot (-1) \cdot a_3 + 6 \cdot 0 a_4 + 6 \cdot 0 \cdot a_5 = 0$$

Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι

$$a_2 = -1, \quad a_3 = 0 \quad \text{και} \quad a_5 = -a_4.$$

Οι σχέσεις ορθωγονιότητας μεταξύ της τέταρτης και πέμπτης στήλης μας δίνει τέλος ότι $a_4 = 1$ και $a_5 = -1$.

Ο πίνακας χαρακτήρων της S_4 είναι πλέον πλήρης:

	1	3	8	6	6
	$K_1 = [(1)]$	$K_2 = [(12)(34)]$	$K_3 = [(123)]$	$K_4 = [(12)]$	$K_5 = [(1234)]$
$\chi_1 = 1$	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

(5′) <u>Συμμετρική</u> <u>ομάδα</u> S_4.

Υποθέτουμε ότι έχουμε βρεί τις τιμές των τριών πρώτων χαρακτήρων στις κλάσεις συζυγίας της S_4, όπως το κάναμε στο παράδειγμα (5). Για τον υπολογισμό των τιμών των χαρακτήρων χ_4 και χ_5 θα δουλέψουμε τώρα διαφορετικά.

Ας θεωρήσουμε τώρα την υποομάδα

$$H := \{\sigma \in S_4 | \sigma(4) = 4\} \quad \text{της } S_4.$$

Προφανώς, η H είναι ισόμορφη με την S_3.

Ας πάρουμε τον πίνακα χαρακτήρων της S_3.

	1	3	2
	$C_1 = [(1)]$	$C_2 = [(12)]$	$C_3 = [(123)]$
$\psi_1 = 1$	1	1	1
ψ_2	1	-1	1
ψ_3	1	0	-1

Εστω τώρα $\chi := Ind_{S_3}^{S_4}(\psi_1)$ ο επαγόμενος του ψ_1 χαρακτήρας της S_4 (δες περίπτωση (3) αμέσως μετά το θεώρημα 4.29 σελίδα 103). Για να υπολογίσουμε τις τιμές του χαρακτήρα χ θα εφαρμόσουμε το πόρισμα 4.32, σελίδα 105

$$\chi(K_1) = 4, \quad \chi(K_2) = 0 \quad \chi(K_3) = 1,$$

$$\chi(K_4) = 2 \quad \text{και} \quad \chi(K_5) = 0.$$

Ο χαρακτήρας χ <u>δεν</u> είναι ανάγωγος. Από τον νόμο αντιστροφής του Frobenius προκύπτει ότι $< \chi, \chi_1 >_{S_4} = < \psi_1, Rest_H \chi_1 >_H = 1$, δηλαδή ότι ο χ_1 περιέχεται στην ανάλυση του χ σε ανάγωγους και μάλιστα με πολλαπλότητα 1.

Ας πάρουμε τώρα τον χαρακτήρα $\chi - \chi_1$

$$(\chi - \chi_1)(K_i) = 3, -1, 0, 1, -1, \quad \text{για} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ αντίστοιχα.}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο χαρακτήρας $\chi - \chi_1$ είναι ανάγωγος. Πράγματι,

$$< \chi - \chi_1, \chi - \chi_1 >_{S_4} = \frac{1}{\# S_4} \sum_{i=1}^{5} k_i [(\chi - \chi_1)(K_i)]^2 =$$

$$= \frac{1}{24}(1 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = 1.$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε έναν χαρακτήρα χ πρώτου βαθμού με οποιοδήποτε ανάγωγο χαρακτήρα ψ μιας ομάδας G τότε το γινόμενο είναι επίσης ανάγωγος χαρακτήρας της G. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η τιμή $\chi(g)$ είναι ρίζα της μονάδας για κάθε $g \in G$ και στην συνέχεια να υπολογίσουμε ότι

$$< \chi\psi, \chi\psi >_G = 1.$$

Ο χαρακτήρας $\chi_2 \cdot \chi_4$ είναι, σύμφωνα με τα παραπάνω, ανάγωγος χαρακτήρας της S_4. Επειδή $\chi_2 \cdot \chi_4 \neq \chi_4$ αυτός είναι ο ζητούμενος ανάγωγος χαρακτήρας $\chi_5 = \chi_2 \cdot \chi_4$.

(6) Αναλλοίωτη ομάδα A_5.
Η αναλλοίωτη ομάδα A_5 έχει 5 κλάσεις συζυγίας,

$$K_1 = [(1)], \quad K_2 = [(12)(34)] \quad K_3 = [(123)]$$

$$K_4 = [(12345)] \quad \text{και} \quad K_5 = [(12354)]$$

με $1, 15, 20, 12$ και 12 στοιχεία αντίστοιχα. Ας σημειωθεί εδώ ότι παρά το ότι τα στοιχεία των κλάσεων K_4 και K_5 ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της S_5 στην ομάδα A_5 διασπώνται σε δύο διαφορετικές μεταξύ τους κλάσεις (δες και [A-B], σελίδες 159 και 160).

Επειδή η ομάδα A_5 είναι απλή, δεν έχουμε πλέον (γνήσιες) κανονικές υποομάδες έτσι ώστε οι χαρακτήρες της A_5 να προκύψουν από ανύψωση κάποιων ομάδων πηλίκων αυτής. Θα προσπαθήσουμε κατ΄ αρχήν να βρούμε χαρακτήρες της A_5 οι οποίοι είναι επαγώμενοι χαρακτήρων υποομάδων της.

Η υποομάδα $H := \{\sigma \in A_5 | \sigma(5) = 5\}$ της A_5 είναι ισόμορφη με την A_4. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να σχηματίσουμε τον πίνακα χαρακτήρων της A_5 παίρνοντας επαγώμενους χαρακτήρες της A_4. Στο παράδειγμα (4) υπολογίσαμε τον πίνακα χαρακτήρων της A_4

	1	3	4	4
	$C_1 = [(1)]$	$C_2 = [(12)(34)]$	$C_3 = [(123)]$	$C_4 = [(132)]$
$\psi_1 = 1$	1	1	1	1
ψ_2	1	1	ω	ω^2
ψ_3	1	1	ω^2	ω
ψ_4	1	-1	0	0

Εστω $\chi := Ind_{A_4}^{A_5}(\psi_1)$. Οπως και στο παράδειγμα $(5')$ θα εφαρμόσουμε το πόρισμα 4.32. Παρατηρούμε κατ΄ αρχήν ότι

$$K_1 \cap A_4 = C_1, \quad K_2 \cap A_4 = C_2,$$

$$K_3 \cap A_4 = C_3 \cup C_4 \quad \text{και} \quad K_4 \cap A_4 = K_5 \cap A_4 = \emptyset.$$

Οι τιμές του χαρακτήρα χ στις κλάσεις συζυγίας της A_5 είναι $\chi(K_i) = 5, 1, 2, 0, 0$ για $i = 1, 2, 3, 4, 5$ αντίστοιχα. Από τον νόμο αντιστροφής του Frobenius προκύπτει ότι

$$< \chi, \chi_1 >_{A_5} = < \psi_1, Rest_H \chi_1 >_H = 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο χ περιέχει στην ανάλυσή του σε ανάγωγους τον χ_1 με πολλαπλότητα 1.

Ας θεωρήσουμε τον χαρακτήρα $\chi_2 := \chi - \chi_1$.

Οι τιμές του χ_2 στις κλάσεις K_i είναι $4, 0, 1, -1, -1$ αντίστοιχα. Επειδή

$$< \chi_2, \chi_2 >_{A_5} = \frac{1}{60}(1 \cdot 4 \cdot 4 + 15 \cdot 0 + 20 \cdot 1 \cdot 1 + 12 \cdot (-1) \cdot (-1) + 12 \cdot (-1) \cdot (-1)) = 1.$$

έπεται ότι ο χ_2 είναι ανάγωγος. Ας πάρουμε τώρα τον χαρακτήρα $\chi' := Ind_H^{A_5} \psi_2$. Οπως και πιο μπροστά με την βοήθεια του πορίσματος 4.32 υπολογίζουμε τις τιμές του χ',

$$\chi'(K_1) = 5 \quad \chi'(K_2) = 1$$

$$\chi'(K_3) = -1 \quad \text{και} \quad \chi'(K_4) = \chi'(K_5) = 0.$$

Επειδή το εσωτερικό γινόμενο

$$< \chi', \chi' >_{A_5} = \frac{1}{60}(1 \cdot 5 \cdot 5 + 15 \cdot 1 \cdot 1 + 20 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 + 0) = 1$$

έπεται ότι ο $\chi_3 := \chi'$ είναι ανάγωγος. Με βάση τους υπολογισμούς που κάναμε μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα των χαρακτήρων της A_5.

	1	15	20	12	12
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1
χ_3	5	1	-1	0	0
χ_4	3	α_2	α_3	α_4	α_5
χ_5	3	β_2	β_3	β_4	β_5

Οι βαθμοί των χαρακτήρων χ_4 και χ_5 προκύπτουν πάλι από την ισότητα

$$1^2 + 4^2 + 5^2 + (deg\chi_4)^2 + (deg\chi_5)^2 = 60.$$

Η σχέση ορθογωνιότητος μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης στήλης μας δίνει:

$$1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot \alpha_2 + 3 \cdot \beta_2 = 0,$$

δηλαδή ότι $\alpha_2 + \beta_2 = -2$. Από το λήμμα 2.1, σελίδα 38, έπεται ότι τα α_2 και β_2 είναι αθροίσματα τριών 2-ριζών της μονάδας. Επομένως $\alpha_2, \beta_2 \in \{-3, -1, 1, 3\}$.
Η σχέση ορθογωνιότητας της δεύτερης στήλης με τον εαυτό της μας δίνει:

$$1 + 0 + 1 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = \frac{60}{15} = 4, \text{ δηλαδή } a_2^2 + b_2^2 = 2.$$

Επομένως $\alpha_2 = \beta_2 = -1$.
Εφαρμόζουμε στη συνέχεια τις σχέσεις ορθογωνιότητος μεταξύ της τρίτης με τον εαυτό της και έχουμε,

$$1 + 1 + 1 + |\alpha_3|^2 + |\beta_3|^2 = 3.$$

Συνεπώς $\alpha_3 = \beta_3 = 0$.
Η πρώτη με την τέταρτη στήλη μας δίνει

$$1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot \alpha_4 + 3 \cdot \beta_4 = 0, \text{ δηλαδή } \alpha_4 + \beta_4 = 1.$$

Εστω τώρα $g = (12345)$. Παρατηρούμε ότι τα g^{-1}, g είναι συζυγή στην A_5. Πράγματι, υπάρχει $t = (25)(34) \in A_5$ τέτοιο ώστε $t^{-1}g^{-1}t = g$. Η σχέση ορθογωνιότητος της τέταρτης στήλης με τον εαυτό της μας δίνει:

$$1+1+\alpha_4^2+\beta_4^2=\frac{60}{12}=5, \quad \text{δηλαδή } \alpha_4^2+\beta_4^2=3.$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε ότι τα α_4, β_4 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2-z-1=0$. Για λόγους ορθογωνιότητας και πάλι, αν $(\alpha_4, \beta_4)=(z_1, z_2)$, όπου z_1 και z_2 είναι ρίζες της $z^2-z-1=0$ τότε κατ΄ ανάγκη $(\alpha_5, \beta_5)=(z_2, z_1)$.

Τελικά ο πλήρης πίνακας χαρακτήρων της A_5 :

	1	15	20	12	12
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1
χ_3	5	1	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_5	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Για κάθε φυσικό αριθμό $n>2$ η δίεδρη ομάδα D_n ορίζεται μέσω δύο γεννητόρων και τριών σχέσεων:

$$D_n := < a, b | a^n = b^2 = 1, \ ba^{-1} = ab > .$$

Εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει (άσκηση) ότι το κέντρο $Z(D_N) = < a^{\frac{n}{2}} > \cong \mathbb{Z}_2$ για n άρτιο. Επίσης η ομάδα μεταθετών

$$[D_n, D_n] = < a > \cong \mathbb{Z}_n \quad \text{για } n \text{ περιττό και}$$

$$[D_n, D_n] = < a^2 > \cong \mathbb{Z}_{n/2} \quad \text{για } n \text{ άρτιο.}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τον

(7) <u>Πίνακα χαρακτήρων της D_4</u>.

Επειδή $N := [D_4, D_4] \cong < a^2 >$ η ομάδα πηλίκων $D_4/N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ έχει τάξη 4. Επομένως η D_4 έχει 4 (ανάγωγους) χαρακτήρες πρώτου βαθμού οι οποίοι είναι ανυψώσεις χαρακτήρων της D_4/N.

Το κέντρο της D_4 είναι η ομάδα $< a^{\frac{4}{2}} > = < a^2 >$. Επομένως τα στοιχεία 1 και a^2

αποτελούν το καθένα και μια κλάση συζυγίας $K_1 = \{1\}, K_2 = \{a^2\}$. Η ομάδα D_4 έχει συνολικά πέντε κλάσεις συζυγίας, οι επιπλέον κλάσεις είναι οι

$$K_3 = \{a, a^3\}, \quad K_4 = \{b, a^2b\} \text{ και } K_5 = \{ab, a^3b\}.$$

$$D_4 = n \dot\cup aN \dot\cup bN \dot\cup baN.$$

Ο πέμπτος ανάγωγος χαρακτήρας είναι βαθμού $deg\chi_5 = 2$ και οι σχέσεις ορθογωνιότητος κατά στήλες μας δίνουν τις τιμές του πίνακα:

	1	15	20	12	12
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	0	0
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

(8) Η quaternion ομάδα Q τάξης 8.

Η ομάδα αυτή ορίζεται

$$Q =< a, b | a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^3 > .$$

Σαν άσκηση στον αναγνώστη αφήνεται να αποδειχθεί ότι δεν είναι ισόμορφη προς την D_4, έχει την $N := \{1, a^2\}$ σαν κανονική υποομάδα και έχει τον ίδιο πίνακα χαρακτήρων με την D_4.

Παρατήρηση: Από τα παραδείγματα (7) και (8) συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας των χαρακτήρων μιας πεπερασμένης ομάδας δεν χαρακτηρίζει την ομάδα modulo ισομορφία.

