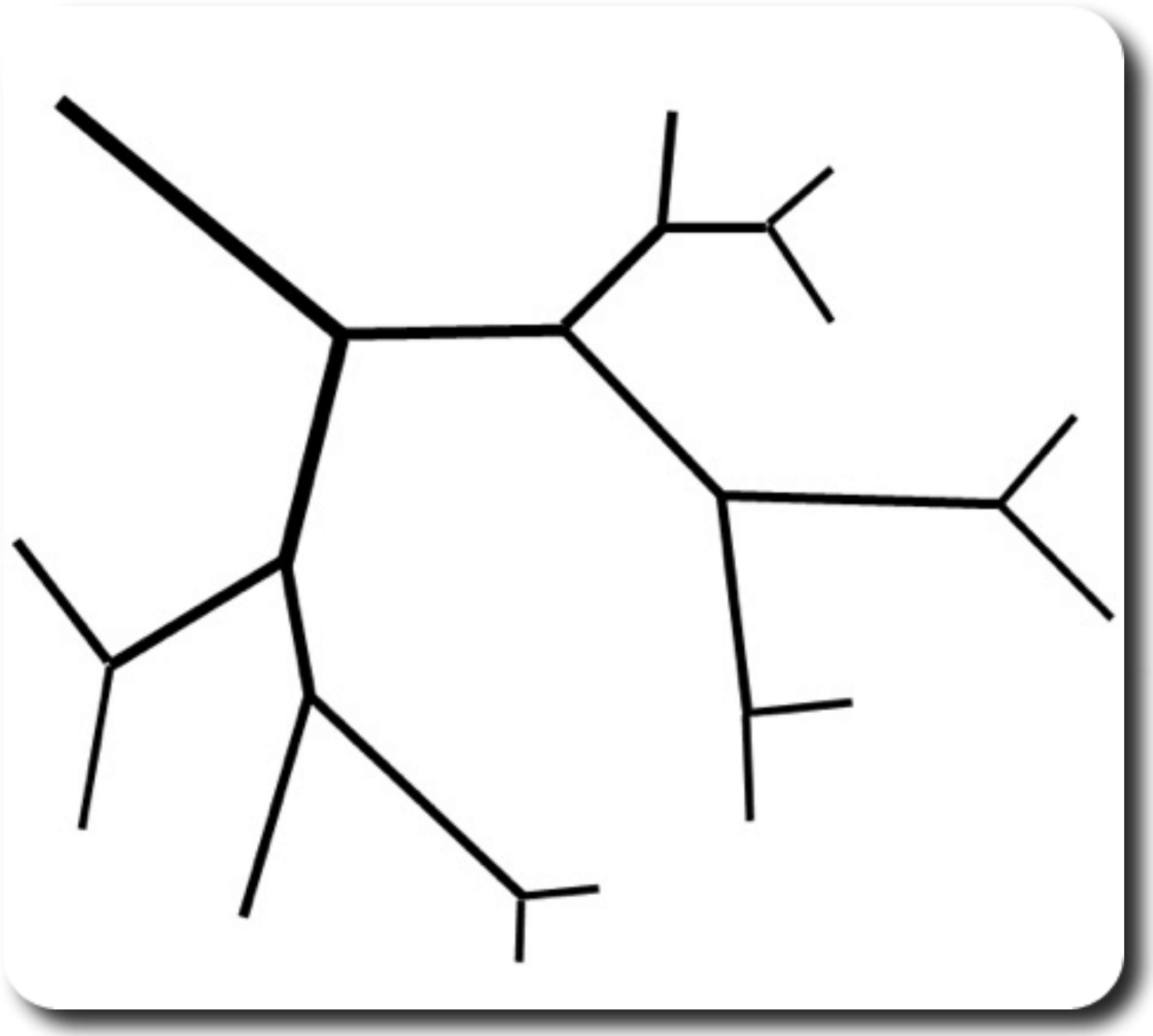
UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11

