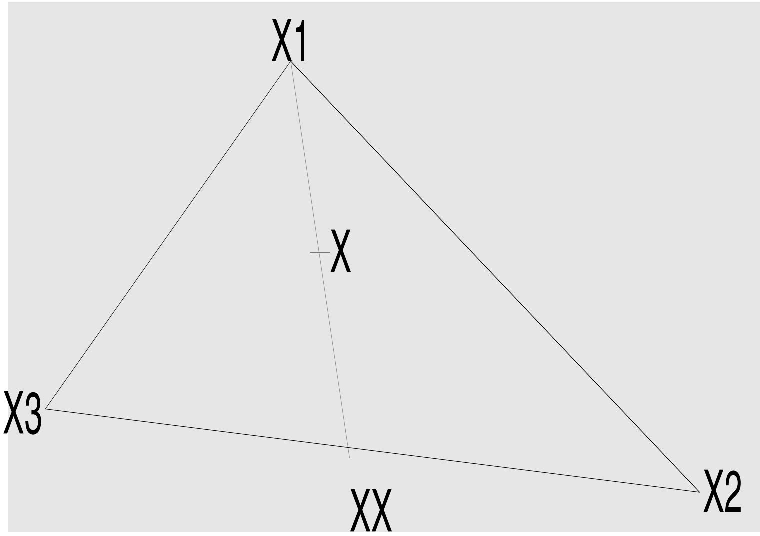
Γραμμικός και Μή Προγραμματισμός
Απαντήσεις άσκησης 2

27 Απριλίου 2004

- Πρόκειται για λογικά ισοδύναμους με τούς παρακάτω ορισμούς:
  - $(\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in [0,1])\ \ 1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \quad \wedge \quad x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i$
  - $(\exists k \in \mathbb{N})(\exists X_1, X_2, \cdots, X_k \in \mathbb{R}^n)$
    $F = \{x \in \mathbb{R}^n :$ "x είναι κυρτός συνδυασμός τών σημείων $X_1, X_2, \cdots, X_k \in \mathbb{R}^n$ "$\}$
  - $(\forall X_1, X_2 \in F) \quad [\ \ [\ (\exists \lambda \in [0,1])\ x = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2)\ ]\ \Rightarrow\ X_1 = X_2)\ ]$
  - $Ax = b \quad \wedge \quad x = (0, \cdots, 0, x_{i_1}, 0, \cdots, 0, x_{i_2}, 0, \cdots, 0, x_{i_m}, 0, \cdots, 0,) \quad \wedge$
    $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m} > 0 \ \wedge$ "$P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_m}$ είναι βάση τού $\mathbb{R}^m$ "
- "H είναι ημιεπίπεδο τού $\mathbb{R}^n$ "$\Leftrightarrow$
  $(\exists\ a_1,\ \cdots, a_n, b \in \mathbb{R})\ H = \{x = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\ \geq b\}$
  Οπότε, άν $x, y \in H$ και $\lambda \in [0,1]$, τότε ότι για τό $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ ισχύει:
  $a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n =$
  $a_1(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1) + \ \cdots\ + a_n(\lambda x_n + (1-\lambda) y_n)\ =$
  $\lambda(a_1 x_1 + \ \cdots\ + a_n x_n) + (1-\lambda)(a_1 y_1 + \ \cdots\ + a_n y_n)\ < \lambda b + (1-\lambda) b = b$
  Συνολικά $\quad (\forall x, y \in H)(\forall \lambda \in [0,1])\ \lambda x + (1-\lambda) y \in H$
  ή ισοδύναμα "H είναι κυρτό σύνολο τού $\mathbb{R}^n$ ".
- Άν $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^n$ είναι δοσμένα μή συνευθειακά σημεία τότε
  - Οι κυρτοί συνδυασμοί τών σημείων X_1, X_2, X_3 ανήκουν στό υπερεπίπεδο πού ορίζουν τα διανύσματα $X_1 - X_2, X_1 - X_3$ και στήν τομή τών 3 Ημιεπιπέδων πού ορίζουν κάθε μιά από τίς τρείς ευθείες που διέρχονται από 2 αυτά τα σημεία και περιέχουν το τρίτο. Συνολικά άν $n > 2$ απαιτούνται 4 γραμμικές σχέσεις (3 ανισότητες και 1 ισότητα). Στην περίπτωση $n = 2$ το επίπεδο τών $X_1 - X_2, X_1 - X_3$ ταυτίζεται με τον χώρο και άρα η ισότητα δέν χρειάζεται.
  - "Ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σημεία ".



(α΄) Εφικτή Περιοχή F

- Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό τού σχήματος, τότε:
  α) Άν το X ανήκει σε κάποιο απο τα ευθύγραμμα τμήματα X_1X_2, X_2X_3, X_3X_1 τότε είναι προφανές, π.χ. άν $X \in X_1X_2$ τότε $\quad (\exists \lambda \in [0,1]) \;\; X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ οπότε και $\; X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 + \; 0X_3$, συνολικά δηλαδή
  $$(\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]) \quad 1 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \quad \wedge \;\; X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$$
  β) Αλλιώς άν XX είναι η τομή τού X_2X_3 με τήν προέκταση τού X_1X, τότε:
  $X \in$ "ευθύγραμμο τμήμα $X_1 \; XX$"και $XX \in$ " ευθύγραμμο τμήμα X_2X_3"άρα
  $(\exists \lambda, \lambda_1 \in [0,1]) \; X = \lambda X_1 + (1-\lambda)XX, \;\; XX = \lambda_1 X_2 + \; (1-\lambda_1)X_3 \Rightarrow$
  $(\exists \lambda, \lambda_1 \in [0,1]) \;\; X = \lambda X_1 + (1-\lambda)\lambda_1 X_2 + \; (1-\lambda)(1-\lambda_1)X_3$ οπότε, επειδή $\lambda + (1-\lambda)\lambda_1 + (1-\lambda)(1-\lambda_1) = 1$ έπεται πάλι ότι το X είναι κυρτός συνδυασμός τών σημείων X_1, X_2, X_3.

- Η στήλη τού διανύσματος-λύση, θά έχει ακριβώς m θετικές συνιστώσες (οι υπόλοιπες θα είναι 0).
- Η στήλη τού διανύσματος-λύση, θά έχει λιγότερες από m θετικές συνιστώσες (οι υπόλοιπες θα είναι 0).
- Κάποια από τίς στήλες $P_i, i = 1,.,.n$ έχει όλες τίς συνιστώσες της μή θετικές.
- Στο τελικό βήμα η λύση είναι εκφυλισμένη είτε μηδενίζεται ένας από τούς συντελεστές $z_j - c_j$ όπου $j = 1,..,n$ είναι ο δείκτης κάποιας από μή βασικής στήλης. είναι 0.

• Πρόκειται ουσιαστικά γιά πολύ μικρή διαταραχή τής άσκησης 2.10 τού βιβλίου (δές απο εκεί την επίλυσή της).