5 Το θεώρημα του Brauer

5.1 Προλεγόμενα

Ορισμός 5.1 *Μια ομάδα G θα λέγεται p-στοιχειώδης ($p \in \mathbb{P}$) όταν είναι το ευθύ γινόμενο μιας κυκλικής ομάδος C και μιας p-ομάδος P, $G = C \times P$.*

Αν G πεπερασμένη ομάδα και $p \in \mathbb{P}$, τότε υπάρχει μια p-ομάδα P, $P \leq G$ τέτοια ώστε $p \not| [G : P]$. Η P είναι μια p-Sylow υποομάδα της G (δες παράρτημα, σελ. 152). Με άλλα λόγια αν $\#G = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_r^{n_r}$ τότε για κάθε p_i υπάρχει μια p_i-υποομάδα P_i της G τέτοια ώστε $\#P_i = p_i^{n_i}$

Αν G μια p-ομάδα και $G \neq \{e\}$, τότε αυτή έχει μη τετριμένο κέντρο $Z(G) \neq \{e\}$ (δες παράρτημα σελ 148).

Θεώρημα 5.2 *Αν G <u>όχι αβελιανή</u> p-στοιχειώδης ομάδα τότε υπάρχει <u>κανονική</u> <u>αβελιανή</u> υποομάδα H της G η οποία να περιέχει γνήσια το κέντρο της G, $Z(G)$.*

<u>Απόδειξη:</u> Εξ υποθέσεως $G = C \times P$, όπου C κυκλική και P μια p-ομάδα. Επομένως $Z(G) = Z(C) \times Z(P) = C \times Z(P) \neq G$, διότι G όχι αβελιανή. Απο το γνωστό τρίτο θεώρημα ισομορφίας (σελ. 149) έχουμε:

$$\frac{G}{Z(G)} \cong \frac{\frac{G}{C}}{\frac{Z(G)}{C}} = \frac{\frac{C \times P}{C}}{\frac{C \times Z(P)}{C}} \cong \frac{P}{Z(P)}.$$

Κατ' αρχήν $\bar{P} := P/Z(P) \neq \{\bar{e}\}$, διότι αν $P = Z(P)$ τότε θα είχαμε $G = Z(G)$, δηλαδή ότι η G είναι αβελιανή, άτοπο. Επομένως η $\bar{P}$ είναι μια p-ομάδα με $\bar{P} \neq \{\bar{e}\}$, συνεπώς $Z(\bar{P}) \neq \{\bar{e}\}$.

Εστω $\pi : G \longrightarrow \bar{P}$ ο κανονικός ομομορφισμός και έστω $\bar{a} \in Z(\bar{P})$ με $\bar{a}^p = \bar{e}, \bar{a} \neq \bar{e}$. Εστω $\bar{H} :=< \bar{a} > \leq \bar{P}$. Αφού $\bar{a} \in Z(\bar{P})$ έχουμε ότι $\bar{H}$ είναι αβελιανή και κανονική υποομάδα της $\bar{P}$. Εστω $H = \pi^{-1}(\bar{H})$. Η H είναι <u>αβελιανή κανονική</u> υποομάδα της G τέτοια ώστε να περιέχει γνήσια το κέντρο της G. Πράγματι η H είναι κανονική της G αφού $\bar{H} \triangleleft \bar{P}$. Περιέχει δε γνήσια το κέντρο $Z(G)$ της G διότι $\pi(Z(G)) = \{\bar{e}\}$ ενώ $\bar{a} \in \bar{H}, \bar{a} \neq \bar{e}$. Τέλος είναι αβελιανή, διότι αν a κάποιο στοιχείο της G τέτοιο ώστε $\pi(a) = \bar{a}$ τότε $H =< a, Z(G) >$, δηλαδή αβελιανή.

Ορισμός 5.3 *Εστω G ομάδα, $p \in \mathbb{P}, x \in G$. Το x θα λέγεται p-<u>ομαλό</u> όταν $p \not| ord(x)$ και x θα λέγεται p-<u>ιδιάζων</u> όταν $ord(x) = p^n, n \in \mathbb{N}_0$.*

Θεώρημα 5.4 *Αν G ομάδα και $p \in \mathbb{P}$, τότε για <u>κάθε</u> $x \in G$ υπάρχει <u>ακριβώς</u> ένα p-<u>ομαλό</u> στοιχείο $\sigma \in G$ και <u>ακριβώς</u> ένα p-<u>ιδιάζων</u> στοιχείο $\tau \in G$ τέτοιο ώστε $x = \sigma\tau = \tau\sigma$.*

<u>Απόδειξη:</u> Εστω $ord(x) = p^r m, r \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}, \ (p, m) = 1$. Τότε υπάρχουν $\nu, \mu \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $\nu p^r + \mu m = 1$, δηλαδή $x = x^{\nu p^r + \mu m}$. Στην συνέχεια θέτουμε $\sigma = x^{\nu p^r}$ και $\tau = x^{\mu m}$, από όπου έχουμε $x = \sigma\tau = \tau\sigma$. Επίσης $ord(\sigma)|m$ και $ord(\tau)|p^r$, δηλαδή το σ είναι p-ομαλό και το τ p-ιδιάζων.

Απομένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα. Εστω $x = \sigma\tau = \tau\sigma$, όπου το σ είναι p-ομαλό και το τ p-ιδιάζων. Εξ ορισμού του p-ομαλού και του p-ιδιάζοντος στοιχείου έπεται ότι $(ord(\sigma), ord(\tau)) = 1$, συνεπώς $ord(x) = ord(\sigma)ord(\tau) = p^r m$ οπότε αναγκαστικά $ord(\sigma) = m$ και $ord(\tau) = p^r$ και συνεπώς

$$\begin{cases} \sigma = \sigma^{\nu p^r + \mu m} = \sigma^{\nu p^r} = (\sigma\tau)^{\nu p^r} = x^{\nu p^r}, \\ \tau = \tau^{\nu p^r + \mu m} = \tau^{\mu m} = (\tau\sigma)^{\mu m} = x^{\mu m}, \end{cases}$$

δηλαδή σ, τ μονοσήμαντα ορισμένα.

Θεώρημα 5.5 *Εστω G μια p-<u>στοιχειώδης</u> ομάδα. Ισχύουν:*

(1) Η G έχει μια παράσταση της μορφής $G = C \times P$ με C κυκλική, $p \not| \#C$ και P μια p-ομάδα.

(2) Εστω $G = C \times P$ όπως στο (1) και έστω $S \leq G$. Τότε $S = (S \cap C) \times (S \cap P)$

(3) Κάθε υποομάδα και κάθε ομάδα πηλίκων της G είναι επίσης p-<u>στοιχειώδης</u>.

<u>Απόδειξη:</u>

(1) Εξ ορισμού η ομάδα G είναι p-στοιχειώδης. Συνεπώς $G =< c > \times P'$ και λόγω του θεωρήματος 5.4 έχουμε $c = \sigma\tau = \tau\sigma$ με σ p-ομαλό και τ p-ιδιάζων. Αφού $(ord(\tau), ord(\sigma)) = 1$ έχουμε $< c > = < \sigma > \times < \tau >$ και συνεπώς

$$G =< \sigma > \times < \tau > \times P'.$$

Θέτουμε $C :=< \sigma >$ και $P :=< \tau > \times P'$ οπότε $G = C \times P$.

(2) Εστω $s \in S \leq G$. Από το (1) έχουμε ότι $s = \sigma\tau$ με $\sigma \in C, \tau \in P$, δηλαδή το σ είναι p-ομαλό και το τ p-ιδιάζων. Επομένως $\sigma, \tau \in S$ διότι είναι δυνάμεις του s (δες απόδειξη του θεωρήματος 5.4). Συνεπώς $s \in (S \cap C) \times (S \cap P)$, οπότε

$$S \subseteq (S \cap C) \times (S \cap P).$$

Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής.

(3) Στο δεύτερο βήμα δείξαμε ότι κάθε υποομάδα μιας p-στοιχειώδους ομάδος είναι p-στοιχειώδης. Εστω τώρα $S \triangleleft G = C \times P$. Η (2) μας δίνει $S = (S \cap C) \times (S \cap P)$, οπότε

$$\frac{G}{S} \cong \frac{C \times P}{(S \cap C) \times (S \cap P)} \cong \frac{C}{S \cap C} \times \frac{P}{S \cap P}$$

όπου η ομάδα $\frac{C}{S \cap C}$ είναι κυκλική σαν υποομάδα κυκλικής ομάδας και η $\frac{P}{S \cap P}$ είναι p-ομάδα σαν υποομάδα p-ομάδας, δηλαδή η G/S είναι p-στοιχειώδης.

Από εδώ και κάτω υποθέτουμε και πάλι ότι το σώμα K είναι αλγεβρικά κλειστό και $ch(K) = 0$.

Συμβολισμός 5.6 *Εστω $R \subset K$ υποδακτύλιος του σώματος K και G πεπερασμένη ομάδα.*

$$\mathrm{X}_R(G) := \left\{ \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \chi_\nu / m \in \mathbb{N}, c_\nu \in R, \chi_\nu : G \longrightarrow K \text{ χαρακτήρας της } G \right\}$$

$$\Psi_R(G) := \left\{ \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu Ind_{H_\nu}^{G}(\phi_\nu) \Bigg/ \begin{array}{l} \text{όπου } H_\nu \ p - \text{στοιχειώδης υποομάδα της } G, \\ \phi_\nu : H_\nu \longrightarrow K \text{ χαρακτήρας της } H_\nu, \\ c_\nu \in R, \text{ και } n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

Προφανώς $\Psi_R(G) \subseteq \mathrm{X}_R(G)$.

Θεώρημα 5.7 *(1) Ο $\mathrm{X}_R(G)$, με πράξη την πρόσθεση και το γινόμενο συναρτήσεων γίνεται δακτύλιος με μοναδιαίο την $1_G : G \ni \sigma \longmapsto 1 \in K$.*

(2) Το $\Psi_R(G)$ είναι όχι μόνο υποδακτύλιος αλλά και ιδεώδες του $\mathrm{X}_R(G)$.

Απόδειξη:

(1) Αρκει να αποδείξουμε ότι για κάθε ζευγάρι χαρακτήρων $\chi_1, \chi_2 : G \longrightarrow K$ της G η συνάρτηση $\chi_1 \cdot \chi_2$ είναι επίσης χαρακτήρας. Εστω $\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i),\ i = 1, 2$ παραστάσεις της G με αντίστοιχο χαρακτήρα τον χ_i (ι=1,2). Εστω

$$\rho : \begin{cases} G & \longrightarrow & GL(V_1 \otimes_K V_2) \\ \sigma & \longmapsto & (\rho_1(\sigma) \otimes \rho_2(\sigma)) \end{cases}$$

Είναι σαφές ότι ο $V_1 \otimes_K V_2$ είναι K-διανυσματικός χώρος και ότι $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$. Η ρ είναι λοιπόν παράσταση της G. Εστω $B^1 = \{v_1^1, ..., v_{n_1}^1\}$, $B^2 = \{v_1^2, ..., v_{n_2}^2\}$ βάσεις των V_1, V_2 αντίστοιχα. Απο το πόρισμα 4.15 έχουμε ότι το σύνολο $B^1 \otimes B^2 := \{v_i^1 \otimes v_j^2 / i = 1, 2, ..., n_1, j = 1, 2, ..., n_2\}$ είναι βάση του $V_1 \otimes_K V_2$. Αν $\sigma \in G$ τότε

$$\rho_i(\sigma)(v_l^i) = \sum_{\mu=1}^{n_i} a_{\mu,l}^i v_\mu^i \quad (a_{\mu,l}^i \in K \ \ i = 1, 2).$$

Συνεπώς $\chi_i(\sigma) = \sum_{\mu=1}^{n_i} a_{\mu,\mu}^i \quad (i = 1, 2)$, οπότε

$$\rho(\sigma)(v_{l_1}^1 \otimes v_{l_2}^2) = \left(\sum_{\mu=1}^{n_1} a_{\mu,l_1}^1 v_\mu^1\right) \otimes \left(\sum_{\mu=1}^{n_2} a_{\mu,l_2}^2 v_\mu^2\right) = \sum_{\mu_1=1}^{n_1} \sum_{\mu_2=1}^{n_2} a_{\mu_1,\nu_1}^1 a_{\mu_2,\nu_2}^2 \cdot (v_{\mu_1}^1 \otimes v_{\mu_2}^2)$$

και επομένως η

$$\chi_\rho(\sigma) = \sum_{\mu_1=1}^{n_1} \sum_{\mu_2=1}^{n_2} a_{\mu_1,\mu_1}^1 a_{\mu_2,\mu_2}^2 = \chi_1(\sigma)\chi_2(\sigma)$$

δηλαδή το γινόμενο $\chi_1 \cdot \chi_2$ είναι χαρακτήρας της G.

(2) Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι η $\psi_R(G)$ είναι, προσθετική υποομάδα του $\mathrm{X}_R(G)$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι αν $\chi : G \longrightarrow K$ και $\phi : H \leq G \longrightarrow K$ χαρακτήρες των G, H αντίστοιχα τότε:

$$\chi \cdot Ind_H^G(\phi) = Ind_H^G(\chi|_H \cdot \phi)$$

Πράγματι για κάθε στοιχείο $\sigma \in G$ ισχύει:

$$\chi \cdot Ind_H^G(\phi))(\sigma) = \chi(\sigma)(Ind_H^G\phi)(\sigma) =$$

$$\frac{1}{\#H} \sum_{t \in G, t^{-1}\sigma t \in H} \chi(\sigma)\phi(t^{-1}\sigma t) = \frac{1}{\#H} \sum_{t \in G, t^{-1}\sigma t \in H} \chi(t^{-1}\sigma t)\phi(t^{-1}\sigma t) =$$

$$= \frac{1}{\#H} \sum_{t \in G \ t^{-1}\sigma t \in H} (\chi|_H \cdot \phi)(t^{-1}\sigma t) = Ind_H^G(\chi|_H \cdot \phi).$$

5.2 Θεώρημα του Brauer

Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι η απόδειξη του επομένου θεωρήματος, ενός θεμελιώδους αποτελέσματος της Θεωρίας Παραστάσεων με σημαντικές εφαρμογές στην Θεωρία Αριθμών (Brauer R, Tate J. «On the characters of finite groups» Ann. of Math. 62(1955), 1-7).

Θεώρημα 5.8 Brauer *Αν G πεπερασμένη ομάδα, τότε κάθε $\phi \in X_{\mathbb{Z}}(G)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός*

$$\phi = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu Ind_{H_\nu}^{G}(\psi_\nu)$$

με συντελεστές ακεραίους αριθμούς και ψ_ν χαρακτήρες πρώτου βαθμού p- στοιχειωδών υποομάδων H_ν της G.

Απόδειξη: Ισχυριζόμαστε ότι αρκεί να αποδείξουμε τα ακόλουθα δύο θεωρήματα

Θεώρημα 5.9 (Θεώρημα A) *Αν H στοιχειώδης υποομάδα της G και $\chi : H \longrightarrow K$ ανάγωγος χαρακτήρας της H τότε υπάρχει $H' \leq H$ και χαρακτήρας*

$$\chi' : H' \longrightarrow K$$

πρώτου βαθμού τέτοιος ώστε $\chi = Ind_{H'}^{H}(\chi')$.