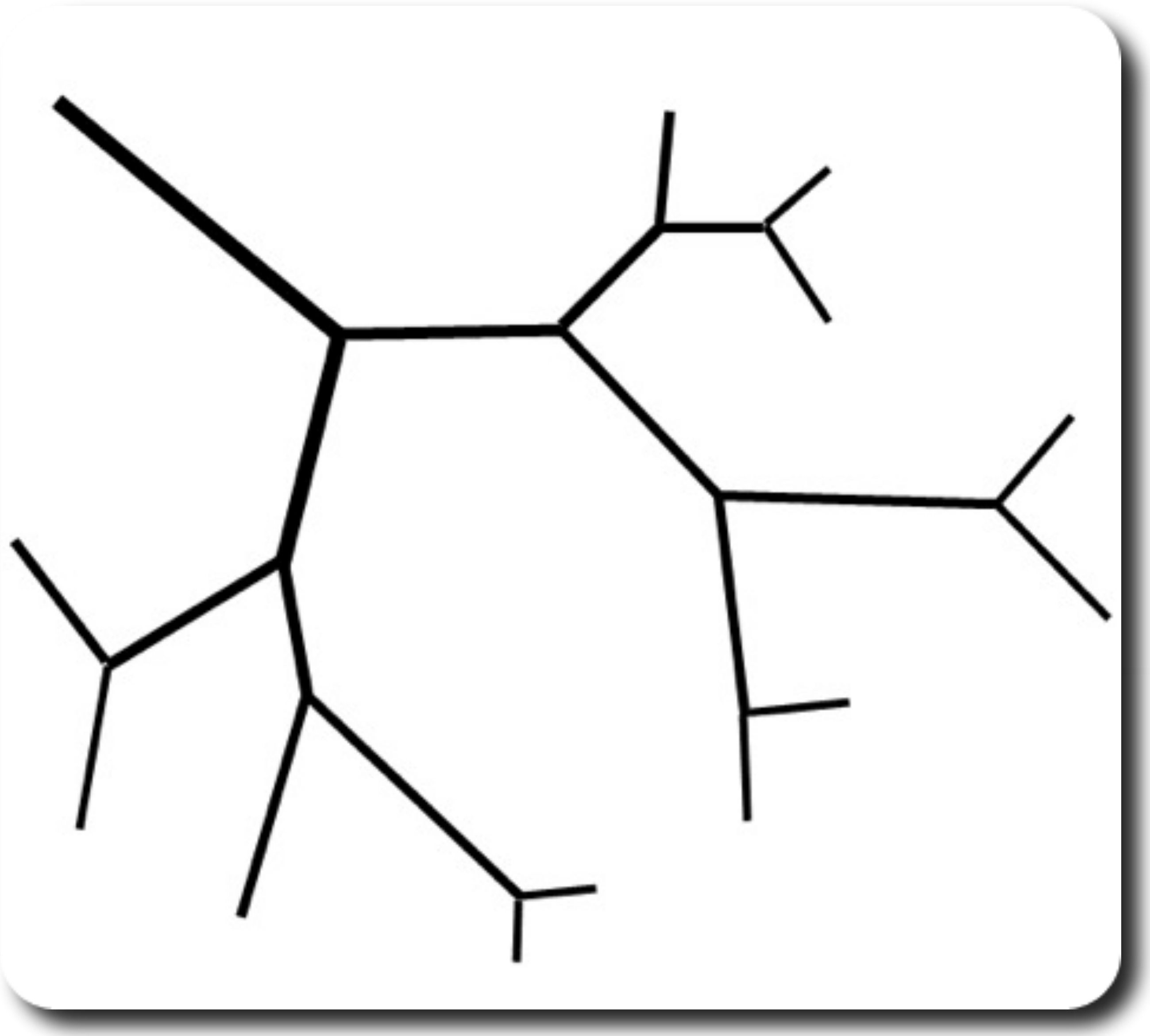
MATHEMATIQUES ORSAY

Soutenance de thèse
Propagation d'ondes dans des jonctions de fentes minces

Adrien Semin
Directeurs de thèse: Patrick JOLY et Bertrand MAURY

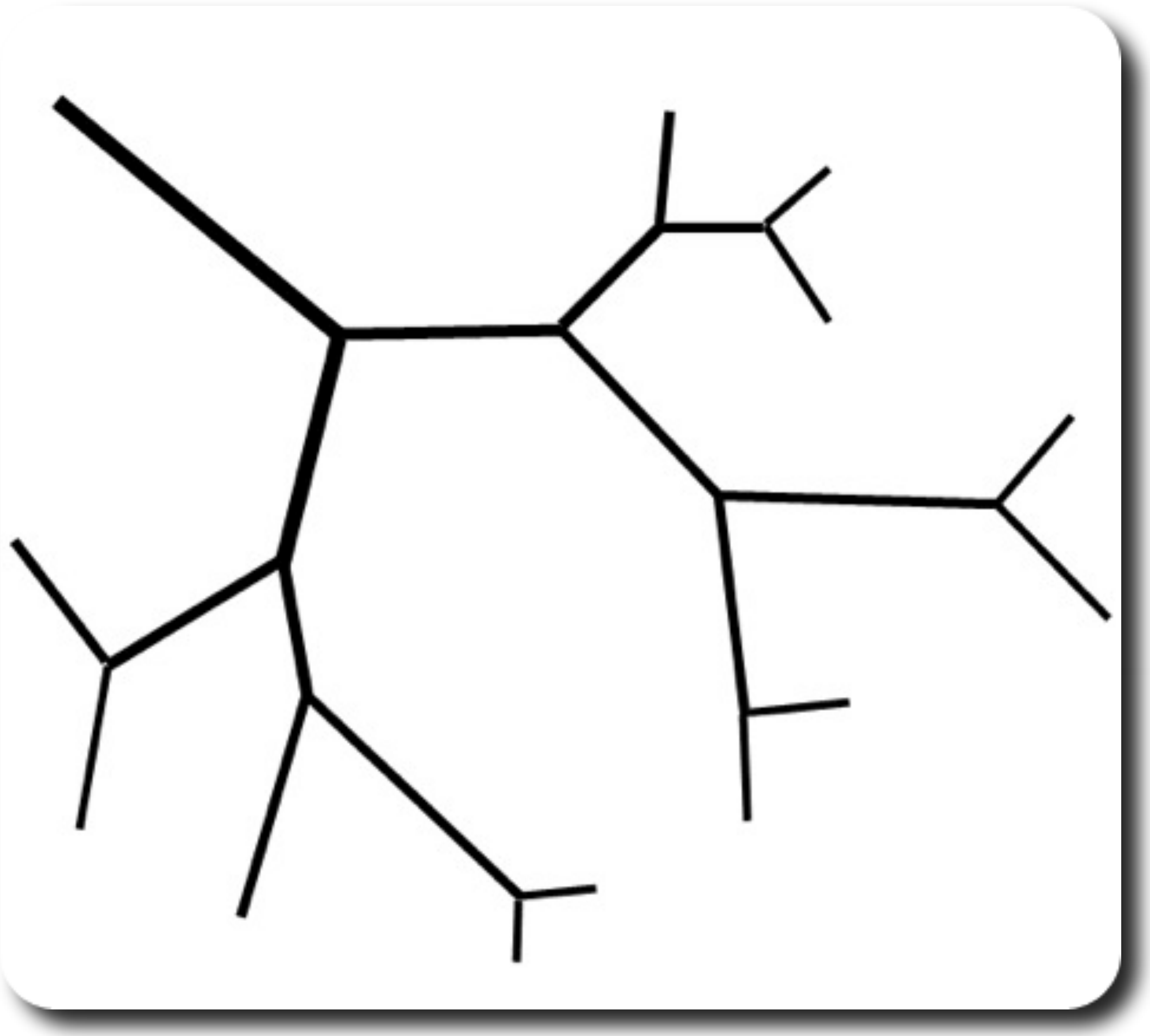
Introduction du problème





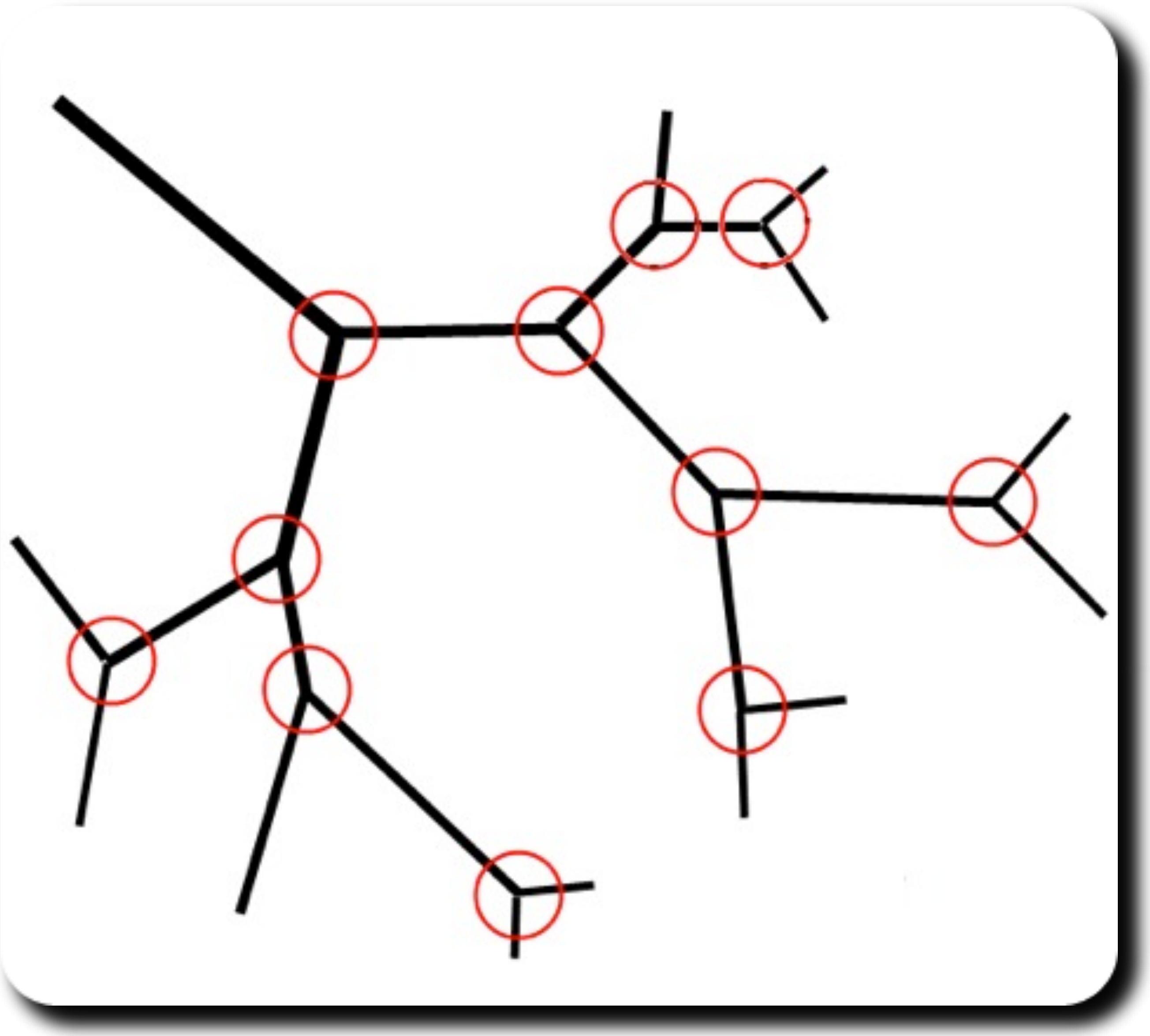
- But: étudier la propagation d'ondes dans un réseau fini ou infini de fentes minces.

