ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΚΑΙ ΜΗ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
(Απαντήσεις Θεμάτων Σεπτεμβρίου)

ΘΕΜΑ 1ο. Δυϊκή μέθοδος Simplex στο M-διαταραγμένο πρόβλημα .....

ΘΕΜΑ 2ο. Στά παρακάτω $r = r(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.
Η κλίση τής αντικειμενικής συνάρτησης είναι 0 όταν:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 e^{-r}(cos(r) + sin(r)) = 0$$
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_2 e^{-r}(cos(r) + sin(r)) = 0$$

απ΄ όπου έπεται ότι, σύνολο τών κρίσιμων σημείων της είναι τό:

$$K = \{(0,0)\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\exists \lambda \in \mathbb{N}^*) \;\; x_1^2 + x_2^2 = \lambda\pi - \tfrac{\pi}{4}\}$$

Εξετάζοντας την Εσσιανή τής f στο τυχαίο σημείο $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, βλέπουμε ότι:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} e^{-r}(2cos(r) - 8x_1^2 sin(r) & -8x_1x_2e^{-r}sin(r) \\ -8x_1x_2e^{-r}sin(r) & e^{-r}(2cos(r) - 8x_2^2 sin(r)) \end{pmatrix}$$

οπότε οι άνω αριστερά τετραγωνικοί υποπίνακες τής $Hf(x)$, έχουν ορίζουσες D_1, D_2 ομόσημες με τούς $2cos(r) - 8x_1^2 sin(r)$ και $4cos^2(r) - 16r\; cos(r)\; sin(r)$ αντίστοιχα.
Ειδικώτερα για τα σημεία τού K, οι ορίζουσες αυτές είναι ομόσημες με τούς:
(Γιά $x_1 = x_2 = 0$) 2 και 4 αντίστοιχα, οπότε η $Hf(0)$ είναι θετικά ορισμένη.
(Γιά $r = \lambda\pi - \frac{\pi}{4},\ \lambda \in \mathbb{N}^*$) $(2 + 8x_1^2)cos(r)$ και $(4 + 16r)cos^2(r)$ αντίστοιχα, δηλαδή η πρώτη είναι ομόσημη με το $(-1)^\lambda$ ενώ η δεύτερη είναι πάντα θετική, οπότε η $Hf(x)$ είναι θετικά ορισμένη για λ άρτιο και αρνητικά ορισμένη για λ περιττό.
Συνολικά συμπεραίνουμε ότι το K διαμερίζεται στα εξής υποσύνολα τοπικού Ελαχίστου και Μεγίστου:

$$E = \{(0,0)\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\exists \lambda \in \mathbb{N}^*) \;\; x_1^2 + x_2^2 = 2\lambda\pi - \tfrac{\pi}{4}\}$$
$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\exists \lambda \in \mathbb{N}^*) \;\; x_1^2 + x_2^2 = (2\lambda - 1)\pi - \tfrac{\pi}{4}\}$$

Απομένει να δούμε σε ποιά από τα σημεία τού M η αντικειμενικής συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
Η τιμή τής αντικειμενικής συνάρτησης στα σημεία τού M είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-r}$ οπότε, επειδή η e^{-r} είναι φθίνουσα συνάρτηση συμπεραίνουμε ότι τα ζητούμενα σημεία ολικού μεγίστου είναι εκείνα τα στοιχεία τού M που έχουν το μικρότερο δυνατό r, δηλαδή τα στοιχεία τού σύνολου $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 = \pi - \frac{\pi}{4}\}$.

ΘΕΜΑ 3ο. Εδώ έχουμε Π.Μ.Γ.Π. με συνάρτηση ισοτικού περιορισμού τήν

$$h(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$$

οπότε, η συνάρτηση *Lagrange* αυτού τού προβλήματος είναι η:

$$L(x,y,\lambda) = \ln(x^2+y^2) - \lambda(\ \frac{x^2}{4} + y^2 - 1)$$

με στάσιμα σημεία τα $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\lambda})^T \in \mathbb{R}^3$ γιά τα οποία $\nabla L(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\lambda}) = 0$, δηλαδή:

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial L}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\lambda}) = 2\tilde{x}/(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2) - \tilde{\lambda}\tilde{x}/2 & = 0 \Leftrightarrow & \tilde{x} = 0 \ \vee \ \tilde{\lambda} = 4/(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2) \\
\frac{\partial L}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\lambda}) = 2\tilde{y}/(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2) - 2\tilde{\lambda}\tilde{y} & = 0 \Leftrightarrow & \tilde{y} = 0 \ \vee \ \tilde{\lambda} = 1/(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2) \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\lambda}) = -(\ \frac{\tilde{x}^2}{4} + \tilde{y}^2 - 1) & = 0 \Leftrightarrow & \frac{\tilde{x}^2}{4} + \tilde{y}^2 - 1 = 0
\end{array}$$