Θεώρημα 5.10 (Θεώρημα B)

$$1_G \in \Psi_{\mathbb{Z}}(G)$$

Πρώτα απ΄ όλα θα δούμε ότι τα δύο προηγούμενα θεωρήματα μας δίνουν το θεώρημα του Brauer:

Από το Θεώρημα B εχουμε ότι $1_G \in \Psi_{\mathbb{Z}}(G)$. Επειδή όμως το $\Psi_{\mathbb{Z}}(G)$ είναι ιδεώδες του $X_{\mathbb{Z}}(G)$ αναγκαστικά $\Psi_{\mathbb{Z}}(G) = X_{\mathbb{Z}}(G)$, δηλαδή κάθε $\phi \in X_{\mathbb{Z}}(G)$ έχει μια παράσταση της μορφής

$$\phi = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu Ind_{H_\nu}^{G}(\psi_\nu)$$

όπου $\psi_\nu : H_\nu \longrightarrow K$ χαρακτήρες της H_ν, H_ν στοιχειώδης υποομάδα της G και $c_\nu \in \mathbb{Z}$. Το θεώρημα του Maschke μας δίνει ότι

$$\psi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n_\nu} \chi_{\nu,\mu}$$

όπου $\chi_{\nu,\mu} : H_\nu \longrightarrow K$ ανάγωγοι χαρακτήρες. Από το Θεώρημα Α έχουμε ότι υπάρχουν υποομάδες $H_{\nu,\mu} < H_\nu$ και χαρακτήρες πρώτου βαθμού $\chi'_{\nu,\mu} : H_{\nu,\mu} \longrightarrow K$ τέτοιοι ώστε $\chi_{\nu,\mu} = Ind_{H_{\nu,\mu}}^{H_\nu}(\chi'_{\nu,\mu})$. Από το θεώρημα 5.5 έπεται ότι οι υποομάδες $H_{\nu,\mu}$ είναι επίσης στοιχειώδεις οπότε:

$$\phi = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu Ind_{H_\nu}^{G}\left(\sum_{\mu=1}^{n_\nu} Ind_{H_{\nu,\mu}}^{H_\nu}(\chi'_{\nu,\mu})\right) = \sum_{\nu,\mu} c_\nu Ind_{H_{\nu,\mu}}^{G}(\chi'_{\nu,\mu})$$

Δηλαδή το θεώρημα του Brauer.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε τα θεωρήματα Α και Β. Για να επιτύχουμε το σκοπό μας χρειαζόμαστε το

Θεώρημα 5.11 (Blichfeld) *Εστω G στοιχειώδης ομάδα και $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ ανάγωγη παράσταση της G με $deg\rho > 1$. Υπάρχει γνήσια υποομάδα $H' < G$ και ανάγωγη παράσταση της H' $\rho' : H' \longrightarrow GL(V')$ τέτοια ώστε: $\rho = Ind_{H'}^{G}(\rho')$.*

Θα δεχτούμε προς το παρόν την αλήθεια του θεωρήματος του Blichfeld.

Απόδειξη: (του θεωρήματος Α) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς την τάξη της H. Εστω λοιπόν H μια στοιχειώδης ομάδα και έστω ότι το θεώρημα ισχύει για όλες τις υποομάδες $H' \leq H$ με $\#H' < \#H$. Εστω $\chi : H \longrightarrow K$ ανάγωγος χαρακτήρας της H. Αν $deg\chi = 1$ τότε ο ισχυρισμός του θεωρήματος είναι τετριμμένος. Εστω λοιπόν ότι $deg\chi > 1$. Τότε από το θεώρημα του Blichfeld έχουμε ότι υπάρχει $H' < H$, $H' \neq H$ και ανάγωγος χαρακτήρας $\chi' : H' \longrightarrow K$ με $\chi = Ind_{H'}^{H}(\chi')$. Λόγω της υπόθεσης της μαθηματικής επαγωγής, αφού $\#H' < \#H, \#H' \neq \#H$ έχουμε ότι υπάρχει υποομάδα $H'' \leq H'$ και χαρακτήρες πρώτου βαθμού $\chi'' : H'' \longrightarrow K$ τέτοιοι ώστε $\chi' = Ind_{H''}^{H'}(\chi'')$. Η μεταβατικότητα στις επαγώμενες παραστάσεις μας δίνει:

$$\chi = Ind_{H'}^{H}\left(Ind_{H''}^{H'}(\chi'')\right) = Ind_{H''}^{H}(\chi''),$$

δηλαδή το θεώρημα Α.

Απόδειξη: (του θεωρήματος Blichfeld) Αφού εξ υποθέσεως G στοιχειώδης από το θεώρημα 5.2 έπεται ότι υπάρχει κανονική και αβελιανή υποομάδα H της G με $Z(G) \neq H, Z(G) \leq H$. Ξεχωρίζουμε περιπτώσεις:

Περίπτωση Ι Εστω ρ ένα προς ένα (injective) δηλαδή ρ πιστή παράσταση της G. Η χαρακτηριστική του σώματος είναι $chK = 0$. Εφαρμόζουμε λοιπόν το θεώρημα του

Maschke και έχουμε την ανάλυση

$$\rho|_H = \oplus_{i=1}^{r}\left(\oplus_{j=1}^{n_i}\rho_i^{(j)}\right)$$

όπου $\rho_i^{(j)} : H \longrightarrow GL(V_i^{(j)})$ ανάγωγες, $\rho_i^{(1)}, ..., \rho_i^{(n_i)}$ ισοδύναμες μεταξύ τους ανά δύο και $\rho_i^{(j)} \not\sim \rho_k^{(j')}$ για $i \neq k$. Αφού H αβελιανή έχουμε ότι $\rho_i^{(j)}$ είναι όλες ανάγωγες παραστάσεις πρώτου βαθμού. Εστω $M_i := \chi_{\rho_i^{(j)}} : H \longrightarrow K^* = GL_1(K)$ η παράσταση διά πινάκων της $\rho_i^{(j)}$. Για τους αντίστοιχους χώρους παραστάσεων $V_i^{(j)}$ έχουμε $dimV_i^{(j)} = deg\rho_i^{(j)} = 1$ και

$$V = \oplus_{i=1}^{r}\left(\oplus_{j=1}^{n_i}V_i^{(j)}\right).$$

Εστω $V_i := \oplus_{j=1}^{n_i}V_i^{(j)}$. Για κάθε $v \in V_i^{(j)}$ έχουμε: $\rho(t)(v) = M_i(t)(v)$. Επομένως και για κάθε $v \in V$ έχουμε $\rho(t)(v) = M_i(t)(v)$.

Ισχυρίζομαστε ότι $V \neq V_i$ (1).

Πράγματι, αν ήταν $V = V_i$ τότε για $v \in V, \sigma \in G, t \in H$ ισχύει $\rho(\sigma^{-1})(v) \in V = V_i$ οπότε

$$(\rho(t)\cdot\rho(\sigma^{-1}))(v) = \rho(t)\cdot(\rho(\sigma^{-1})(v) = M_i(t)(\rho(\sigma^{-1})(v)) = \rho(\sigma^{-1})(M_i(t)(v)),$$

διότι $M_i(t) \in K$. Συνεπώς:

$$\rho(\sigma t\sigma^{-1})(v) = \rho(\sigma)\cdot\rho(t)\cdot\rho(\sigma^{-1})(v) = M_i(t)(v) = \rho(t)(v).$$

Αφού η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $v \in V$ έχουμε ότι

$$\rho(\sigma t\sigma^{-1}) = \rho(t), \quad gia\ k'aje\ \sigma \in G$$

Εχουμε όμως υποθέσει ότι η ρ είναι πιστή δηλαδή θα πρέπει κατάνάγκη να ισχύει $\sigma t\sigma^{-1} = t$ και αυτό για κάθε στοιχείο σ της G.

Αυτό σημαίνει ότι $t \in Z(G)$. Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε στοιχείο $t \in H$ έχουμε ότι $H \leq Z(G)$ άτοπο, διότι $Z(G) \neq H, Z(G) \leq H$, δηλαδή δείξαμε ότι $V \neq V_i$.

Ισχυριζόμαστε στην συνέχεια ότι το σύνολο

$$\{\rho(\sigma)/\sigma \in G\}$$

δρα μεταβατικά στο σύνολο $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ (2).

Για $\sigma \in G$ και $i \in \{1, 2, ..., r\}$ έστω

$$M_i^\sigma : \begin{cases} H & \longrightarrow & K \\ t & \longmapsto & M_i^\sigma(t) := M_i(\sigma t \sigma^{-1}) \end{cases}$$

Εστω $v \in V_i \backslash \{0\}, t \in H, \sigma \in G$. Εχουμε

$$(\rho(t) \cdot \rho(\sigma))(v) = \rho(t\sigma)(v) = (\rho(\sigma) \cdot \rho(\sigma^{-1} t \sigma)(v) =$$

$$= \rho(\sigma) M_i(\sigma^{-1} t \sigma)(v) = \rho(\sigma)(M_i^\sigma(t)(v)) = M_i^\sigma(t)(\rho(\sigma)(v)) \quad (*)$$

διότι $M_i^\sigma(t) \in K$.

Εστω $\rho(\sigma)(v) = \sum_{j=1}^{\sigma} v_j$ με $v_j \in V_j$. Συνεπώς έχουμε

$$\rho(t) \cdot \rho(\sigma)(v) = \rho(t) \left(\sum_{j=1}^{r} v_j \right) = \sum_{j=1}^{r} M_j(t)(v_j) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{r} M_i^\sigma(t)(v_j).$$

Εχουμε λοιπόν ότι για κάθε $j = 1, 2, ..., r$ και κάθε $t \in H$ ισχύει $(M_j(t) - M_i^\sigma(t))(v_j) = 0$ συνεπώς $M_j(t) = M_i^\sigma(t)$ για κάθε $j = 1, 2, ..., r$ και $t \in H$ ή $v_j = 0$.

Οι παραστάσεις διά πινάκων $M_1, ..., M_r$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αφού αντιστοιχούν σε μη ισοδύναμες ανά δύο παραστάσεις της G. Επομένως δεν μπορούμε να έχουμε για περισσότερα του ενός j $M_j(t) = M_i^\sigma(t)$. Από την άλλη μεριά $v \neq 0$ και ρ είναι πιστή συνεπώς $\rho(\sigma)(v) \neq 0$ οπότε υπάρχει μοναδικό $j \in \{1, 2, ..., r\}$ τέτοιο ώστε $M_i^\sigma = M_j$ και γιά <u>κάθε</u> $j' \neq j$ ισχύει $v_{j'} = 0$. Επομένως $\rho(\sigma)(v) = v_j \in V_j$ και συνεπώς $\rho(\sigma)(V_i) \subseteq V_j$. Εφαρμόζουμε την $\rho(\sigma^{-1})$ και στα δύο μέλη και έχουμε

$$V_i \subseteq \rho(\sigma^{-1})(V_j) \quad (\alpha)$$

Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $k \in \{1, 2, ...r\}$ τέτοιο ώστε

$$\rho(\sigma^{-1})(V_j) \subseteq V_k.$$

Επειδή $V_k \supset \rho(\sigma^{-1})(V_j) \cap V_i \neq \{0\}$ έπεται $V_k \cap V_i \neq \{0\}$. Αλλά έχουμε αποδείξει πιό μπροστά ότι $V = \oplus_{i=1}^{r} V_i$, δηλαδή και $V_i \cap V_j = \{0\}$ για $i \neq j$. Επομένως $k = i$ και

$$\rho(\sigma^{-1})(V_j) \subset V_i \quad (\beta)$$

πράγμα που σημαίνει ότι η $\rho(\sigma)|_{V_i} : V_i \xrightarrow{\cong} V_j$ είναι ισοομομορφισμός K-διανυσματικών χώρων δηλαδή ότι ο $\rho(\sigma)$ μεταθέτει τα $V_1, ..., V_r$. Θα δείξουμε επιπλέον ότι δρά μεταβατικά. Εστω $i_0 \in \{1, 2, ..., r\}$ σταθερό και

$$V^* := \sum_{\sigma \in G} \rho(\sigma)(V_{i_0}) \neq \{0\}$$

Προφανώς ο $V^* \leq V$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V και μάλιστα V^* είναι επιπλέον και ρ-ανναλοίωτος. Επειδή η παράσταση ρ είναι ανάγωγη και $V^* \neq \{0\}$ έχουμε ότι $V^* = V$ δηλαδή ότι

$$\{\rho(\sigma)(V_{i_0})/\sigma \in G\} = \{V_1, ..., V_r\}$$

το οποίο σημαίνει ότι η δράση είναι μεταβατική.

Εστω $V' = V_{i_0}$. Ο V' είναι $\rho|_H$ αναλλοίωτος αλλά όχι ρ-αναλλοίωτος. Εστω ακόμη

$$H' := \{t \in G/\rho(t)(V') = V'\}.$$

Προφανώς $H \leq H' < G$, $H' \neq G$. Ορίζουμε

$$\rho' : \begin{cases} H' & \longrightarrow & GL(V') \\ t & \longmapsto & \rho(t)|_{V'} \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι ρ' είναι μια ανάγωγη παράσταση της H' καθώς επίσεις και ότι:

$$\rho = Ind_{H'}^{G}(\rho').$$

Η ρ' είναι, εξ ορισμού, παράσταση της H'. Εστω $G = \dot{\cup}_{i=1}^{l} \ \sigma_i H'$. Επειδή η $\rho(\sigma)$ δρα μεταβατικά στο σύνολο $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ έχουμε, $V = \sum_{\sigma \in G} \rho(\sigma) V'$. Επίσης, λόγω της ιδιότητας $\rho(h)(V') = V'$ για κάθε $h \in H$, έχουμε

$$V = \sum_{\sigma \in G} \rho(\sigma) V' = \oplus_{i=1}^{l} \rho(\sigma_i) V'.$$

Λόγω του θεωρήματος 4.28 προκύπτει ότι $\rho = Ind_{H'}^{G}(\rho')$. Αν η παράσταση ρ' είναι μη-ανάγωγη (reducible) τότε υπάρχει $V'' < V'$, $V'' \neq V'$ και V'' ρ'-αναλλοίωτος τέτοιος ώστε:

$$V^{**} := \oplus_{i=1}^{l} \rho(\sigma_i)(V'') < V, \ \ \oplus_{i=1}^{l} \rho(\sigma_i) \qquad (V'') \neq V).$$

Ομως ο V^{**} είναι ρ-αναλλοίωτος, διότι αν $\sigma \in G$ τότε $\sigma\sigma_i = \sigma_{\pi(i)} t$ όπου π μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, ..., l\}$ και αν $v \in V^{**}$, $v = \sum_{j=1}^{l} \rho(\sigma_i)(v_i)$ τότε: $\rho(\sigma)(v) = \sum_{i=1}^{l} \rho(\sigma)(\rho(\sigma_i)(v_i)) =$

$\sum_{i=1}^{l} \rho(\sigma_{\pi(i)})\rho(t)(v_i) \in V^{**}$, διότι $\rho(t)(v_i) \in V''$. Συνεπώς ο V^{**} ρ-αναλλοίωτος, άτοπο αφού ρ ανάγωγη. Επομένως αναγκαστικά και η ρ' θα είναι ανάγωγη.