Introduction du problème

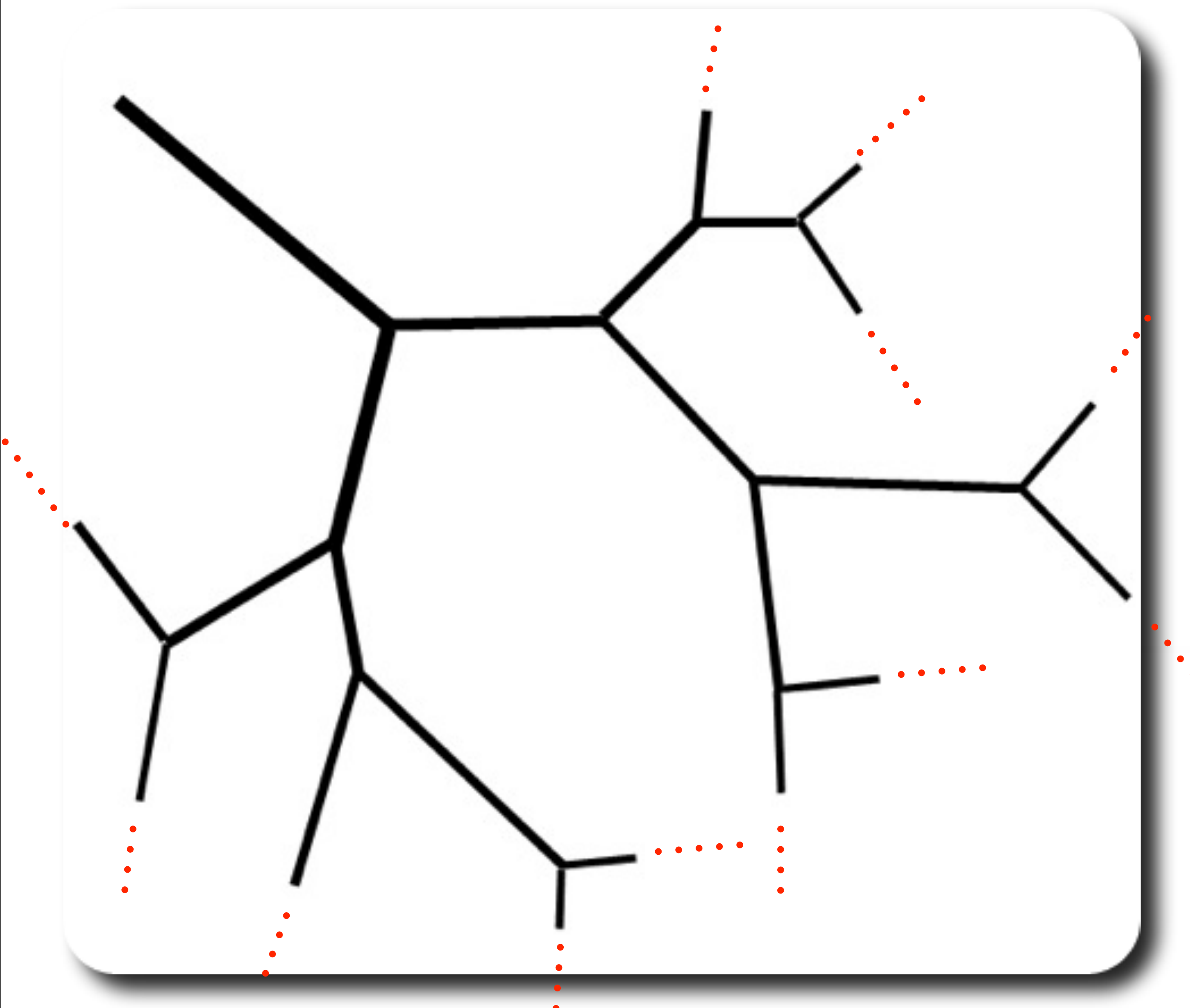


- But: étudier la propagation d'ondes dans un réseau fini ou infini de fentes minces.
- Fentes minces : les directions transverses sont petites devant la longueur d'onde.