Από τον ορισμό τής αντικειμενικής συνάρτησης (ή από την τρίτη σχέση) πρέπει να εξαιρέσουμε την περίπτωση $\tilde{x},\tilde{y} = 0$, και λόγω τής σύζευξης τών δύο πρώτων σχέσεων τήν περίπτωση $\tilde{x},\tilde{y} \neq 0$. Ειδικώτερα, για $\tilde{x} = 0$ η τρίτη και δεύτερη σχέση δίνουν αντίστοιχα $\tilde{y} = \pm 1, \tilde{\lambda} = 1$, ενώ για $\tilde{y} = 0$ η τρίτη και πρώτη σχέση δίνουν αντίστοιχα $\tilde{x} = \pm 2, \tilde{\lambda} = 1$. Συνολικά, σύνολο σημείων στασιμότητος τής L είναι το $K = \{(0,\pm 1,1),(\pm 2,0,1)\}$.
Κατά συνέπεια, άν $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\lambda})^T$ είναι κάποιο απο τα 4 σημεία τού K, τότε επειδή

$$\nabla h(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tfrac{\tilde{x}}{2},\ 2\tilde{y})^T \ \ (\neq (0,0)^T)$$

έπεται ότι τό $(\tilde{x},\tilde{y})$ είναι κανονικό σημείο τής υπερεπιφάνειας

$$F = \{z \in \mathbb{R}^2 : h(z) = 0\}$$

οπότε, ο εφαπτόμενος χώρος $M^F_{(\tilde{x},\tilde{y})}$ τής F στο $(\tilde{x},\tilde{y})$ δίνεται διά:

$$M^F_{(\tilde{x},\tilde{y})} = \{z \in \mathbb{R}^2 :\ \nabla h(\tilde{x},\tilde{y})^T \cdot z = 0\} = \left\langle \begin{array}{l} \{(z,0) : z \in \mathbb{R}\},\ \text{άν } (\tilde{x},\tilde{y}) = (0,\pm 1) \\ \{(0,z) : z \in \mathbb{R}\},\ \text{άν } (\tilde{x},\tilde{y}) = (\pm 2,0) \end{array}\right.$$

Απομένει να διαπιστώσουμε άν ο περιορισμός τής L στο $F \times \{\tilde{\lambda}\}$ παρουσιάζει μέγιστο στό $(\tilde{x},\tilde{y})$, δηλαδή άν είναι αρνητικά ορισμένος ο πίνακας $HL(x,y;\tilde{\lambda})|_{(x,y)=(\tilde{x},\tilde{y})}$ στον εφαπτόμενο χώρο $M^F_{(\tilde{x},\tilde{y})}$, ήτοι άν

$$(\forall z \in M^F_{(\tilde{x},\tilde{y})} - \{0\}) \quad z^T \cdot HL(x,y;\tilde{\lambda})|_{(x,y)=(\tilde{x},\tilde{y})} \cdot z < 0$$

Όμως,

$$HL(x,y;\tilde{\lambda})|_{(x,y)=(\tilde{x},\tilde{y})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(x,y,1)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 L(x,y,1)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 L(x,y,1)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L(x,y,1)}{\partial^2 y} \end{pmatrix}|_{(x,y)=(\tilde{x},\tilde{y})} = \begin{pmatrix} \frac{2(\tilde{y}^2-\tilde{x}^2)}{(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)^2} - \frac{1}{2} & \frac{-4\tilde{x}\tilde{y}}{(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)^2} \\ \frac{-4\tilde{x}\tilde{y}}{(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)^2} & \frac{2(\tilde{x}^2-\tilde{y}^2)}{(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)^2} - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ άν } (\tilde{x},\tilde{y}) = (0,\pm 1), \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \text{ άν } (\tilde{x},\tilde{y}) = (\pm 2,0)$$

οπότε, αναλόγως τών τιμών τών $(\tilde{x},\ \tilde{y})$, διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

$(0,\pm 1)$: $\quad (\forall z \in \mathbb{R} - \{0\}) \ \ (z,0) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}z^2 > 0$ (απορίπτονται).