Περίπτωση (ΙΙ): Εστω $\rho \longrightarrow GL(V)$ όχι εν γέννει ένα προς ένα (injective). Εστω $G_0 := ker\rho \triangleleft G$. Εστω $\bar{G} := G/G_0$ και

$$\pi : G \longrightarrow \bar{G} = G/G_0$$

η <u>κανονική</u> προβολή. Εστω $\bar{\rho} : \bar{G} \longrightarrow GL(V)$ παράσταση της $\bar{G}$ τέτοια ώστε $\bar{\rho} \circ \pi = \rho$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\pi"'] & GL(V) \\ & \bar{G} = G/G_0 \arrow[u, "\bar{\rho}"'] \end{tikzcd}$$

Η $\bar{\rho}$ είναι ανάγωγη αφού η ρ είναι ανάγωγη και προφανώς ένα προς ένα, αφού $G_0 = ker\rho$. Ο βαθμός της $\bar{\rho}$ είναι $deg\bar{\rho} = dimV > 1$. Επομένως η $\bar{G}$ επαληθεύει όλες τις προϋποθέσεις της περίπτωσης (I) και συνεπώς υπάρχει $\bar{H}' < \bar{G}, \bar{H}' \neq \bar{G}$ και παράσταση $\bar{\rho}' : \bar{H}' \longrightarrow GL(V')$ τέτοια ώστε $\bar{\rho} = Ind_{\bar{H}'}^{\bar{G}}(\bar{\rho}')$. Θέτουμε $H' := \pi^{-1}(\bar{H}')$ και

$$\rho' := \bar{\rho}' \circ \pi|_{H'} : H' \longrightarrow GL(V).$$

Εχουμε λοιπόν ότι για κάθε $t \in H'$ $\rho'(t) = \bar{\rho}'(\pi(t))$. Η ρ' είναι ανάγωγη, αφού η $\bar{\rho}'$ είναι ανάγωγη. Αν $G = \dot{\cup}_{i=1}^{r} \sigma_i H'$ τότε $\bar{G} = \dot{\cup}_{i=1}^{r} \pi(\sigma_i)\bar{H}'$. Επειδή $\bar{\rho} = Ind_{\bar{H}'}^{\bar{G}}(\bar{\rho}')$ έπεται ότι για κάθε $\bar{t} \in \bar{H}', \bar{\rho}(\bar{t})|_{V'} = \bar{\rho}'(\bar{t})$ και

$$V = \oplus_{i=1}^{r} \bar{\rho}(\pi(\sigma_i))(V').$$

Επομένως για κάθε $t \in H', \rho(t)|_{V'} = \rho'(t)$ και $V = \oplus_{i=1}^{r} \rho(\sigma_i)(V')$ οπότε, όπως και στην περίπτωση (I), έχουμε

$$\rho = Ind_{H}^{G}(\rho').$$

Αφού, εξ υποθέσεως, K αλγεβρικά κλειστό σώμα και $char(K) = 0$, αν $g = \#G$ και ζ_g μια πρωταρχική g-ρίζα της μονάδος, τότε ο δακτύλιος $R = \mathbb{Z}[\zeta_g] \subset K$. Θέτουμε $\zeta := \zeta_g$.

Θεώρημα 5.12 *Εστω $d \in \mathbb{Z}$ και $d \cdot 1_G \in \Psi_R(G)$. Τότε $d \cdot 1_G \in \Psi_{\mathbb{Z}}(G)$.*

Απόδειξη:

Εχουμε $d \cdot 1_G = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \cdot Ind_{H_\nu}^G(\varphi_i)$, όπου $H_\nu \leq G$, p_ν-στοιχειώδης, $\varphi_\nu : H_\nu \to K$ χαρακτήρες των H_ν και $c_\nu \in R$. Το γεγονός ότι $c_\nu \in R = \mathbb{Z}[\zeta]$, συνεπάγεται ότι $c_\nu = \sum_{i=0}^{n-1} a_{\nu i}\zeta^i$ με $a_{\nu i} \in \mathbb{Z}$. Επομένως έχουμε:

$$d \cdot 1_G = \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{i=0}^{n-1} a_{\nu i}\zeta^i Ind_{H_\nu}^G(\varphi_\nu) = \sum_{i=0}^{n-1}\zeta^i \sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu i} Ind_{H_\nu}^G(\varphi_\nu).$$

Θέτουμε $\alpha_i := \sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu i} Ind_{H_\nu}^G(\varphi_\nu)$. Προφανώς $\alpha_i \in \Psi_{\mathbb{Z}}(G)$.
Εστω $\chi_1 = 1_G, \chi_2, \cdots, \chi_l : G \to K$ οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G υπέρ το K. Τότε $\alpha_i = \sum_{\mu=1}^{l} b_{i\mu}\chi_\mu$ με $b_{i\mu} \in \mathbb{Z}$. Επομένως:

$$d \cdot 1_G = d \cdot \chi_1 = \sum_{\mu=1}^{l}\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i b_{i\mu}\chi_\mu.$$

Ως γνωστό οι $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_l$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι υπέρ το K (αποτελούν μάλιστα ορθογώνια βάση !). Συνεπώς

$$d = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i1}\zeta^i \quad \text{και} \quad 0 = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i\mu}\zeta^i, \;\; \text{για} \;\; \mu \in \{2, 3, \cdots, l\}.$$

Αρα $b_{01} = d$ και $b_{i1} = 0, \;\; \forall i = 1, 2, \cdots, n-1$ ενώ $b_{i\mu} = 0$ για κάθε $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ και για κάθε $\mu = 2, 3, \cdots, l$. Επομένως $d \cdot 1_G = d \cdot \chi_1 \in \Psi_{\mathbb{Z}}(G)$.

Ορισμός 5.13 *Εστω p πρώτος αριθμός, $x, x' \in G$ και*

$$x = \sigma t = t\sigma, \;\; x' = \sigma' t = t'\sigma'$$

οι αναλύσεις των x, x' σε γινόμενο των p-ομαλών στοιχείων σ, σ' και των p-ιδιαζόντων στοιχείων t, t', αντίστοιχα.
Τα x, x' θα λέγονται p-ισοδύναμα όταν τα στοιχεία σ και σ' είναι μεταξύ τους ισοδύναμα.

Ωστε: $x \cong_p x' \Longleftrightarrow \sigma \cong \sigma'$
Προφανώς η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα 5.14 *Εστω $f \in X_R(G)$ και ότι για κάθε $\sigma \in G$, $f(\sigma) \in \mathbb{Z}$. Εστω $x, x' \in G$ τέτοια ώστε $x \cong_p x'$. Τότε $f(x) \equiv f(x') mod p$.*

Απόδειξη: Εστω $x = \sigma t = t\sigma$, όπου σ p-ομαλό, t p-ιδιάζων.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \equiv f(\sigma) mod p$, διότι από την τελευταία ισοδυναμία προκύπτει αμέσως ότι

$$f(x) \equiv f(\sigma) \equiv f(\sigma') \equiv f(x') \pmod p.$$

Εστω τώρα $H := < x > \leq G$ και $f|_H = \sum_{j=1}^{l} a_j \psi_j$ με $a_j \in R$ και $\psi_j : H \to K$ ανάγωγους χαρακτήρες της H. Εστω $r \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$t^{p^r} = e \Rightarrow x^{p^r} = \sigma^{p^r}.$$

Επομένως για κάθε $j = 1, 2, \cdots, l$ ισχύει

$$\psi_j(x^{p^r}) = \psi_j(\sigma^{p^r}), \text{ δηλαδή για κάθε } j = 1, 2, \cdots, l, \text{ ισχύει } \psi_j(x)^{p^r} = \psi_j(\sigma)^{p^r}.$$

Ομως $x \in H = < x >$. Επομένως

$$f(x)^{p^r} = (\sum a_j \psi_j(x))^{p^r} \equiv \sum a_j^{p^r} \psi_j(x)^{p^r} \pmod{pR} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)^{p^r} \equiv f(\sigma)^{p^r} \pmod{pR}.$$

Επειδή δε $f(x), f(\sigma) \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x)^{p^r} \equiv f(\sigma)^{p^r} mod p$ διότι $p\mathbb{Z} = pR \cap \mathbb{Z}$. Τέλος, επειδή για κάθε $a \in \mathbb{Z}$, ισχύει $a^p \equiv a mod p$ (θεώρημα Euler), η τελευταία σχέση δίνει

$$f(x) \equiv f(\sigma) \pmod p.$$

Θεώρημα 5.15 *Αν p είναι πρώτος αριθμός και $t \in G$ p-ομαλό τότε υπάρχει $f \in \Psi_R(G)$ με τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\forall \sigma \in G, \quad f(\sigma) \in \mathbb{Z}$
2. $\forall \sigma \in G, \quad \sigma \not\equiv_p t \Rightarrow f(\sigma) = 0$
3. $f(t) | G$ *και* $f(t) \not\equiv 0 \pmod p$.

Απόδειξη: Εστω $T = < t > \leq G$ και $Z_G(T)$ η κεντροποιούσα της T (δες σελ. 147), $P \leq G$ μια p-υποομάδα της G τέτοια ώστε ο p να μην διαιρεί τον δείκτη $[C : P]$. Το γεγονός ότι το t είναι p-ομαλό συνεπάγεται ότι ο p δεν διαιρεί την τάξη του t, $ord(t)$ και το γεγονός ότι η P είναι p-ομάδα ότι $T \cap P = \{e\}$ οπότε $TP = T \times P \leq G$ δηλαδή η TP

είναι μια p-<u>στοιχειώδης</u> υποομάδα της G.

Εστω $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r : T \to K^*$ οι ανάγωγοι χαρακτήρες της T (είναι όλοι τους πρώτου βαθμού, δηλαδή ομομορφισμοί ομάδων διότι $T =< t >$ κυκλική). Εστω $m := ord(t)$. Τότε $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_r(t)$ είναι όλες m-ρίζες της μονάδος στο K ($1 = \varphi_i(e) = \varphi_i(t^m) = [\varphi_i(t)]^m$). Από την άλλη μεριά μια απεικόνιση του t σε μια <u>οποιαδήποτε</u> m-ρίζα της μονάδος είναι ομομορφισμός ομάδων $T \to K^*$, δηλαδή χαρακτήρας της T. Συνεπώς $r = m = \#T$. Τώρα,

$$r = m = \#T | g = \#G \Rightarrow \varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_r(t) \in R = \mathbb{Z}[\zeta]. \ \ (\zeta = \zeta_g)$$

Επομένως για κάθε $\nu \in \mathbb{N}_0$ ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(t)^\nu = \begin{cases} r, & \text{αν} \quad \nu \equiv 0 \pmod{m} \\ 0, & \text{αν} \quad \nu \not\equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

Για $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ έστω $\psi_i : T \times P \to K^*$ η απεικόνιση η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\psi_i(t^\mu \cdot y) := \varphi_i(t^\mu) = \varphi_i(t)^\mu.$$

Εξ ορισμού οι ψ_i είναι χαρακτήρες πρώτου βαθμού της $T \times P$. Εστω τώρα

$$\psi := \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(t^{-1}) \psi_i : T \times P \to K$$

και

$$f := Ind_{T \times P}^{G}(\psi) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(t^{-1}) Ind_{T \times P}^{G}(\psi_i) \in \Psi_R(G).$$

Αν $0 \leq \nu \leq \mu < m$ τότε

$$\psi(t^\nu y) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(t^{-1}) \psi_i(t^\nu y) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(t^{-1}) \varphi_i(t^\nu) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(t)^{\nu - 1} = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad \nu \neq 1 \\ r = \#T, & \text{αν} \quad \nu = 1. \end{cases}$$

Λόγω του θεωρήματος 4.30 έπεται ότι για κάθε $\sigma \in G$ ισχύει:

$$f(\sigma) = \frac{1}{[T \times P : 1]} \cdot \sum_{x \in G, \ \ x^{-1}\sigma x \in T \times P} \psi(x^{-1} \sigma x) =$$

$$= \frac{1}{\#T \cdot \#P} \cdot \sum_{x\in G,\ \ x^{-1}\sigma x \in tP} (\#T) = \frac{\mu(\sigma)}{\#P},$$

όπου $\mu(\sigma) = \#\{x \in G | x^1 \sigma x \in tP\}$.

Εστω τώρα $x \in G$ τέτοιο ώστε $x^{-1}\sigma x \in tP$, $\ y \in xP$. Επομένως $y = xz$ με $z \in P$ και $x^{-1}\sigma x = tw$ με $w \in P$. Υπολογίζουμε το

$$y^{-1}\sigma y = z^{-1}x^{-1}\sigma x z = z^{-1}twz = tz^{-1}wz = t(z^{-1}wz) \in tP.$$

Συνεπώς το $\{x \in G | x^{-1}\sigma x \in tP\}$ αποτελεί το σύνολο των πλευρικών κλάσεων xP, της ομάδας P. Αρα $\#xP = \#P/\mu(\sigma)$, οπότε $f(\sigma) \in \mathbb{Z}$, δηλαδή αποδείξαμε το 1.

Εστω $\mu(\sigma) \neq 0$. Τότε υπάρχει $x \in G$ και $y \in P$ τέτοια ώστε $x^{-1}\sigma x = ty$. Αν $\sigma = \sigma'\sigma''$ με σ' p-ομαλό και σ'' p-ιδιάζων, τότε:

$$x^{-1}\sigma x = (x^{-1}\sigma' x)(x^{-1}\sigma'' x) = ty$$

όπου το t είναι p-ομαλό και το y είναι p-ιδιάζων. Λόγω του μονοσήμαντου της παράστασης έχουμε $t = x^{-1}\sigma' x \cong_p \sigma$. Συνεπώς, αν $t \ncong_p \sigma$ έπεται ότι $\mu(\sigma) = 0$ οπότε και $f(\sigma) = \frac{\#\mu(\sigma)}{\#P} = 0$, δηλαδή αποδείξαμε την 2.