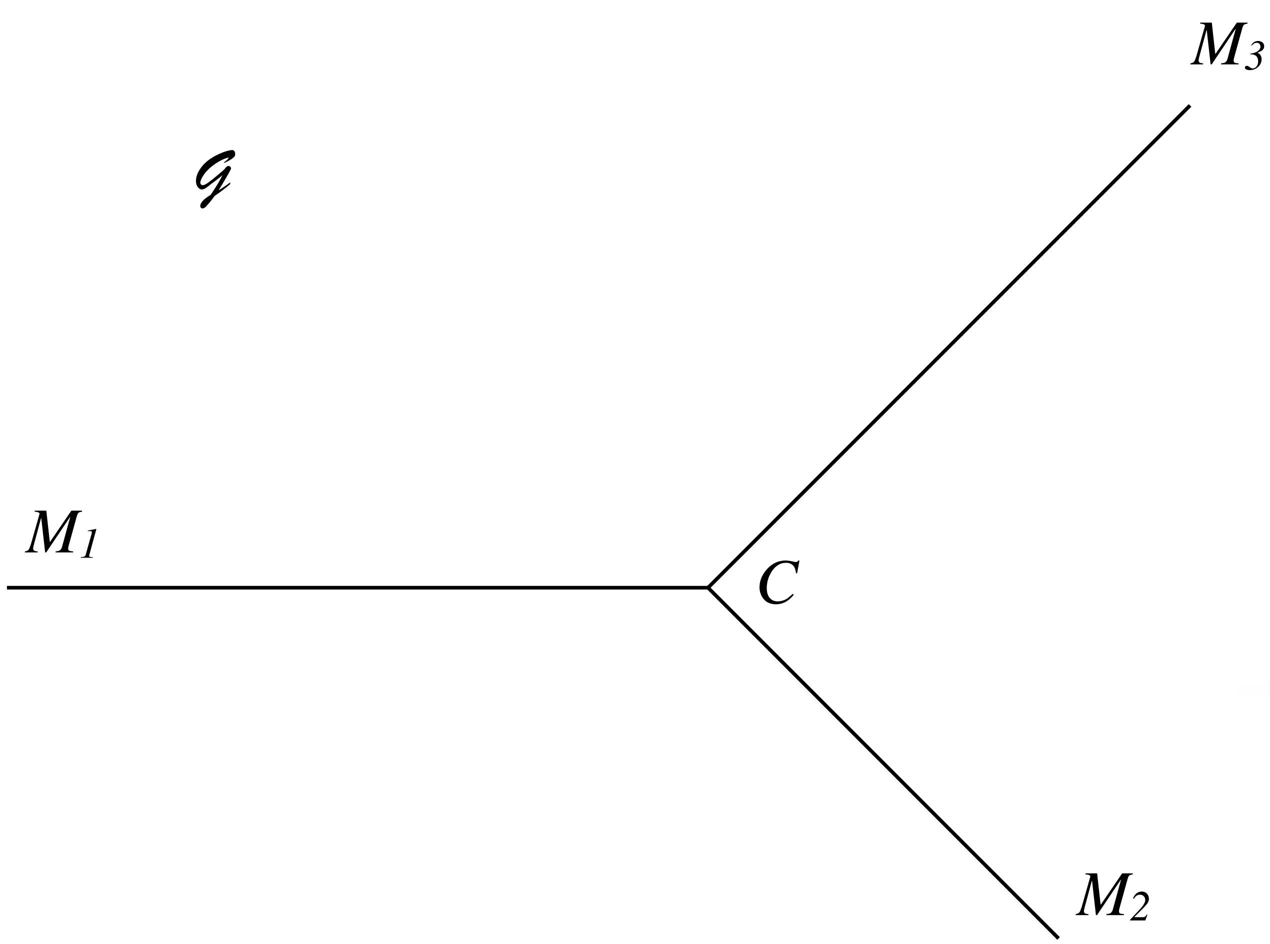
Introduction du problème



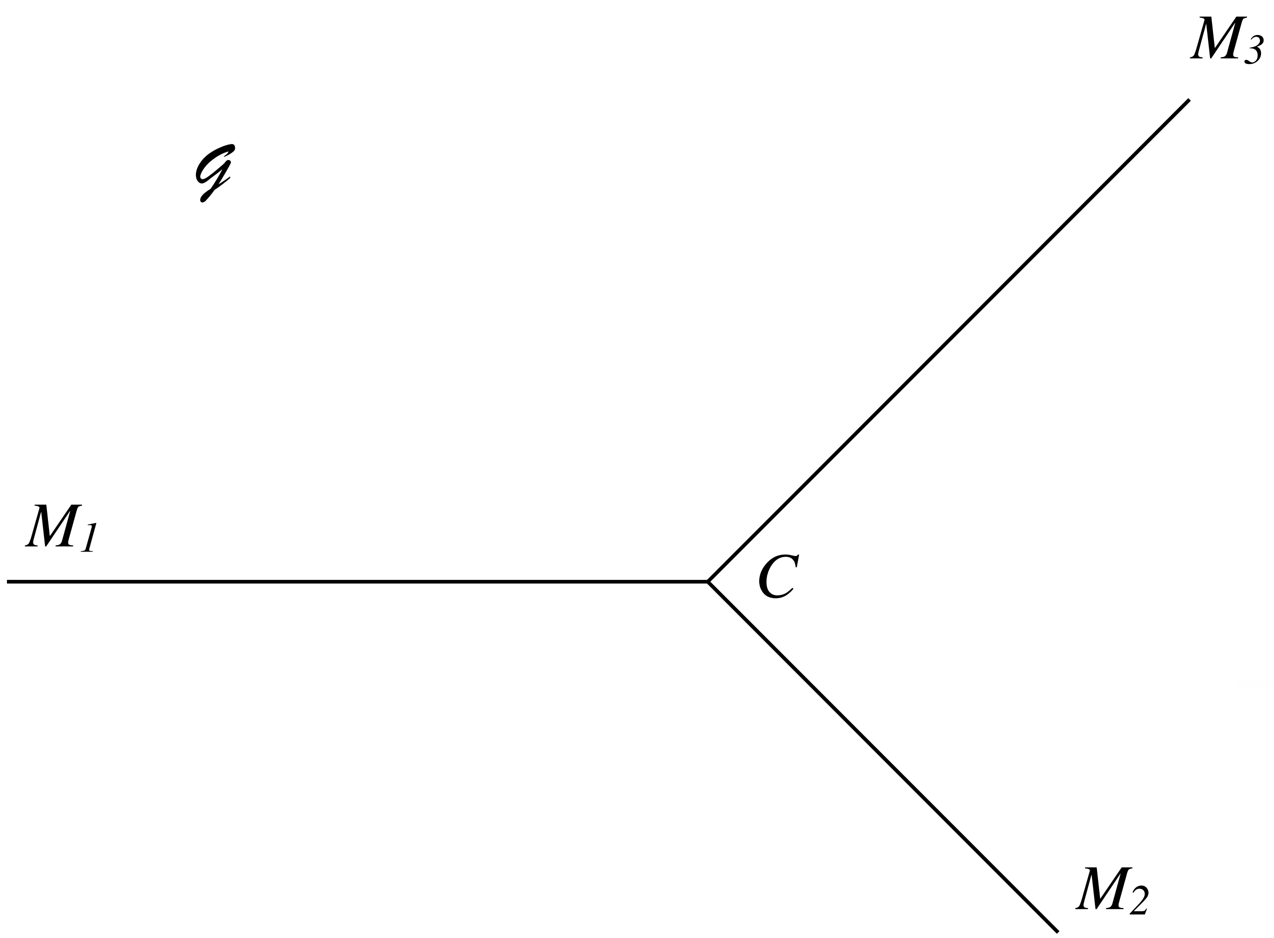
- But: étudier la propagation d'ondes dans un réseau fini ou infini de fentes minces.
- Fentes minces : les directions transverses sont petites devant la longueur d'onde.
- Problèmes:
  - Modéliser efficacement les jonctions (partie I de la thèse)



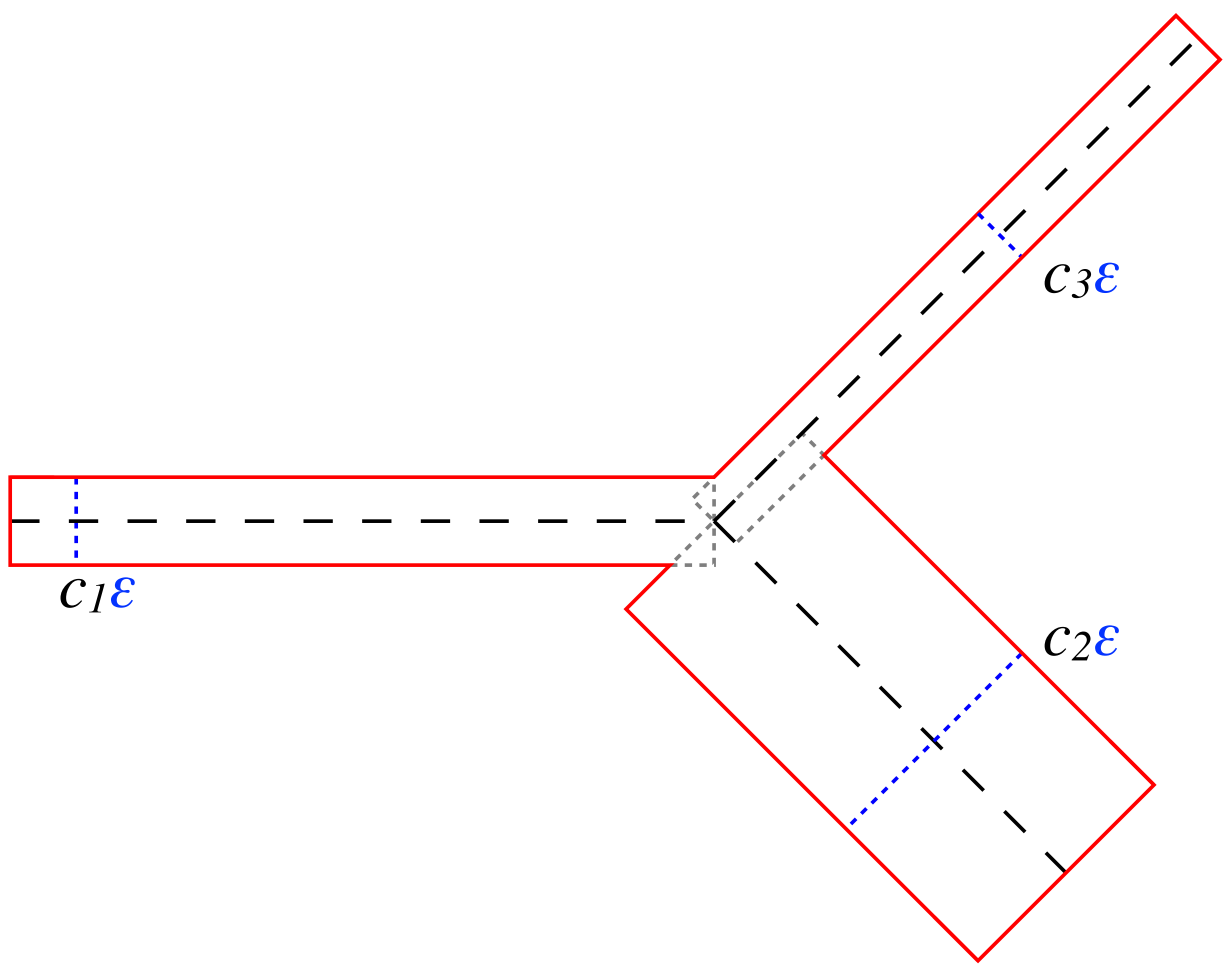
- But: étudier la propagation d'ondes dans un réseau fini ou infini de fentes minces.
- Fentes minces : les directions transverses sont petites devant la longueur d'onde.
- Problèmes:
  - Modéliser efficacement les jonctions (partie I de la thèse)
  - Traiter l'infinité éventuelle du réseau (partie II de la thèse)


M_3
$\mathcal{G}$
M_1
C
M_2

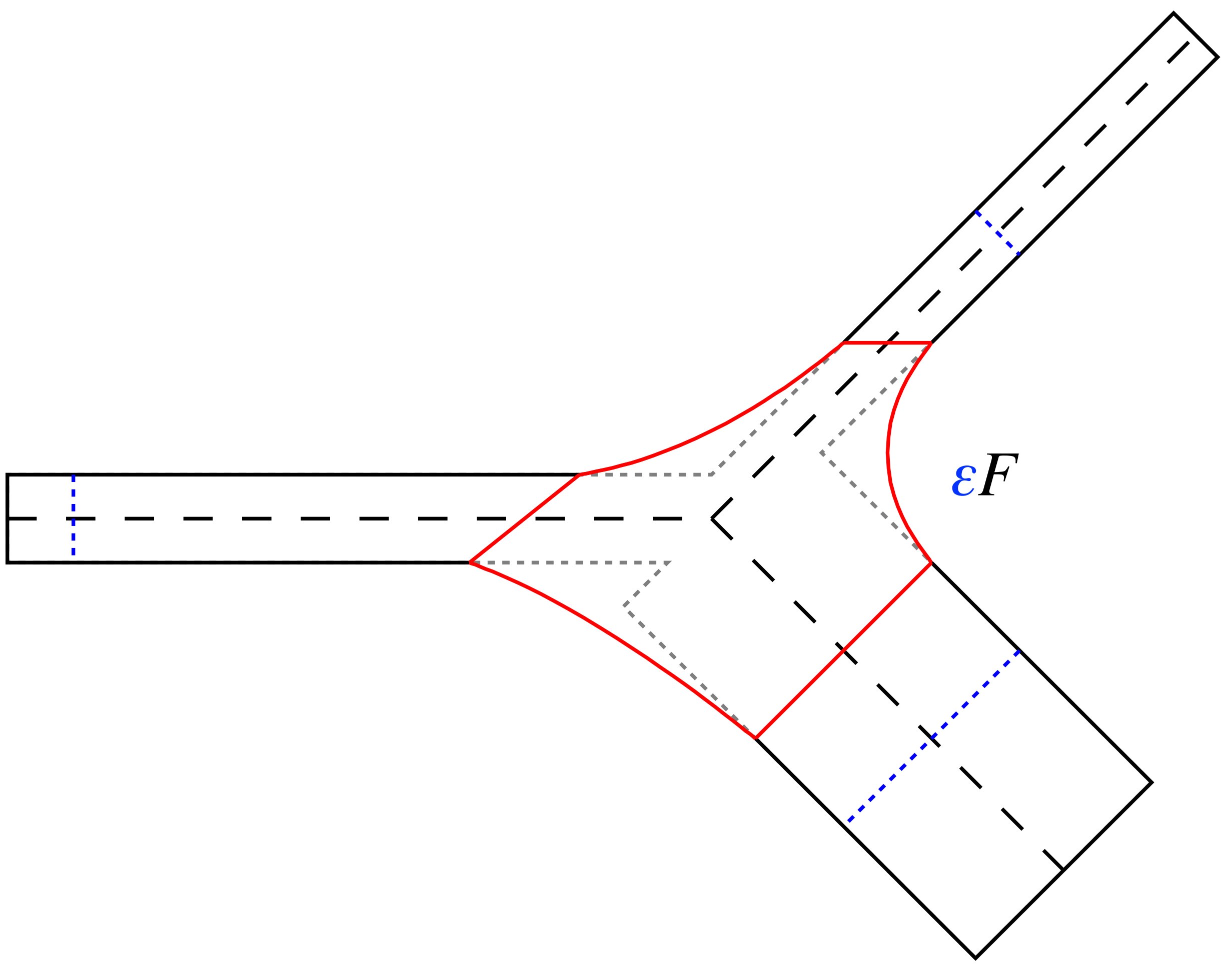
Introduction du problème: cas d'une jonction