$(\pm 2,0)$: $\quad (\forall z \in \mathbb{R} - \{0\}) \ \ (0,z) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}z^2 < 0$ (εγκρίνονται).

Σε οποιοδήποτε απο τα σημεία $(\pm 2,0)$, η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τήν τιμή $2\ln 2$ οπότε και τα δύο είναι σημεία ολικού μεγίστου τής αντικειμενικής συνάρτησης στο F και άρα βέλτιστες λύσεις τού Π.Μ.Γ.Π.

ΘΕΜΑ 4ο. Το πρόβλημα είναι κυρτό, γιατί:

a) Η αντικειμενική συνάρτηση $f(x_1,x_2) = -5x_1^2 - 5x_2^2 + 10x_1 + 20x_2 - 21$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}^2$ (αφού, για κάθε $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, η Εσσιανή της $Hf(x) = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$ είναι αρνητικά ορισμένος πίνακας (έχει αρνητικές ιδιοτιμές)).

b) Οι συναρτήσεις-περιορισμοί $g_1(x_1,x_2) = x_1 - 1$, $g_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4$ είναι κυρτές συναρτήσεις (η πρώτη ώς γραμμική ενώ η δεύτερη γιατί σε οποιοδήποτε σημείο $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, η Εσσιανή της $Hg_2(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος πίνακας (έχει θετικές ιδιοτιμές)).

Κατά συνέπεια οι συνθήκες Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned}
-10x_1 + 10 - \mu_1 - 2\mu_2 x_1 &\le 0 \quad (KT1)\\
-10x_2 + 20 - 2\mu_2 x_2 &\le 0 \quad (KT2)\\
x_1(-10x_1 + 10 - \mu_1 - 2\mu_2 x_1) &= 0 \quad (KT3)\\
x_2(-10x_2 + 20 - 2\mu_2 x_2) &= 0 \quad (KT4)\\
x_1 - 1 &\le 0 \quad (KT5)\\
x_1^2 + x_2^2 - 4 &\le 0 \quad (KT6)\\
\mu_1(x_1 - 1) &= 0 \quad (KT7)\\
\mu_2(x_1^2 + x_2^2 - 4) &= 0 \quad (KT8)\\
x_1, x_2, \mu_1, \mu_2 &\ge 0 \quad (KT9)
\end{aligned}$$

είναι ικανές και αναγκαίες για τίς βέλτιστες λύσεις $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2)$ τού αντίστοιχου ευρύτερου προβλήματος, οπότε μελετούμε γιά ποιές υποπεριπτώσεις $'>0'$ ή $'=0'$ αυτών τών μεταβλητών, συναληθεύουν οι παραπάνω συνθήκες.

Όλες οι περιπτώσεις με $\tilde{x}_1 = 0$ ή $\tilde{x}_2 = 0$ πρέπει να απορριφθούν αφού:

$[\ \tilde{x}_1 = 0 \overset{(\mathrm{KT7})}{\Longrightarrow} \tilde{\mu}_1 = 0\ ] \Rightarrow$ ψευδής η (KT1) καί $\tilde{x}_2 = 0 \Rightarrow$ ψευδής η (KT2).

Δεδομένου ότι $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 > 0$, πρέπει να απορριφθούν και οι περιπτώσεις με $\tilde{\mu}_2 = 0$ αφού:

$$[\ \tilde{x}_2 > 0,\ \tilde{\mu}_2 = 0 \overset{(\mathrm{KT4})}{\Longrightarrow} \tilde{x}_2 = 2\ ] \overset{(\mathrm{KT6})}{\Longrightarrow} \tilde{x}_1 = 0 \text{ (άτοπο)}.$$

Δεδομένου ότι $\tilde{\mu}_2 > 0$, πρέπει να απορριφθούν και οι περιπτώσεις με $\tilde{\mu}_1 > 0$ αφού:

$$[\ \tilde{\mu}_1 > 0 \overset{(\mathrm{KT7})}{\Longrightarrow} \tilde{x}_1 = 1\ ] \overset{(\mathrm{KT3})}{\Longrightarrow} \tilde{\mu}_1 = -2\tilde{\mu}_2 < 0 \Rightarrow \text{ ψευδής η (KT9)}.$$