Αν τώρα $x^{-1}tx = ty$ με $y \in P$ τότε $y = e$. Επομένως

$$\mu(t) = \#\{x \in G | x^{-1}tx = t\} = \#Z_G(T).$$

Αρα

$$f(t) = \frac{\mu(t)}{\#P} = \frac{\#Z_G(T)}{\#P} = [Z_G(T) : P] \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Τέλος

$$f(t) = [Z_G(T) : P] \ \mid \ [Z_G(T) : 1] \ \mid \ [Z_G(T) : 1] \Rightarrow f(t) \ \mid \ g$$

δηλαδή η 3.

Θεώρημα 5.16 *Αν $f : G \to \mathbb{Z}$ μια συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G τέτοια ώστε για κάθε $\sigma \in G$, $\ g | f(\sigma)$, τότε $f \in \Psi_R(G)$.*

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\Gamma \subset G$ μια κλάση συζυγίας της G και $f : G \to \mathbb{Z}$ μια συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G και

$$f(\sigma) = f_\Gamma(\sigma) := \begin{cases} g, & \text{αν} \quad \sigma \in \Gamma \\ 0, & \text{αν} \quad \sigma \notin \Gamma \end{cases}$$

τότε $f \in \Psi_R(G)$.

Πράγματι, τότε θα είχαμε

$$f = \sum_{\Gamma \subset G} \frac{f(\sigma)}{g} f_\Gamma \in \Psi_R(G).$$

Εστω p πρώτος αριθμός και $p \not| g$, δηλαδή για κάθε $t \in G$ το t είναι p-ομαλό και

$$\text{για κάθε } \ t, t' \in G, \quad (t \cong_p t' \Leftrightarrow t = t').$$

Εστω $t \in \Gamma$. Από την το θεώρημα 5.15 έπεται ότι υπάρχει $f_0 \in \Psi_R(G)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\sigma \in G$ $f_0(\sigma) \in \mathbb{Z}$, $\ f_0|_{G \setminus \Gamma} = 0$, και $f_0(t)|g$.

Τώρα για κάθε $t' \in \Gamma$, $\ f_0(t') = f_0(t)$. Επομένως

$$f := \frac{g}{f_0(t)} f_0 \in \Psi_R(G).$$

Απόδειξη του θεωρήματος B :

Για κάθε p πρώτο αριθμό έστω $g = n_p p^{r_p}$ με p να μην διαιρεί τον n_p. Αρκεί να αποδείξουμε ότι, για κάθε p πρώτο ισχύει $n_p \cdot 1_G \in \Psi_R(G)$ όπου $R = \mathbb{Z}[\zeta]$. (το θεώρημα 5.12 μας δίνει τότε ότι $n_p \cdot 1_G \in \Psi_{\mathbb{Z}}(G)$.)

Πράγματι, αν $\{n_p | p \text{ πρώτος}\} = \{n_1, n_2, \cdots, n_l\}$ τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $n_1, n_2, \cdots, n_l$ είναι 1. Επομένως υπάρχουν $k_1, k_2, \cdots, k_l \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $\sum_{k=1}^{l} k_i n_i = 1$. Δηλαδή

$$1_G = \sum_{k=1}^{l} k_i n_i \cdot 1_G \in \Psi_R(G)$$

οπότε από το θεώρημα 5.12 συνεπάγεται ότι $1_G \in \Psi_{\mathbb{Z}}(G)$.

Εστω λοιπόν p πρώτος αριθμός. Για κάθε p-κλάση συζυγίας $\Gamma \subset G$ της G έστω $f_\Gamma \in \Psi_R(G)$ τέτοια ώστε (δες θεώρημα 5.15)

$$\begin{cases} f(\sigma) \in \mathbb{Z} & \forall \sigma \in G \\ f_\Gamma|_{G-\Gamma}(\sigma) = 0 & \text{και} \\ f_\Gamma(t) \not\equiv 0 \pmod p & \forall t \in \Gamma. \end{cases}$$

Ορίζουμε $f_0 := \sum_{\Gamma \subset G} f_\Gamma \in \Psi_R(G)$. Τότε για κάθε $\sigma \in G$ ισχύει $f_0(\sigma) \not\equiv 0 \pmod p$. Για $f := f_0^{(p-1)p^{r_p - 1}}$, έχουμε:

$$f(\sigma) = f_0^{\varphi(p^r)}(\sigma) \equiv 1 \pmod{p^{r_p}}, \ \ \forall \sigma \in G$$

και, αφού $f_0 \in \Psi_R(G)$ έπεται ότι $f \in \Psi_R(G)$. Εχουμε

$$n_p \cdot 1_G = n_p(1_G - f) + n_p f \equiv 0 \pmod g, \text{ διότι } g = n_p \cdot p^{r_p}.$$

Επομένως $g | n_p(1_G - f)(\sigma)$ για κάθε $\sigma \in G$. Από το θεώρημα 5.16 έπεται ότι $n_p(1_G - f) \in \psi_R(G)$ οπότε και (αφού $f \in \Psi_R(G)$), $n_p \cdot 1_G \in \Psi_R(G)$.

Συνεπώς αποδείξαμε και το θεώρημα B και έτσι έχουμε πλήρη την απόδειξη του θεωρήματος του Brauer.

Το τελευταίο θεώρημα που θα αποδείξουμε εδώ είναι ένα ακόμη θεώρημα του Brauer, το οποιο όμως είχε αποδειχθεί πολύ πιο μπροστά από τον Aramata (το $1931-33$).

Υπενθυμίζουμε από τα προηγούμενα τα εξής (K αλγεβρικά κλειστό και $char(K) = 0$) :

1. Εστω $H \leq G$ και ψ χαρακτήρας της H και έστω $\psi^* = Ind_H^G$ ο επαγώμενος χαρακτήρας της ψ στην G. Τότε η πολλαπλότητα με την οποία εμφανίζεται ο 1_H στην ανάλυση του ψ είναι ακριβώς η ίδια με την πολλαπλότητα με την οποία εμφανίζεται ο 1_G στην ψ^*.

2. $\rho_{\text{ομ}} = Ind_{\{1\}}^G \rho_0, \quad \rho_0 : \{1\} \to K^*$ με $\rho_0(1) = 1$.

Επομένως (κάτι που είδαμε και ανεξάρτητα στο πρώτο κεφάλαιο), στην $\chi_{\text{ομ}}$ η πολλαπλότητα εμφάνισης της 1_G είναι 1.

Θεωρούμε τώρα τον χαρακτήρα $\chi_G := \chi_{\text{ομ},G} - 1_G$ και θα αποδείξουμε:

Θεώρημα 5.17 *(Aramata-Brauer)*
Ο χαρακτήρας $n \cdot \chi_G$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός (με φυσικούς αριθμούς σαν συντελεστές) χαρακτήρων που επάγονται απο χαρακτήρες πρώτου βαθμού κυκλικών υποομάδων της G.

Αν A μια κυκλική ομάδα τάξεως a, τότε ορίζουμε την συνάρτηση:

$$\theta_A : \begin{cases} A \longrightarrow \mathbb{N} \\ \sigma \longmapsto \theta_A(\sigma) = \begin{cases} a, & \text{αν} \quad A =< \sigma > \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \end{cases}$$

Θέτουμε $\lambda_A := \varphi(a)\chi_{\text{ομ},A} - \theta_A$ (φ η συνάρτηση του Euler) και $\lambda_A := 0$, όταν $a = 1$.
Η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση συνέπεια των παρακάτω δύο προτάσεων:

Πρόταση 5.18 *Εστω G πεπερασμένη ομάδα τάξεως n. Τότε ισχύει ότι:*

$$n \cdot \chi_G = \sum Ind_A^G \lambda_A,$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις κυκλικές υποομάδες της G.

Απόδειξη: Εστω ψ οποιαδήποτε συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G. Τότε

$$< \psi, n \cdot \chi_G >_G = < \psi, n\chi_{\text{ομ},G} >_G - < \psi, n \cdot 1_G >_G = n \cdot \psi(1) - \sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma) \quad (1)$$

Από την άλλη μεριά:

$$\sum_A < \psi, Ind_A^G \lambda_A >_G = \sum_A < \psi|_A, \lambda_A >_A = \sum_A < \psi|_A, \varphi(a)\chi_{\text{ομ},A} - \theta_A >_A =$$

$$= \sum_A \varphi(a) < \psi|_A, \chi_{\text{ομ},A} >_A - \sum_A < \psi|_A, \theta_A >_A =$$

$$\sum_A \varphi(a)\psi(1) - \sum_A \frac{1}{a} \sum_{\sigma \text{ γεννήτορας της} A} a\psi(\sigma) = n\psi(1) - \sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma) \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι:

$$< \psi, n \cdot \chi_G >_G = \sum_A < \psi, Ind_A^G \lambda_A >_G .$$

Επομένως για κάθε ψ συνάρτηση κλάσεων συζυγίας της G έχουμε:

$$n \cdot \chi_G = \sum_A Ind_A^G \lambda_A.$$

Πρόταση 5.19 *Αν $A \neq \{1\}$ τότε η συνάρτηση λ_A είναι ένας γραμμικός συνδυασμός μη-τετριμμένων χαρακτήρων της A με θετικούς ακέραιους συντελεστές.*

Απόδειξη: Αν A κυκλική ομάδα τάξεως πρώτου αριθμού τότε η πρόταση 5.18 μας δίνει:

$$n \cdot \chi_A = \lambda_A + \lambda_{\{1\}} = \lambda_A \Rightarrow \lambda_A = n \cdot \chi_{\text{ομ},A} - n \cdot 1_A$$

που είναι γραμμικός συνδυασμός μη τετριμμένων χαρακτήρων της A με θετικούς ακεραίους συντελεστές, λόγω της γνωστής ανάλυσης της ομαλής παράστασης (δες, θεώρημα 1.39, σελ. 30).

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό γενικά αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντελεστές της

ανάλυσης της λ_A ως προς τους χαρακτήρες πρώτου βαθμού είναι ακέραιοι ≥ 0.
Εστω ψ χαρακτήρας της A βαθμού 1.

$$< \psi, \lambda_A >_A = < \psi, \varphi(a)\chi_{\text{ομ},A} - \theta_A >_A = \varphi(a)\psi(1) - < \psi, \theta_A >_A =$$

$$= \varphi(a)\psi(1) - \sum_{\sigma \text{ γεννήτορας της} A} \psi(\sigma) = \sum_{\sigma \text{ γεννήτορας της} A} (1 - \psi(\sigma)).$$

Το άθροισμα $\sum \psi(\sigma)$ ως προς όλους τους γεννήτορες της A είναι αλγεβρικός ακέραιος και συγχρόνως ρητός αριθμός. Επομένως $\sum \psi(\sigma) \in \mathbb{Z}$. Επι πλέον αν ψ μη-τετριμμένη τότε όλα τα πραγματικά μέρη της $1-\psi(\sigma)$ είναι θετικά όταν $\sigma \neq e$ και μηδέν όταν $\sigma = e$. Συνεπώς το $\sum(1-\psi(\sigma))$ θα πρέπει να είναι θετικός ακέραιος. Αν $\psi = 0$ είναι ο τετριμμένος χαρακτήρας, τότε το άθροισμα θα είναι προφανώς 0 δηλαδή έχουμε το συμπέρασμα της πρότασης.

Το θεώρημα 5.17 έχει την ακόλουθη σημαντικώτατη εφαρμογή στην θεωρία των αριθμών: Αν L/K είναι επέκταση του Galois αλγεβρικών σωμάτων αριθμών και $\zeta_K(s), \zeta_L(s)$ οι ζ-συναρτήσεις του Dedekind αυτών των σωμάτων, τότε το πηλίκο $\zeta_L(s)/\zeta_K(s)$ είναι ακεραία (ολόμορφη) συνάρτηση στο $\mathbb{C}$.

Ανοιχτή παραμένει μέχρι σήμερα η:

Εικασία 5.20 *Αν L/K επέκταση αλγεβρικών σωμάτων αριθμών τότε το πηλίκο $\zeta_L(s)/\zeta_K(s)$ είναι συνάρτηση ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.*

Για μια τοπολογική προσέγγιση του θεωρήματος του Brauer ο αναγνώστης μπορεί να δεί το βιβλίο του Victor Snaith, Topological Methods in Galois Representation Theory, John Wiley and Sons 1989 (ιδιαίτερα ενδιαφέροντα είναι το Κεφάλαιο 6 Explicit Brauer Reduction Theory και το Κεφάλαιο 7 Applications of Explicit Brauer Induction to Artin Root Numbers and local Root Numbers).

Ο αναγνώστης θα μπορούσε επίσης να συμβουλευθεί της εργασία των R.Boltje, V.Snaith, P.Symonds Algebraicisation of explicit Brauer Induction , Journal of Algebra 148, 504 – 527 (1992).

6 Παράρτημα

1. Θεωρία Ομάδων

1.1 Γενικότητες

Ενα μη-κενό σύνολο G εφοδιασμένο με μια προσεταιριστική πράξη θα λέγεται ομάδα όταν υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $e \in G$, το οποίο θα λέγεται το μοναδιαίο της G, τέτοιο ώστε $ge = eg = g$ για κάθε $g \in G$ και, επί πλέον, για κάθε στοιχείο $g \in G$ υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $g^{-1} \in G$, το οποίο θα λέγεται αντίστροφο του g, τέτοιο ώστε $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Θα λέμε ότι τα στοιχεία g_1, g_2 της G αντιμετατίθενται όταν $g_1g_2 = g_2g_1$.

Πιο γενικά, ορίζουμε τον μεταθέτη δύο στοιχείων $g_1, g_2 \in G$,

$$[g_1, g_2] := g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}.$$

Προφανώς δύο στοιχεία g_1, g_2 της G αντιμετατίθενται ακριβώς τότε όταν $[g_1, g_2] = e$.
Αν όλα τα ζευγάρια στοιχείων της G αντιμετατίθενται, τότε θα λέμε ότι η G είναι αντιμεταθετική (αβελιανή).

Αν g ένα στοιχείο της G τότε για $n \in \mathbb{N}$ με g^n (αντίστοιχα g^{-n} θα συμβολίζουμε το γινόμενο n παραγόντων $g \cdot g \cdot g \cdots g$ (αντίστοιχα $g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot g^{-1} \cdots g^{-1}$). Επίσης ορίζουμε $g^0 = e$.