- Nous partons d'un graphe $\mathcal{G}$ donné par N segments de longueurs respectives L_1, L_2, ..., L_N connectés au même point C (exemple: $N = 3$);

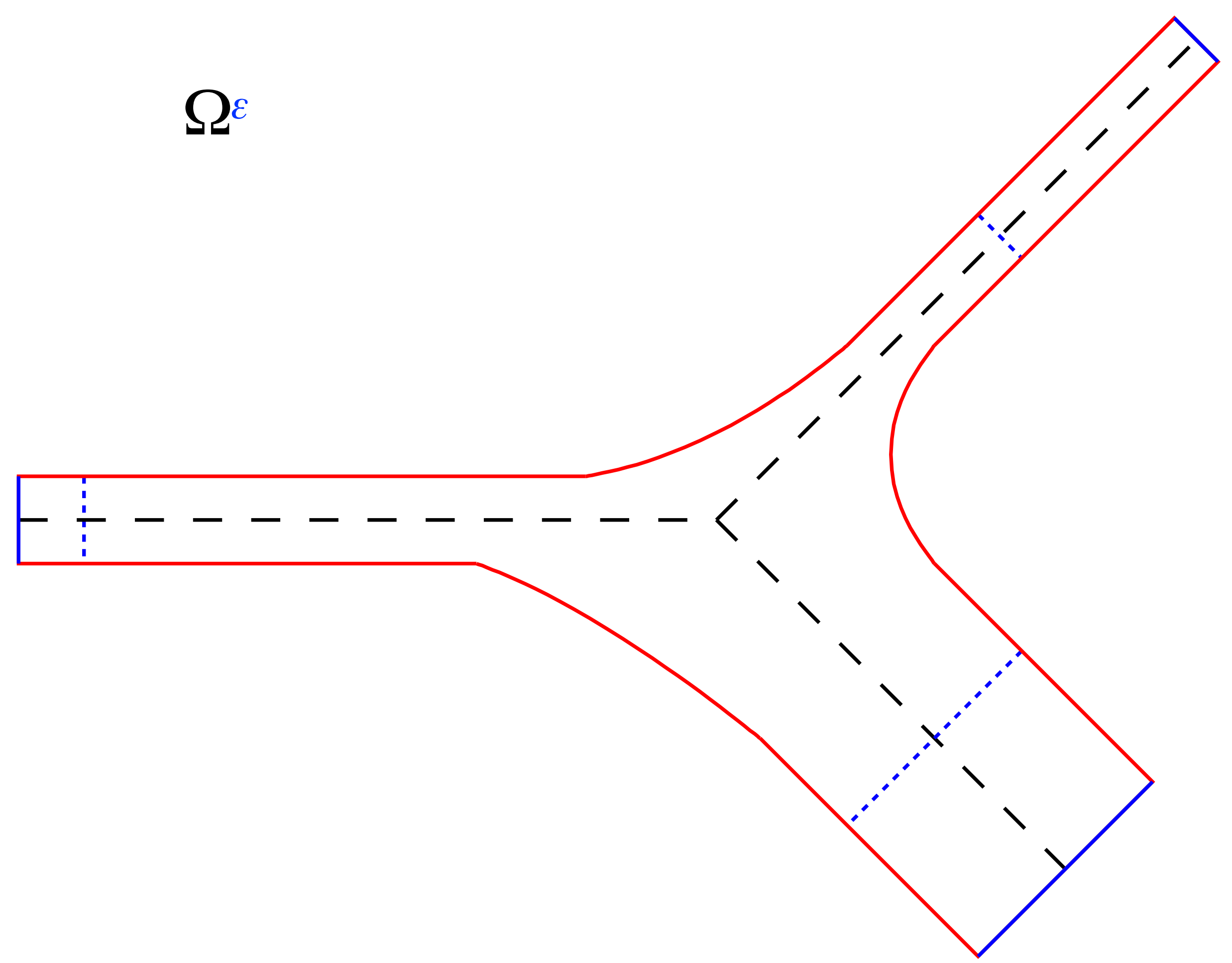


- Nous partons d'un graphe $\mathcal{G}$ donné par N segments de longueurs respectives L_1, L_2, ..., L_N connectés au même point C (exemple: $N = 3$);
- Nous les étendons de manière symétrique afin d'obtenir des rectangles d'épaisseurs respectives $c_1\varepsilon$, $c_2\varepsilon$, ..., $c_1\varepsilon$;



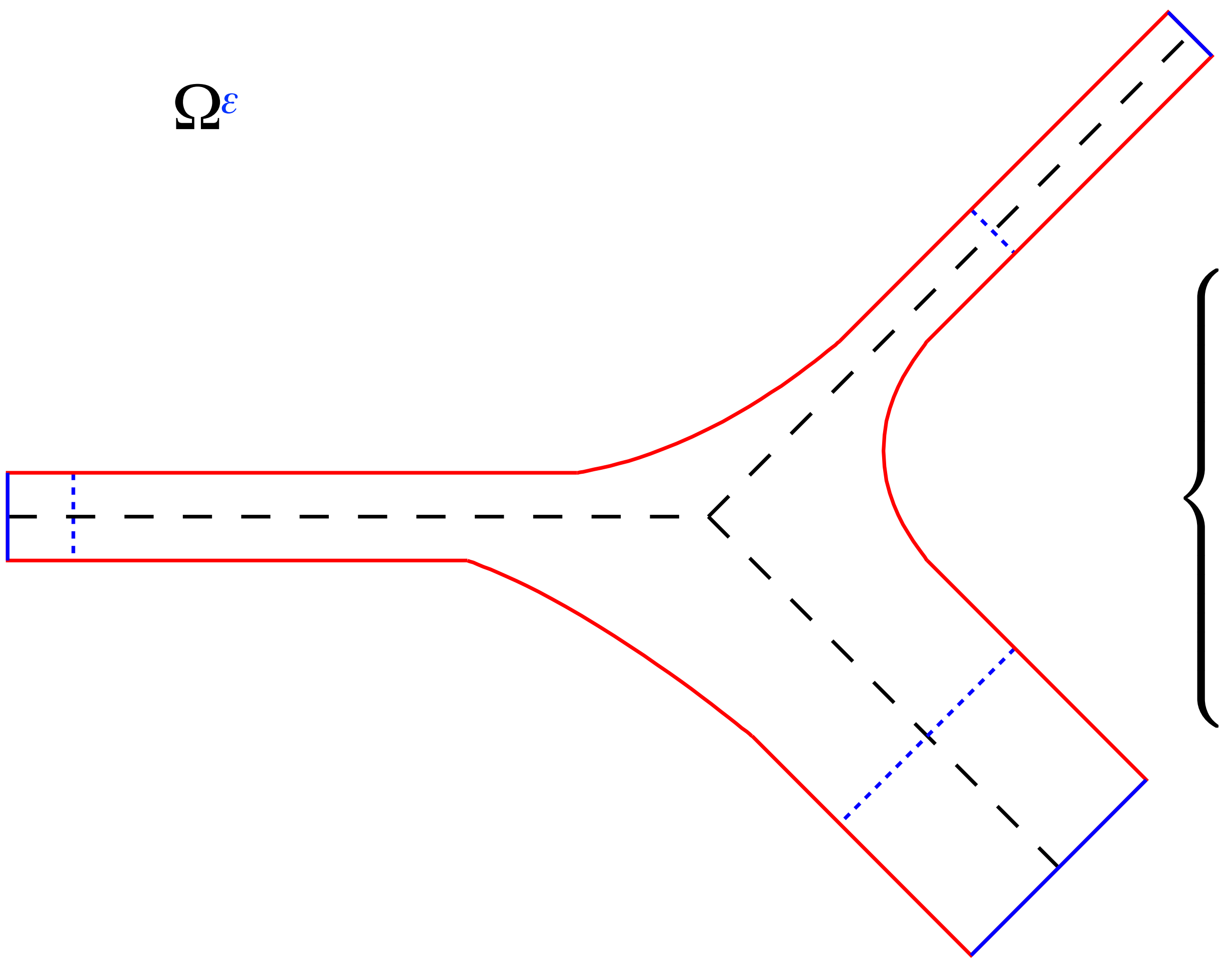
- Nous partons d'un graphe $\mathcal{G}$ donné par N segments de longueurs respectives L_1, L_2, ..., L_N connectés au même point C (exemple: $N = 3$);
- Nous les étendons de manière symétrique afin d'obtenir des rectangles d'épaisseurs respectives $c_1\varepsilon$, $c_2\varepsilon$, ..., $c_1\varepsilon$;
- Nous définissons la jonction comme un ensemble ouvert εF;