Άρα οι βέλτιστες λύσεις τού αντίστοιχου ευρύτερου προβλήματος είναι τής μορφής $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0, \tilde{\mu}_2)$ με $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\mu}_2 > 0$ οπότε, η σχέση (KT7) καθίσταται ταυτότητα ενώ τα ζεύγη τών σχέσεων (KT1, KT3), (KT2, KT4), (KT6, KT8) συγχωνεύονται και μαζί με τήν (KT9) οδηγούν στο σύστημα:

$$\begin{aligned}
-10\tilde{x}_1 + 10 - 2\tilde{\mu}_2 x_1 &= 0 \quad (KT1, KT3)\\
-10\tilde{x}_2 + 20 - 2\tilde{\mu}_2 x_2 &= 0 \quad (KT2, KT4)\\
\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - 4 &= 0 \quad (KT6, KT8)\\
\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 &> 0 \quad (KT9)
\end{aligned}$$

τού οποίου, η μόνη επιτρεπτή λύση είναι η $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\mu}_2) = (\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{4}{\sqrt{5}},\ \frac{5(\sqrt{5}-2)}{2})$.

Επειδή $4 < 5 \Rightarrow \sqrt{5} - 2 > 0 \Rightarrow \tilde{\mu}_2 > 0$ και $4 < 5 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \le 1 \Rightarrow \tilde{x}_1 - 1 \le 0$ συμπεραίνουμε ότι η παραπάνω λύση επαληθεύει και τίς υπολοιπόμενες συνθήκες (KT5), (KT9) και άρα, βέλτιστη (και μοναδική) λύση τού αρχικού προβλήματος είναι η $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{4}{\sqrt{5}})$.

ΘΕΜΑ 5ο. Το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα στην παρακάτω τετραγωνική μορφή:

$$\begin{aligned} &\max\{\ c^T \cdot x \ +\ x^T \cdot D \cdot x\ \} \\ &A \cdot x \leq b \\ &x \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

όπου

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επειδή είναι πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού, εισάγουμε τίς μεταβλητές $y \in \mathbb{R}^2$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^3$ και επιλύουμε μέσω τού τροποποιημένου αλγορίθμου Simplex, το αντίστοιχο ευρύτερο γραμμικό πρόβλημα:

$$\max\{\ \mathbf{0} \cdot x + \mathbf{0} \cdot \mu\ + \mathbf{0} \cdot y + \mathbf{0} \cdot \lambda\ \}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} -2D & A^T & -\mathbf{I_2} & \mathbf{0_{2\times 3}} \\ \hline A & \mathbf{0_{3\times 3}} & \mathbf{0_{3\times 2}} & \mathbf{I_3} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ \hline \mu \\ \hline y \\ \hline \lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} c \\ \hline b \end{array}\right)$$

$$x, y, \mu, \lambda \geq \mathbf{0}$$

με συνθήκες συμπληρωματικότητος

$$x_j \cdot y_j = 0, \quad j = 1, 2 \quad \text{και} \quad \mu_j \cdot \lambda_j = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Σύμφωνα με με τίς παραπάνω συνθήκες συμπληρωματικότητος, τα ζεύγη στηλών (P_1, P_6), $(P_2, P_7), (P_3, P_8), (P_4, P_9), (P_5, P_{10})$ είναι συμπληρωματικά σε αυτό τό πρόβλημα, οπότε δεν πρέπει να συνυπάρχουν ποτέ σέ υποπίνακα-βάση τής μεθόδου.

Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα περιορισμών, οι στήλες $P_3, P_4, P_8, P_9, P_{10}$ συγκροτούν αρχικά τόν μοναδιαίο πίνακα τού $\mathbb{R}^{5\times 5}$ οπότε είναι αρχικός υποπίνακας-βάσης αλλά, οι P_3, P_4 πρέπει να εξαιρεθούν ώς συμπληρωματικές τών P_8, P_9. Ώς εκ τούτου, συμπληρώνουμε τον μοναδιαίο πίνακα εισάγοντας 2 τεχνητές μεταβλητές (μέθοδος-M), οπότε ο αρχικός πίνακας Simplex γι΄ αυτό το πρόβλημα είναι:

			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	θ
P_{11}	M	10	2	0	1	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	
P_{12}	M	10	0	2	0	1	1	0	-1	0	0	0	0	1	
P_8	0	4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
P_9	0	4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
P_{10}	0	6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
		$20M$	$2M$	$2M$	$\cancel{M}$	$\cancel{M}$	$2\cancel{M}$	$-M$	$-M$	0	0	0	0	0	

Στην τελευταία γραμμή, έχουν διαγραφεί οι στήλες P_3, P_4, P_5 γιατί είναι συμπληρωματικές με στήλες τής τρέχουσας βάσης οπότε, πρέπει να εξαιρεθούν από τήν διαδικασία κατασκευής τής αμέσως επόμενης βάσης, κ.λ.π.