Θα λέμε ότι το στοιχείο g της G είναι πεπερασμένης τάξης όταν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $g^n = e$. Αν g είναι πεπερασμένης τάξης, τότε τάξη του g είναι ο ελάχιστος φυσικός n τέτοιος ώστε $g^n = e$. Μια ομάδα θα λέγεται πεπερασμένη όταν έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Επειδή μας ενδιαφέρουν μόνο πεπερασμένες ομάδες, από δω και κάτω θα υποθέτουμε ότι η G είναι πάντοτε πεπερασμένη. Το πλήθος των στοιχείων της G θα λέγεται τάξη της ομάδας G και θα συμβολίζεται με $\#G$. Ενα μη-κενό υποσύνολο H μιας ομάδας G θα λέγεται υποομάδα της G αν το H αποτελεί ως προς την πράξη της ομάδας G, ομάδα και θα το συμβολίζουμε $H \leq G$. Αν τώρα $H \leq G$, ορίζουμε στην G την σχέση

$$(g_1 \sim g_2) \Longleftrightarrow (g_2^{-1}g_1 \in H)$$

η οποία, αποδεικνύεται ότι, είναι σχέση ισοδυναμίας της G. Η κλάση ισοδυναμίας του $g \in G$ είναι το σύνολο $gH = \{gh | h \in H\}$. Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας λέγεται δείκτης

της H στην G και συμβολίζεται ως εξής $[G : H]$.

- Ισχύει, $\#G = [G : H] \cdot \#H$.

Αν X, Y υποσύνολα της ομάδας G τότε το γινόμενο των X και Y ορίζεται σαν το υποσύνολο $X \cdot Y = \{xy | x \in X, y \in Y\}$. Αν $H, K \leq G$ τότε το γινόμενο $H \cdot K$ είναι υποομάδα της G όταvν $H \cdot K = K \cdot H$.

Αν G πεπερασμένη ομάδα και $H_1, H_2 \leq G$ υποομάδες της G τότε

$$\#(H_1 \cdot H_2) = \frac{(\#H_1) \cdot (\#H_2)}{\#(H_1 \cap H_2)}.$$

Το σύνολο $H_1 g H_2 = \{h_1 g h_2 | h_1 \in H_1 \text{ και } h_2 \in H_2\}$ θα λέγεται διπλή πλευρική ομάδα των H_1 και H_2 στην G. Και οι διπλές πλευρικές ομάδες, όπως και οι απλές διαμερίζουν την ομάδα G. Επιπλέον ισχύει

$$\#(H_1 g H_2) = \frac{(\#H_1) \cdot (\#H_2)}{\#(H_1 \cap g H_2 g^{-1})} = \frac{(\#H_1) \cdot (\#H_2)}{\#(g^{-1} H_1 g \cap H_2)}.$$

Αν X υποσύνολο της G με $< X >$ θα συμβολίζουμε την τομή όλων των υποομάδων της G που περιέχουν το σύνολο X. Αν το $X = \{x\}$ θα γράφουμε $< x >$ αντί για $< X >$. Μια ομάδα G θα λέγεται <u>κυκλική</u> όταν $G =< g >$ για κάποιο $g \in G$. Κάθε τέτοιο g αυτό θα λέγεται <u>γεννήτορας</u> της G.

- Αν $G =< g >$ κυκλική ομάδα τάξης n, τότε για κάθε διαιρέτη d του n υπάρχει ακριβώς μια υποομάδα της G τάξεως d και μάλιστα αυτή είναι η $< g^{\frac{n}{d}} >$.

Μια υποομάδα H της G θα λέγεται <u>αναλλοίωτη</u> (<u>κανονική</u>) υποομάδα της G όταν $gHg^{-1} = H$ για κάθε $g \in G$ και θα συμβολίζεται $H \triangleleft G$. Αν $H \leq G$ τότε ορίζουμε την <u>κανονικοποιούσα</u> (normalizer) της H στην G,

$$N_G(H) := \{g \in G | g^{-1} H g = H\}$$

- Αποδεικνύεται ότι $H \triangleleft N_G(H)$ και μάλιστα η $N_G(H)$ είναι μέγιστη μ' αυτήν την ιδιότητα. Επομένως αν $H \triangleleft G$ τότε κατ' ανάγκη $N_G(H) = G$.

Επίσης ορίζουμε την <u>κεντροποιούσα</u> (centralizer) της H στην G,

$$Z_G(H) := \{g \in G | gh = hg, \ \forall h \in H\}.$$

- Η $Z_G(H)$ είναι υποομάδα της $N_G(H)$ αλλά η H δεν είναι υποομάδα της $Z_G(H)$ εκτός κι αν η H είναι αβελιανή.

  Στην ειδική περίπτωση $H = G$ η κεντροποιούσα $Z_G(H) := Z(G)$, λέγεται κέντρο της G.

Δύο στοιχεία $a, b \in G$ θα λέγονται συζυγή όταν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $gag^{-1} = b$. Η σχέση της συζυγίας των στοιχείων της G είναι σχέση ισοδυναμίας.
Δύο υποομάδες H_1, H_2 της G θα λέγονται συζυγείς όταν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $H_2 = gH_1g^{-1}$.

- Το πλήθος των υποομάδων της G που είναι συζυγείς προς την $H \leq G$ είναι $[G : N_G(H)]$.

  Οι παραπάνω έννοιες του κανονικοποιητή και της κεντροποιούσας ορίζονται εντελώς ανάλογα για οποιοδήποτε υποσύνολο A της G. Ειδικά, αν $A = \{a\}$, $a \in G$ τότε οι δύο έννοιες συμπίπτουν,

$$Z_G(a) = N_G(a) = \{g \in G | gag^{-1} = a\}.$$

- Η κλάση συζυγίας του $a \in G$ είναι το σύνολο $C_a := \{gag^{-1} | g \in G\}$ και επομένως

$$\#C_a = [G : Z_G(a)] = [G : N_G(a)].$$

- Αν X είναι ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων των κλάσεων συζυγίας στοιχείων της G τότε:

$$\#G = \#Z(G) + \sum_{a \in X, a \notin Z(G)} [G : Z_G(a)].$$

1.2 Ομομορφισμοί και θεωρήματα ισομορφίας

Εστω G και G' δύο ομάδες. Ενας ομομορφισμός της G στην G' είναι μια απεικόνιση $\varphi : G \to G'$ τέτοια ώστε $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ για όλα τα $g_1, g_2 \in G$. Αν φ ομομορφισμός τότε $\varphi(e) = e$ και $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Ο τετριμμένος ομομορφισμός της G στην G' είναι αυτός που στέλνει όλα τα στοιχεία της G στο μοναδιαίο της G'. Αν η φ είναι και επί τότε θα λέγεται επιμορφισμός, αν η φ είναι και ένα προς ένα τότε θα λέγεται μονομορφισμός. Αν είναι επί και ένα προς ένα τότε θα λέγεται ισομορφισμός. Η $\varphi : G \to G$ τότε λέγεται ενδομορφισμός της G και αν είναι ισομορφισμός θα λέγεται αυτομορφισμός της G. Δύο ομάδες G και G' θα λέγονται ισόμορφες ακριβώς τότε όταν υπάρχει ισομορφισμός $\varphi : G \to G'$. Η έννοια του ισομορφισμού ομάδων είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Αν $\varphi : G \to G'$ ομομορφισμός ομάδων, τότε ορίζουμε τον πυρήνα της φ

$$ker\varphi = \{g \in G | \varphi(g) = e'\}$$

και την εικόνα της φ

$$im\varphi = \{g' \in G' | \exists g \in G \ \text{ τ.ω } \ \varphi(g) = g'\}.$$

Επαληθεύεται αμέσως ότι $ker\varphi \triangleleft G$ και ότι $im\varphi \leq G'$.

- Πρώτο θεώρημα ισομορφίας
  Αν $\varphi : G \to G'$ ομομορφισμός ομάδων τότε
  $$G/ker\varphi \cong im\varphi.$$
- Δεύτερο θεώρημα ισομορφίας
  Αν $N \triangleleft G$ και $H \leq G$ τότε
  $$H \cdot N/N \cong H/H \cap N.$$
- Τρίτο θεώρημα ισομορφίας
  Αν $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$ και $K \leq H$, τότε
  $$G/H \cong (G/K)/(H/K).$$

1.3 Η συμμετρική ομάδα S_n

Εστω X ένα σύνολο. Κάθε αμφιμονοσήμαντη (ένα προς ένα και επί) απεικόνιση του X στο X θα λέγεται μια μετάθεση του X. Το σύνολο των μεταθέσεων του X θα το συμβολίζουμε με S_X. Το S_X αποτελεί ομάδα με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων.

Αν τώρα $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ για κάποιο φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ τότε η ομάδα αυτή θα λέγεται συμμετρική ομάδα βαθμού n και θα συμβολίζεται με S_n. Προφανώς η S_n είναι πεπερασμένη, τάξης $n!$. Ενα στοιχείο α της S_n θα λέγεται κύκλος μήκους r αν υπάρχουν διακεκριμένοι ακέραιοι $1 \leq a_1, \cdots, a_r \leq n$ τέτοιοι ώστε $\alpha(a_i) = a_{i+1}$ για όλα τα i, $1 \leq i \leq r$ $\alpha(a_r) = a_1$ και $\alpha(b) = b$ για όλα τα b, $1 \leq b \leq n$ που είναι διαφορετικά των a_i. Εναν τέτοιο κύκλο τον γράφουμε στην μορφή $\alpha = (a_1 a_2 \cdots a_r)$. Φυσικά ένας τέτοιος κύκλος μπορεί να γραφεί κατά r διαφορετικούς τρόπους. Θα λέμε ακόμη ότι ο κύκλος α μετακινεί τα a_i και αφήνει σταθερά τα b. Δύο κύκλοι θα λέγονται <u>ξένοι μεταξύ τους</u> όταν δεν υπάρχει αριθμός που να μετακινείται και από τους δυο κύκλους. Το <u>γινόμενο</u> δύο κύκλων $(a_1 \cdots a_r)$ και $(b_1 \cdots b_s)$ γράφεται $(a_1 \cdots a_r)(b_1 \cdots b_s)$. Αν $\alpha_i = b_j$ τότε το γινόμενο μετακινεί (στέλνει) το b_{j-1} στο a_{i+1}.

- Κάθε στοιχείο της S_n γράφεται σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους.

Μια τέτοια παράσταση της μετάθεσης θα λέγεται μια <u>ξένη ανάλυση σε κύκλους</u>. Αν έχουμε δύο τέτοιες αναλύσεις μιας δοθείσης μετάθεσης τότε αυτές θα πρέπει να έχουν κατ΄ ανάγκη τους ίδιους κύκλους αλλά πιθανόν με κάποια διαφορετική τάξη. Επομένως σε κάθε μετάθεση του S_n μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια διαμέριση του n, αυτή των μηκών των κύκλων που εμφανίζονται στην ανάλυση της μετάθεσης αυτής. Η διαμέριση αυτή λέγεται <u>δομή κύκλων</u> της α. Συνήθως παραλείπουμε τους 1-κύκλους στην ανάλυση μιας μετάθεσης α.

- Για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, δύο στοιχεία της S_n είναι συζυγή ακριβώς τότε όταν έχουν την ίδια δομή κύκλων.

Οι 2-κύκλοι λέγονται και <u>αντιμεταθέσεις</u>. Κάθε στοιχείο της S_n γράφεται σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων, όχι κατ΄ ανάγκη ξένων μεταξύ τους, κατά πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Παρά ταύτα, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο αριθμός των αντιμεταθέσεων modulo 2 παραμένει πάντοτε ο ίδιος. Επομένως μια μετάθεση θα λέγεται <u>άρτια</u> (<u>περιττή</u>) όταν γράφεται σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων άρτιου (περιττού) πλήθους. Εύκολα φαίνεται ότι το σύνολο των άρτιων μεταθέσεων αποτελεί κανονική υποομάδα της S_n η οποία θα λέγεται <u>αναλλοίωτη ομάδα βαθμού</u> n και θα συμβολίζεται με A_n.

1.4 Δράση ομάδας σε σύνολο και τα θεωρήματα του Sylow

Εστω G ομάδα και X σύνολο. Μια (αριστερή) <u>δράση της G στο</u> X θα είναι, εξ ορισμού, μια απεικόνιση

$$\begin{cases} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & gx \end{cases}$$

τέτοια ώστε $ex = x$ για κάθε $x \in X$ και $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ για κάθε $g_1, g_2 \in G$ και $x \in X$.

- Υπάρχει μια φυσική αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των δράσεων της μιας ομάδας G σε ένα σύνολο X και του συνόλου των ομομορφισμών της G στην S_X.

Αν η G δρα στο, μη-κενό σύνολο, X, τότε ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των στοιχείων του X. Αν λοιπόν $x_1, x_2 \in X$ τότε $x_1 \sim x_2$ τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $x_2 = gx_1$. Η κλάση ισοδυναμίας του x θα λέγεται <u>τροχιά</u> του x, $K_x = \{gx | g \in G\}$. Αν η G δρα στο X και έχουμε μια μόνο τροχιά, τότε το X θα λέγεται <u>ομογενής</u> <u>χώρος</u>. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε και ότι η G <u>δρα μεταβατικά επί του</u> X.
Το σύνολο $H_x = \{g \in G | gx = x\}$ είναι υποομάδα της G και λέγεται <u>ομάδα ευσταθείας</u> του $x \in X$.

- Ισχύει $\#K_x = [G : H_x]$.

- <u>Θεώρημα του Cayley</u>
  Εστω $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ μια πεπερασμένη ομάδα. Για κάθε $g \in G$ έστω $gg_i = g_{\tau(g)(i)}$ (η $\tau(g)(i)$ είναι μια μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \cdots, n\}$). Ισχύουν τα εξής:

  (i) Η $\left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S_n \\ g & \longmapsto & \tau(g) \end{array} \right.$ είναι μονομορφισμός ομάδων.

  (ii) Η $\tau(G) \leq S_n$ δρα μεταβατικά στο σύνολο $\{1, 2, \cdots, n\}$.

  (iii) Για κάθε $g \neq 1$ η $\tau(g)$ δρα στο σύνολο $\{1, 2, \cdots, n\}$ χωρίς να αφήνει κανένα στοιχείο του σταθερό, δηλαδή $\tau(g)(i) \neq i$ για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$.

Οπως έχουμε ήδη υποθέσει, η ομάδα μας G είναι πάντοτε πεπερασμένη. Εστω τώρα p ένας πρώτος αριθμός τέτοιος ώστε $p | \#G$. Ενα στοιχείο $g \in G$ θα λέγεται p-<u>στοιχείο</u> όταν η τάξη του είναι δύναμη του p. Μια ομάδα θα λέγεται <u>p-ομάδα</u> όταν η τάξη της είναι δύναμη του p. Μια υποομάδα $H \leq G$ θα λέγεται p-<u>υποομάδα της</u> G όταν η τάξη της H είναι δύναμη του p. Κάθε στοιχείο μιας p-ομάδας είναι p-στοιχείο.
Το θεμελιώδες θεώρημα των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων:

- Κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι ευθύ γινόμενο κυκλικών p-ομάδων αυτής.