Introduction du problème: cas d'une jonction



- Nous partons d'un graphe $\mathcal{G}$ donné par N segments de longueurs respectives L_1, L_2, ..., L_N connectés au même point C (exemple: $N = 3$);
- Nous les étendons de manière symétrique afin d'obtenir des rectangles d'épaisseurs respectives $c_1\varepsilon$, $c_2\varepsilon$, ..., $c_1\varepsilon$;
- Nous définissons la jonction comme un ensemble ouvert εF;
- Nous obtenons finalement un ensemble ouvert Ω^ε qui tend vers le graphe 1D $\mathcal{G}$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

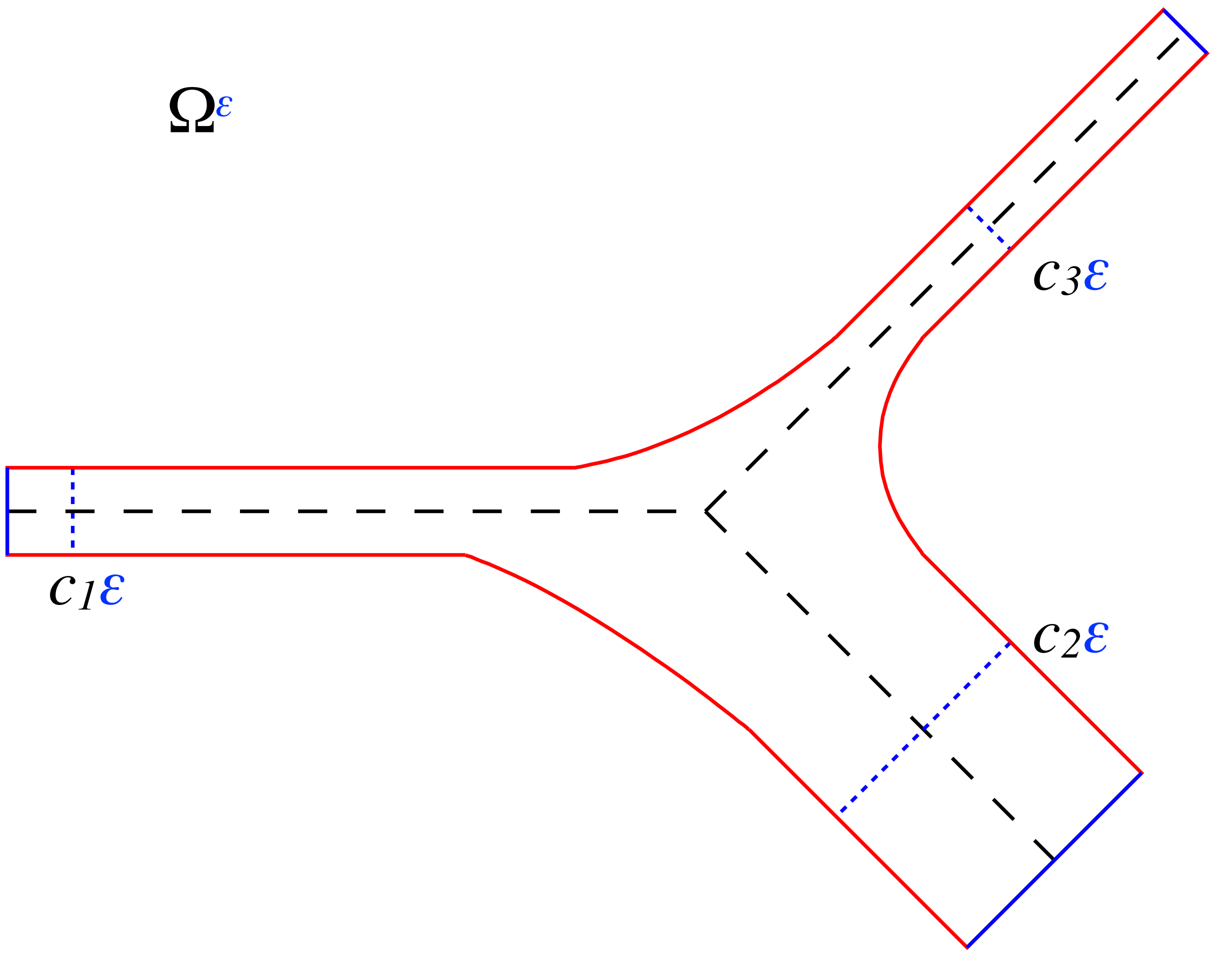
Introduction du problème: cas d'une jonction



- Nous considérons le problème suivant: trouver $u^\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega^\varepsilon$ telle que

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta u^\varepsilon &= 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega^\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} &= 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega^\varepsilon \\ u = f^\varepsilon \quad \text{sur } \{0\} \times \Omega^\varepsilon \qquad & \frac{\partial u}{\partial t} = g^\varepsilon \quad \text{sur } \{0\} \times \Omega^\varepsilon \end{aligned}\right.$$

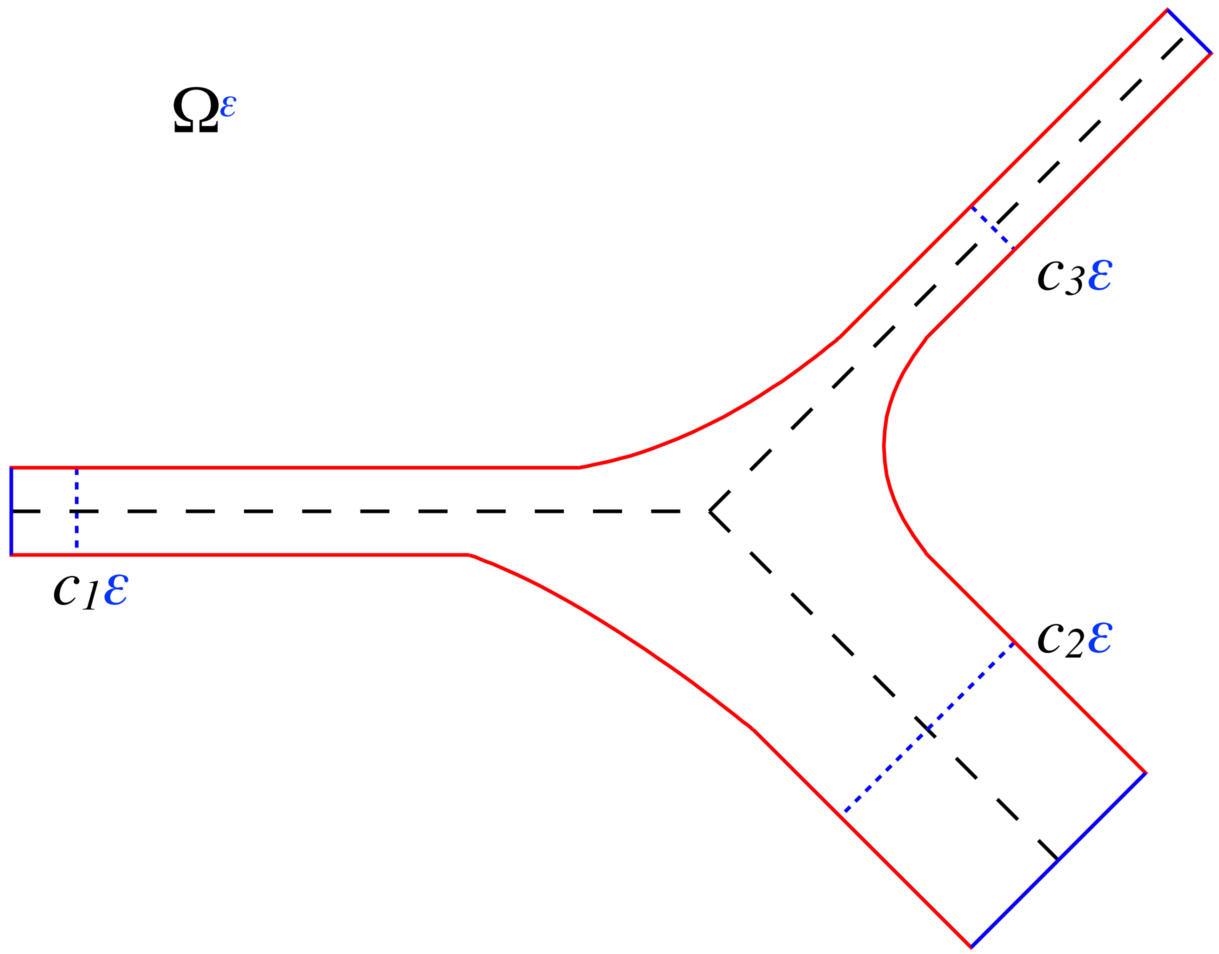
- Proposition: ce problème est bien posé.

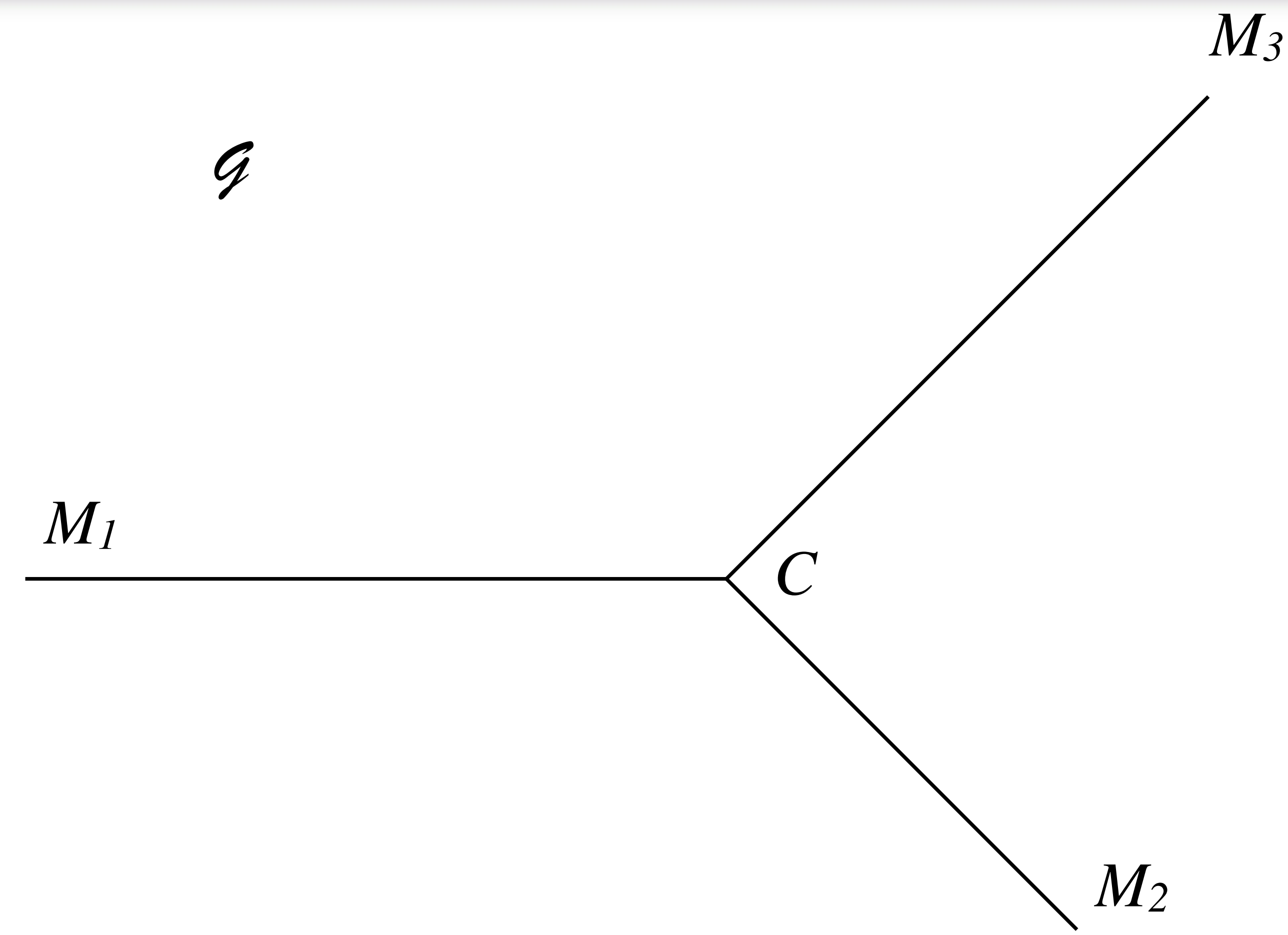


Nous avons

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta u^\varepsilon = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega^\varepsilon \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega^\varepsilon \end{cases}$$