Μια υποομάδα $H \leq G$ θα λέγεται Sylow p-υποομάδα της G όταν έχει τάξη $\#H = p^r$, όπου $\#G = p^r \cdot m$ και $p \not| m$. Μια υποομάδα της G θα λέγεται Sylow υποομάδα της G όταν είναι Sylow p-υποομάδα για κάποιο πρώτο διαιρέτη p του $\#G$.
Τα ακόλουθα αποτελέσματα είναι θεμελιώδη για την μελέτη των πεπεραμένων ομάδων.

- Θεωρήματα του Sylow

(i) Η G έχει τουλάχιστο μια Sylow p-υποομάδα, για κάθε $p|\#G$.

(ii) Ολες οι Sylow p-υποομάδες είναι μεταξύ τους συζυγείς.

(iii) Κάθε p-υποομάδα της G περιέχεται σε μια Sylow p-υποομάδα της.

(iv) Το πλήθος των Sylow p-υποομάδων της G είναι ισοδύναμο προς το $1 mod p$ και διαιρεί το $m = \frac{\#G}{p^r}$, (όπου $p \not| m$).

Αμεση συνέπεια των θεωρημάτων του Sylow είναι το

- Θεώρημα του Cauchy
  Η G έχει πάντα ένα στοιχείο τάξης p.

1.5 Επιλύσιμες ομάδες

Μια ομάδα G θα λέγεται απλή, όταν οι μόνες κανονικές υποομάδες της είναι η $\{e\}$ και η G.

Κατ' αρχήν ορίζουμε την ομάδα μεταθετών μιας ομάδας G, σαν την υποομάδα της που παράγεται από τους μεταθέτες των στοιχείων της, δηλαδή

$$[G, G] = < \{[g_1, g_2] | g_1, g_2 \in G\} > .$$

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 3$ η ομάδα μεταθετών της S_n είναι η A_n. Η $[G, G]$ είναι κανονική υποομάδα της G και μάλιστα με την ιδιότητα:

- Αν $N \lhd G$ τότε G/N αβελιανή τότε και μόνο τότε όταν $[G, G] \leq N$.

Μπορούμε στην συνέχεια να δημιουργήσουμε μια ακολουθία υποομάδων της G :

$$M^0(G) = G,\ M^1(G) = [G,G],\ M^2(G) = [M^1(G), M^2(G)], \cdots, M^n(G) = [M^{n-1}(G), M^{n-1}(G)], \cdots$$

Σχηματίζουμε κατ΄ αυτόν τον τρόπο μια ακολουθία υποομάδων

$$G = M^0(G) \triangleright M^1(G) \triangleright \cdots \triangleright M^n(G) \triangleright \cdots$$

υποομάδων της G κάθε μια της οποίας είναι αναλλοίωτος της προηγούμενης και $M^n(G)/M^{n-1}(G)$ είναι αβελιανή.

Μια $(n+1)$-άδα $(G_0, G_1, \cdots, G_n)$ της G θα λέγεται <u>κανονική</u> <u>σειρά</u> (μήκους n) της G όταν:

(i) $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = \{e\}$

(ii) $G_{i+1} \leq G_i$ για κάθε i, $0 \leq i \leq n-1$.

Οι ομάδες πηλίκων G_i/G_{i+1} λέγονται <u>παράγοντες</u> της σειράς.

- Η ύπαρξη <u>κανονικής</u> <u>σειράς</u> με <u>αβελιανούς</u> παράγοντες μιας ομάδας G είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη φυσικού αριθμού $n \in \mathbb{N}$ τέτοιου ώστε: $M^n(G) = \{e\}$.

Η ομάδα G θα λέγεται <u>επιλύσιμη</u> όταν έχει κανονική σειρά με αβελιανούς παράγοντες.

- Αν G επιλύσιμη και $H \leq G$, τότε και η H είναι επιλύσιμη.
- Αν G επιλύσιμη και $N \triangleleft G$ τότε και η G/N είναι επιλύσιμη.
- Αν $N \triangleleft G$ και τόσο η N όσο και η G/N είναι επιλύσιμες τότε και η G είναι επιλύσιμη.
- Αν η G έχει μια κανονική σειρά τότε αυτή είναι επιλύσιμη ακριβώς τότε όταν όλοι οι (αβελιανοί) της παράγοντες έχουν τάξη πρώτο αριθμό.

  Αμεση συνέπεια της τελευταίας πρότασης είναι:
- Κάθε πεπεραμένη p-ομάδα είναι επιλύσιμη.

<u>Σημείωση</u> Αποδείξεις των προτάσεων θεωρίας ομάδων που αναφέρονται μπορεί να βρεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης σε κάθε, σχεδόν, βιβλίο θεωρίας ομάδων. Ιδιαίτερα θε συνιστούσαμε το βιβλίο των Alperin και Bell (δες, βιβλιογραφία)

2. Διανυσματικοί χώροι

Εστω K ένα σώμα και V ένας K-διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι συγχρόνως και δακτύλιος με μοναδιαίο. Αν για κάθε $v, w \in V$ και κάθε $a \in K$ ισχύει:

$$(av)w = a(vw) = v(aw)$$

τότε λέμε ότι ο V είναι μια K-<u>άλγεβρα</u>.

Εστω τώρα V και W δύο K-διανυσματικοί χώροι <u>πεπερασμένης</u> διάστασης. Το σύνολο των K-ομομορφισμών του V στον W γίνεται κατά φυσιολογικό τρόπο ένας K-διανυσματικός χώρος ο οποίος θα συμβολίζεται με: $Hom_K(V, W)$.
Στην ειδική περίπτωση που $V = W$ ο K-διανυσματικός χώρος $End_K(V) := Hom_K(V, V)$ είναι και <u>δακτύλιος</u> με μοναδιαίο με πράξη την σύνθεση ενδομορφισμών και μάλιστα μια K-<u>άλγεβρα</u>.

Η ομάδα των μονάδων του δακτυλίου $End_K(V)$ ταυτίζεται με την ομάδα των K-αυτομορφισμών του V και θα συμβολίζεται με $GL(V)$.

Εστω τώρα ότι $dim_K V = m$ και $dim_K W = n$. Τότε ο K-διανυσματικός χώρος $Hom_K(V, W)$ είναι ισόμορφος προς τον K-διανυσματικό χώρο των $n \times m$-πινάκων $M_{n,m}(K)$.
Η ισομορφία αυτή δίνεται ως εξής:
Εστω $\underline{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$ και $\underline{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ οποιεσδήποτε βάσεις των V και W αντίστοιχα. Ο ισομορφισμός δίνεται από την:

$$\Phi_{\underline{v},\underline{w}} : \begin{cases} Hom_K(V, W) & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & M_{n,m}(K) \\ f & \longmapsto & A(f) = [a_{ij}]_{i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m} \end{cases},$$

όπου $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$.

Εστω τώρα U, V, W τρείς K-διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και οι K-ομομορφισμοί $g : U \to V$ και $f : V \to W$. Αν $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ είναι βάσεις των U, V, W αντίστοιχα, τότε ισχύει:

$$\Phi_{\underline{u},\underline{w}}(f \circ g) = \Phi_{\underline{v},\underline{w}}(f) \cdot \phi_{\underline{u},\underline{v}}(g)$$

Αν πάλι $V = W$ με $dim_K V = n$, τότε η παραπάνω απεικόνιση

$$\Phi_{\underline{v},\underline{v}} : End_K(V) \longrightarrow M_n(K)$$

είναι όχι μόνο ισομορφισμός K-διανυσματικών χώρων αλλά και δακτυλίων και μάλιστα ισομορφισμός K-αλγεβρών. Επομένως η ομάδα των μονάδων του $End_K(V)$ απεικονίζεται ισόμορφα στην μονάδα των μονάδων του δακτυλίου των $n \times n$ πινάκων $M_n(K)$, $GL_n(K)$, δηλαδή η $\Phi_{\underline{v}}$:

$$\Phi_{\underline{v}} : GL(V) \xrightarrow{\cong} GL_n(K)$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

3. Θεωρία του Galois

3.1 Γενικότητες

Εστω K σώμα. Αν υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $na = 0$ για κάθε $a \in K$ τότε ο ελάχιστος φυσικός αριθμός μ' αυτή την ιδιότητα, ο οποίος κατ' ανάγκη θα είναι πρώτος αριθμός, θα λέγεται χαρακτηριστική του σώματος K. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός θα λέμε ότι το σώμα είναι χαρακτηριστικής μηδέν. Κάθε σώμα χαρακτηριστικής μηδέν περιέχει (ισόμορφα) το σώμα των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ ενώ κάθε σώμα χαρακτηριστικής p (p πρώτος αριθμός) περιέχει σαν υπόσωμα το πεπερασμένο σώμα των p-στοιχείων $\mathbb{F}_p$.

Αν το σώμα L περιέχει σαν υπόσωμα το σώμα K τότε θα λέμε ότι το L είναι επέκταση του K και θα το συμβολίζουμε L/K. Αν το σώμα L είναι επέκταση του σώματος K τότε το L είναι ένας K-διανυσματικός χώρος. Την διάσταση του L σαν K-διανυσματικό χώρο θα την λέμε βαθμό της επέκτασης L/K.

Δίνεται μια επέκταση L/K. Ενα στοιχείο a του L θα λέγεται αλγεβρικό ως προς το K όταν υπάρχει πολυώνυμο $f(x) \neq 0$ με συντελεστές από το σώμα K το οποίο να έχει το a σαν ρίζα. Η επέκταση L/K θα λέγεται αλγεβρική όταν κάθε στοιχείο a του L είναι αλγεβρικό ως προς το K.

- Κάθε πεπερασμένη (πεπερασμένου βαθμού) επέκταση L/K είναι, κατ' ανάγκη, αλγεβρική.

Αν τώρα L/K μια επέκταση σωμάτων και $a_1, a_2, \cdots, a_n \in L$ με $K(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ θα συμβολίζουμε το ελάχιστο υπόσωμα που περιέχει το K και τα $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Θα λέμε ότι είναι το σώμα που προκύπτει από K με επισύναψη των $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

- Αν τα στοιχεία $a_1, a_2, \cdots, a_n$ του L είναι αλγεβρικά στοιχεία ως προς το K τότε το

$$K(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \{f(a_1, a_2, \cdots, a_n) | f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in K[X_1, X_2, \cdots, X_n]\}$$

- Αν L μια επέκταση του σώματος K και a ένα αλγεβρικό στοιχείο ως προς το K, τότε ισχύει $[K(a) : K] = degIrr(a, K)$, όπου $Irr(a, K)$ το ανάγωγο πολυώνυμο του a ως προς το K.

Μια επέκταση L/K θα λέγεται σώμα αναλύσεως του πολυωνύμου $f(X) \in K[X]$ ως προς το K, αν το $f(X)$ αναλύεται πλήρως στον δακτύλιο $L[X]$, δηλαδή αν

$$f(X) = \alpha(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_n)$$

και επιπλέον ισχύει $L = K(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

- Για κάθε πολυώνυμο $f(X)$ με συντελεστές από ένα σώμα K υπάρχει ένα σώμα αναλύσεως του $f(X)$ ως προς το K και μάλιστα είναι (modulo ισομορφία) μοναδικό.

Η επέκταση L/K θα λέγεται επέκταση του Galois όταν υπάρχει μια πεπερασμένη ομάδα αυτομορφισμών του L που έχει σαν σώμα σταθερών στοιχείων το K. (Σώμα σταθερών στοιχείων μιας ομάδας αυτομορφισμών ενός σώματος L είναι τα υπόσωμα του L του οποίου τα στοιχεία παραμένουν σταθερά ως προς όλα τα στοιχεία της ομάδας.)

- Αν L/K επέκταση του Galois και $G(L/K)$ η ομάδα του Galois της επέκτασης αυτής, τότε υπάρχει ένας αντιισομορφισμός μεταξύ των υποομάδων της G και των ενδιάμεσων σωμάτων F, $\ K \subseteq F \subseteq L$.

- Αν L/K επέκταση του Galois και F σώμα, $K \subseteq F \subseteq L$ τότε η L/F είναι πάντοτε επέκταση του Galois ενώ η F/K είναι επέκταση του Galois ακριβώς τότε όταν η ομάδα H των σταθερών στοιχείων του F είναι κανονική υποομάδα της G.

Ενα πολυώνυμο $f(X)$ με συντελεστές από το σώμα K θα λέγεται διαχωρίσιμο ως προς το K όταν υπάρχει μια επέκταση L του K τέτοια ώστε κάθε ανάγωγος παράγοντας του $f(X)$ στον δακτύλιο $K[X]$ αναλύεται στον δακτύλιο $L[X]$ σε γινόμενο διαφόρων μεταξύ τους παραγόντων πρώτου βαθμού.

- Η επέκταση L/K είναι επέκταση του Galois ακριβώς τότε όταν το L είναι σώμα αναλύσεως ενός διαχωρισίμου ως προς το K πολυωνύμου $f(X) \in K[X]$.

  Μια επέκταση L του σώματος K θα λέγεται κανονική επέκταση του K αν είναι αλγεβρική και επί πλέον κάθε ανάγωγο πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα K το οποίο έχει μια ρίζα στο L, έχει όλες του τις ρίζες στο L.

- Η επέκταση L/K είναι κανονική επέκταση του K ακριβώς τότε όταν το L είναι σώμα αναλύσεως ως προς το K κάποιου πολυωνύμου $f(X) \in K[X]$ (Συνεπώς κάθε επέκταση του Galois είναι κανονική).

Ενα στοιχείο a της επεκτάσης L του σώματος K θα καλείται διαχωρίσιμο ως προς το K όταν υπάρχει ένα διαχωρίσιμο ως προς το K πολυώνυμο $f(X) \in K[X]$ του οποίου το a είναι ρίζα. Η επέκταση L/K θα λέγεται διαχωρίσιμη, αν κάθε στοιχείο του L είναι διαχωρίσιμο ως υπέρ το K.

- Κάθε αλγεβρική επέκταση L του σώματος K χαρακτηριστικής μηδέν είναι διαχωρίσιμη ως προς το K.
- Κάθε επέκταση του Galois L του σώματος K είναι διαχωρίσιμη ως προς το K.
- Αν L είναι μια πεπερασμένη και κανονική επέκταση του σώματος K χαρακτηριστικής μηδέν τότε η επέκταση L/K είναι επέκταση του Galois.

Η επέκταση L του σώματος K θα λέγεται απλή όταν υπάρχει ένα στοιχείο $\theta \in L$ τέτοιο ώστε $L = K(\theta)$. Αν το θ είναι αλγεβρικό ως προς το K τότε η επέκταση L/K θα λέγεται απλή αλγεβρική.

- Κάθε πεπερασμένη και διαχωρίσιμη επέκταση L του σώματος K είναι απλή αλγεβρική και, επομένως, κάθε πεπερσμένη επέκταση L του σώματος K χαρακτηριστικής μηδέν είναι απλή αλγεβρική.

3.2 Οι ρίζες της μονάδας

Εστω K σώμα, n ένας φυσικός αριθμός και το πολυώνυμο $X^n - 1 \in K[X]$. Οι ρίζες του πολυωνύμου αυτού σε μια επέκταση του σώματος K θα λέγονται ρίζες της μονάδας. Ενα σώμα αναλύσεως L του πολυωνύμου $X^n - 1$ ως προς το K λέγεται σώμα των n-ριζών της μονάδας. Αν $K = \mathbb{Q}$ τότε το L λέγεται n-οστό κυκλοτομικό σώμα.

- Αν η χαρακτηριστική του σώματος K είναι μηδέν ή $chK \not| n$ τότε οι ρίζες $\zeta_1, \zeta_2 \cdots, \zeta_n$ του πολυωνύμου $X^n - 1 \in K[X]$ σε ένα σώμα αναλύσεως L του $X^n - 1$ ως προς το K αποτελούν κυκλική πολλαπλασιαστική ομάδα.

Μια n-ρίζα της μονάδας της οποίας η τάξη είναι ακριβώς n (γεννήτορας της ομάδας) λέγεται πρωταρχική n-ρίζα της μονάδας. Είναι γνωστό (δες παράρτημα θεωρίας ομάδων) ότι αν ζ πρωταρχική n-ρίζα της μονάδας τότε η δύναμη ζ^λ $(\lambda = 1, 2, \cdots, n-1)$ είναι πρωταρχική n-ρίζα της μονάδας ακριβώς τότε όταν οι αριθμοί λ, n είναι πρώτοι μεταξύ τους. Το πλήθος των

πρωταρχικών n-ριζών της μονάδας είναι ίσο με το πλήθος των πρώτων κλάσεων υπολοίπων $mod n$ και δίνεται από την γνωστή, από την στοιχειώδη αριθμοθεωρία, συνάρτηση του Euler $\varphi(n)$.
Αν τώρα ζ μια πρωταρχική n-ρίζα της μονάδας ω προς το σώμα K τότε το πολυώνυμο

$$\Phi_n(X) = \prod_{0<\lambda<n,(\lambda,n)=1} (X - \zeta^\lambda) \in K[X]$$

έχει βαθμό $\varphi(n)$.

- Αν η χαρακτηριστική του σώματος K είναι μηδέν τοτε το $\Phi_n(X)$ έχει ακέραιους συντελεστές με συντελεστή μεγαλύτερης δύναμης του X ένα και είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $K[X]$.

- Αν K σώμα χαρακτηριστικής μηδέν ή $chk \not| n$ και L ένα σώμα αναλύσεως ως προς το K του πολυωνύμου $X^n - 1 \in K[X]$ και ζ μια πρωταρχική n-ρίζα της μονάδας στο L, τότε

  (i) $L = K(\zeta)$.

  (ii) Η επέκταση $K(\zeta)/K$ είναι επέκταση του Galois.

  (iii) Η ομάδα Galois της επεκτάσεως $K(\zeta)/K$ είναι ισόμορφη προς μια υποομάδα της ομάδας των πρώτων κλάσεων υπολοίπων modulo n.

  (iv) Ο $[K(\zeta) : K]$ διαιρεί το $\varphi(n)$.

Αμεση συνέπεια του τελευταίου θεωρήματος είναι η πρόταση:

- Αν ζ μια πρωταρχική n-ρίζα του πολυωνύμου $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ τότε $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$ και η ομάδα Galois της επεκτάσεως $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ είναι ισόμορφη προς την ομάδα των πρώτων κλάσεων υπολοίπων modulo n (η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων (μονάδων) του δακτυλίου $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

Σημείωση: Βιβλίο θεωρίας Galois θα συνιστούσαμε το βιβλίο του Κ. Λάκκη, Αλγεβρα.

4. Ακέραιοι Αλγεβρικοί

4.1 Ακεραιότητα

Ενας μιγαδικός αριθμός α θα λέγεται ακέραιος αλγεβρικός όταν υπάρχει ένα πολυώνυμο $f(X)$ με συντελεστές ακεραίους και συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου του ένα, τέτοιο ώστε $f(\alpha) = 0$.

- Ο μιγαδικός αριθμός α είναι ακέραιος αλγεβρικός ακριβώς τότε όταν η προσθετική ομάδα (ή $\mathbb{Z}$-module!) που παράγεται από τις δυνάμεις του α, $1, \alpha, \alpha^2, \cdots$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

- Το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών $\tilde{\mathbb{Q}}$ αποτελεί υπόσωμα του σώματος των μιγαδικών αριθμών. Το σύνολο όλων των ακεραίων αλγεβρικών $\tilde{\mathbb{Z}}$ αποτελεί υποδακτύλιο του σώματος $\tilde{\mathbb{Q}}$.

- Ο αλγεβρικός αριθμός $\alpha \in \tilde{\mathbb{Q}}$ είναι ακέραιος αλγεβρικός αριθμός ακριβώς τότε όταν το ανάγωγο πολυώνυμο του α ως προς το $\mathbb{Q}$ έχει συντελεστές στο $\mathbb{Z}$.
  Επομένως $\mathbb{Q} \cap \tilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

4.2 Norm και ίχνος

Ενα σώμα K ($K \subseteq \mathbb{C}$) θα λέγεται αλγεβρικό σώμα αριθμών όταν η επέκταση $K/\mathbb{Q}$ είναι πεπερασμένη. Επομένως αν K αλγεβρικό σώμα αριθμών τότε η επέκταση $K/\mathbb{Q}$ θα είναι αλγεβρική και, επειδή $char\mathbb{Q} = 0$, θα είναι και διαχωρίσιμη.
Η επέκταση $K/\mathbb{Q}$ είναι πεπερασμένη και διαχωρίσιμη. Αρα είναι απλή, δηλαδή υπάρχει ένα στοιχείο $\theta \in K$ τέτοιο ώστε $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Αφού θ διαχωρίσιμο υπέρ το $\mathbb{Q}$ έπεται ότι το ανάγωγο πολυώνυμο του θ υπέρ το $\mathbb{Q}$ έχει όλες τις ρίζες του απλές.
Αν $\tilde{\mathbb{Q}}$ είναι το σώμα όλων των αλγεβρικών αριθμών (η αλγεβρική θήκη του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{C}$) τότε προφανώς $K \subseteq \tilde{\mathbb{Q}}$.
Κάθε μονομορφισμός σωμάτων $\sigma : K \hookrightarrow \tilde{\mathbb{Q}}$ τέτοιος ώστε ο περιορισμός του στο $\mathbb{Q}$ να είναι ταυτότητα στο $\mathbb{Q}$ θα λέγεται εμφύτευση της $K/\mathbb{Q}$ (στο $\tilde{\mathbb{Q}}$).

- Υπάρχουν n ακριβώς $n := [K : \mathbb{Q}]$ εμφυτεύσεις της $K/\mathbb{Q}$ στο $\tilde{\mathbb{Q}}$. Οι εικόνες ενός στοιχείου α του K μέσω των εμφυτεύσεων της $K/\mathbb{Q}$ λέγονται συζυγή στοιχεία του α.

Το σύνολο $B = \{1, \theta, \cdots, \theta^{n-1}\}$ είναι μια βάση της επέκτασης $K/\mathbb{Q}$. Αν λοιπόν $\alpha \in L$ τότε υπάρχουν $a_{ji} \in \mathbb{Q}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ τέτοιοι ώστε

$$\alpha\theta^i = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ji}\theta^j \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Ο πίνακας $A(\alpha) := (a_{ji}) \in M_n(\mathbb{Q})$ θα λέγεται πίνακας παράστασης του α.

Norm του α ως προς την επέκταση $K/\mathbb{Q}$ ορίζεται να είναι η τιμή της ορίζουσας του $A(\alpha)$, $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) := det A(\alpha)$.

Σαν ίχνος του α ως προς την επέκταση $K/\mathbb{Q}$ ορίζεται το ίχνος του πίνακα $A(\alpha)$.

- Προφανώς $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Q}$ και μάλιστα

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0.$$

Επειδή επί πλέον η norm είναι και πολλαπλασιαστική, έπεται ότι η απεικόνιση

$$N_{K/\mathbb{Q}} : K^* \longrightarrow \mathbb{Q}^*$$

είναι ομομορφισμός ομάδων.

Αν $\alpha \in K$ τότε $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha)$ όπου σ_i οι εμφυτεύεις της $K/\mathbb{Q}$ στο $\tilde{\mathbb{Q}}$.

Σημείωση: Εδώ θα συνιστούσαμε στον ενδιαφερόμενο αναγνώστη τις σημειώσεις του συγγραφέα του παρόντος βιβλίου με τίτλο «Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών Ι».

7 Βιβλιογραφία

Α. Βιβλία

[A-B] Alperin J. L., Bell R. B., Groups and Representations,
Springer-Verlag, New York 1995.

Ενα θαυμάσιο κατά τη γνώμη μου βιβλίο. Παρά το ότι είναι μεταπτυχιακού επιπέδου θα μπορούσε, να διαβαστεί και από προπτυχιακούς φοιτητές. Διαφέρει από όλα τα βιβλία θεωρίας παραστάσεων κατά το ότι σημαντικό μέρος του βιβλίου καλύπτεται από την θεωρία ομάδων και στην συνέχεια ασχολείται με θεωρία παραστάσεων.

[Buh] Buhler J. P., Icosahedral Galois Representations,
LNM 654, Springer-Verlag, Berlin 1978.

Σημαντική δουλειά σε μια περιοχή της θεωρίας αριθμών.

[Bur] Burrow M., Representation Theory of Finite Groups,
Academic Press, New York 1965.

[Co] Collins M. J., Representations and characters of Finite Groups,
Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[C-R 1] Curtis C. W., Reiner Ir., Methods of Representation Theory with applications to finite Groups and Orders,
Volume I, II, John Wiley and Sons, New York 1981.

Το πιο περιεκτικό βιβλίο θεωρίας παραστάσεων. Καλύπτει την ανάπτυξη της θεωρίας μέχρι το έτος έκδοσής του.

[C-R 2] Curtis C. W., Reiner Ir., Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, John Wiley and Sons, New York 1962. Πάρα πολύ καλογραμμένο περιεκτικό και αυτοτελές βιβλίο. Περιέχει σχεδόν όλες τις γνώσεις στη θεωρία παραστάσεων μέχρι την εποχή της έκδοσής του. Για δεκαετίες ήταν το κύριο βιβλίο αναφοράς των ειδικών στην περιοχή.

[Dor] Dornhoff L., Group Representation Theory, Part A, Ordinary Representation Theory, Marcell Dekker, New York, 1971. Πάρα πολύ καλό και περιεκτικό βιβλίο (υπάρχει και Part B) γραμμένο σε κάπως συνοπτικό τρόπο. Μεταπτυχιακού επιπέδου.

[Fe1] Feit W., Characters of Finite Groups, Benjamin W. A., New York 1967.

[Fe2] Feit W., The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland, Amsterdam 1982.

[F-H] Fulton W., Harris J., Representation Theory, A First Course, Springer Verlag, New York 1991. Αχολείται με την θεωρία των παραστάσεων (πεπερασμένης διάστασης) ομάδων και αλγεβρών Lie. Αρκετά περιεκτικό βιβλίο μεταπτυχιακού επιπέδου.

[Go] Gorenstein D., Finite Groups, Chelsea Publishing Company, New York 1980.

[Ha] Hall M., The Theory of Groups, Mackmillan Company, New York 1959.

[Hi] Hill V. E., Groups, Representations and Chracters, Hafner Press, New York 1975.

Στοιχειώδες βιβλίο προπτυχιακού επιπέδου. Απευθύνεται και σε επιστήμονες συναφών προς τα μαθηματικά επιστημών, όπως χημεία, φυσική, βιολογία.

[Hu] Huppert B., Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Berlin 1967.

[Is] Isaacs M. I., Character Theory of Finite Groups, Academic Press, New York 1976. Πρόκειται για ένα πάρα πολύ καλογραμμένο και περιεκτικό βιβλίο.

[Ja] Jacobson N., Basic Algebra ii, Second edition, W. H. Freeman and Company, New York 1985.

Με την θεωρία παραστάσεων ασχολείται το 5^o κεφάλαιο. Περιέχει συνοπτικά όλες τις βασικές έννοιες. Από πλευράς περιεχομένου συμπτίπτει περίπου με τις παρούσες σημειώσεις.

[Ke] Keown R., An introduction to group representation theory, Academic Press, London 1975.

[Ky] Kyrillov A. A., Elements of the theory of representations, Springer-Verlag, New York 1975.

[La] Lang S., Algebra, Addison-Wisley, Reading, Mass., 1993.

[Le] Ledermann W., Indroduction to group characters, Cambridge University Press, Cambridge 1977. Στοιχειώδης προπτυχιακού επιπέδου εισαγωγή στο θέμα.

[Mü] Müller W., Darstellungstheorie von endlichen Gruppen, B. G. Teubner, Stuttgart 1980. Αρκετά καλό βιβλίο. Περιέχει τόσο την κλασσική όσο και την modular θεωρία παραστάσεων με ιδιαίτερη αναφορά στην συμμετρική ομάδα.

[Se] Serre J.-P., Linear Representations of Finite Groups, Springer-Verlag, New York 1977.
Τα βιβλία του Serre δεν χρεάζονται συστάσεις. Είναι όλα τους θαυμάσια. Οι παρούσες σημειώσεις χρωστούν πολλά στο βιβλίο του Serre. Η αγγλική έκδοση αποτελεί μετάφραση της δεύτερης, γαλλικής έκδοσης. Υπάρχει μετάφραση και στα γερμανικά.

[Ving] Vingberg E. B., Linear Representations of Groups, Birkhäuser, Basel 1989. Μετάφραση από τα Ρωσικά. Περιέχει βασικές γνώσεις της θεωρίας παραστάσεων πεπερασμένων και συμπαγών ομάδων με πολλά παραδείγματα και ασκήσεις.

B. Σημειώσεις

[Be] Benz H., Darstellungstheorie endlicher Gruppen, παραδόσεις, Πανεπιστημίο της Κολωνίας, χειμερινό εξάμηνο 1980/81.

[Ca] Carter R., Representations of Groups, Warwick 1983, (Σημειώσεις Αλ. Φακιολά).

[Δε] Δεριζιώτη Δ., Παραστάσεις πεπερασμένων ομάδων, Σεμινάριο, Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, Ηράκλειο 1984.

[Kli] Klingen N., Darstellungstheorie, παραδόσεις, Πανεπιστημίο της Κολωνίας, εαρινό εξάμηνο 1978.