Conditions standards de Kirchhoff

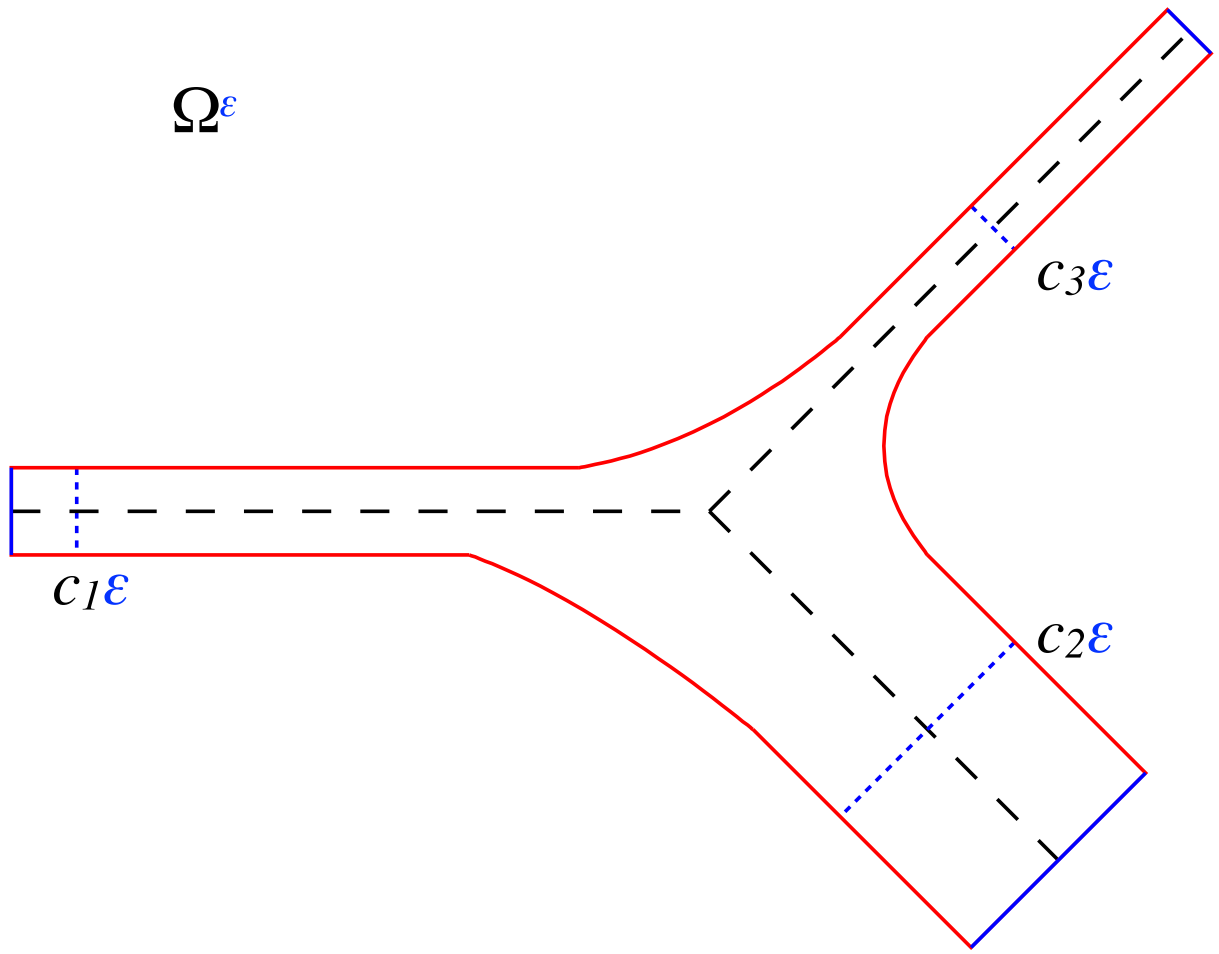


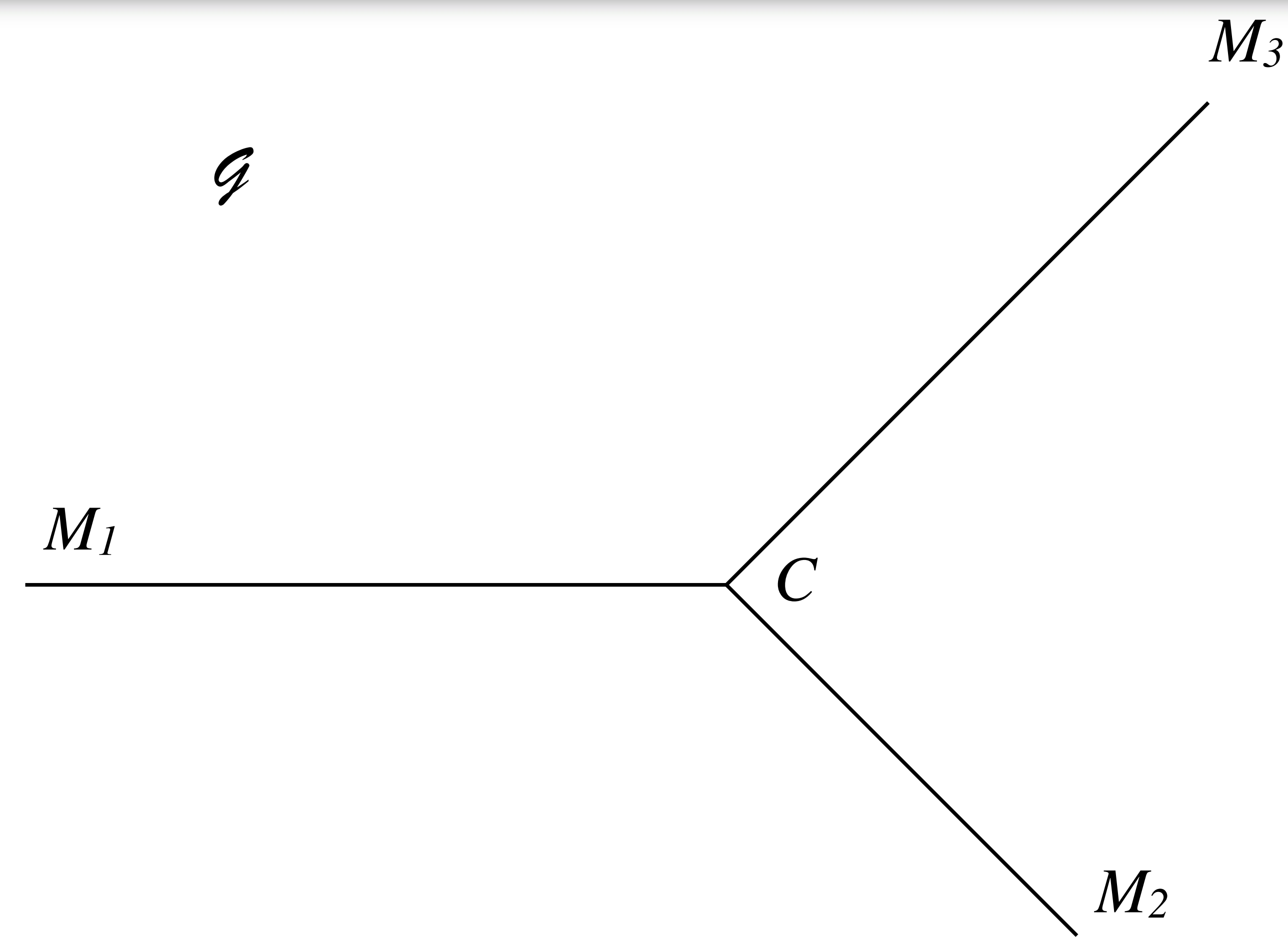


Nous avons (u_i étant la restriction de u sur la $i^{\text{ème}}$ fente)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta u^\varepsilon &= 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega^\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} &= 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega^\varepsilon \end{aligned}\right. \quad \underset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbf{1D}} u_i^0 &= 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times (CM_i) \\ \frac{\partial u_i^0}{\partial \vec{n}} &= 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \{M_i\} \end{aligned}\right.$$

Conditions standards de Kirchhoff





Nous avons (u_i étant la restriction de u sur la $i^{\text{ème}}$ fente)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2} - \Delta u^{\varepsilon} &= 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega^{\varepsilon} \\ \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \vec{n}} &= 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega^{\varepsilon} \end{aligned}\right. \quad \underset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbf{1D}} u_i^0 &= 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times (CM_i) \\ \frac{\partial u_i^0}{\partial \vec{n}} &= 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \{M_i\} \\ &\boxed{\begin{aligned} u_i^0(t, C) &= u_j^0(t, C), \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ \sum_{i=1}^{N} c_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \vec{n}}(t, C) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ &\text{Loi de Kirchhoff} \end{aligned}} \end{aligned}\right.$$

Conditions standards de Kirchhoff

Conditions standards de Kirchhoff

- La solution du problème d'onde 1D est continue aux nœuds du graphe et la somme des dérivées normales à chaque nœud s'annule.

Conditions standards de Kirchhoff

- La solution du problème d'onde 1D est continue aux nœuds du graphe et la somme des dérivées normales à chaque nœud s'annule.
- Ces conditions sont appelées ainsi en référence aux travaux de Kirchhoff.

Conditions standards de Kirchhoff

- La solution du problème d'onde 1D est continue aux nœuds du graphe et la somme des dérivées normales à chaque nœud s'annule.
- Ces conditions sont appelées ainsi en référence aux travaux de Kirchhoff.
- La justification du modèle semble être très récente:

J. Rubinstein, M. Schatzman, *Variationnal problems on multiply connected thin strips*. Arch. Ration. Mech. Anal. 160 (2001), no. 4, pp. 271--308 and 309--324.

P. Kuchment, *Graph models for waves in thin structures*, Waves Random Media, 12(2002), no 4, pp R1--R24

Conditions standards de Kirchhoff

- La solution du problème d'onde 1D est continue aux nœuds du graphe et la somme des dérivées normales à chaque nœud s'annule.
- Ces conditions sont appelées ainsi en référence aux travaux de Kirchhoff.
- La justification du modèle semble être très récente:

J. Rubinstein, M. Schatzman, *Variationnal problems on multiply connected thin strips*. Arch. Ration. Mech. Anal. 160 (2001), no. 4, pp. 271--308 and 309--324.

P. Kuchment, *Graph models for waves in thin structures*, Waves Random Media, 12(2002), no 4, pp R1--R24

- Le modèle limite fournit une première approximation de la solution, mais il existe des cas non-pathologiques pour lesquels ce modèle limite ne suffit pas.

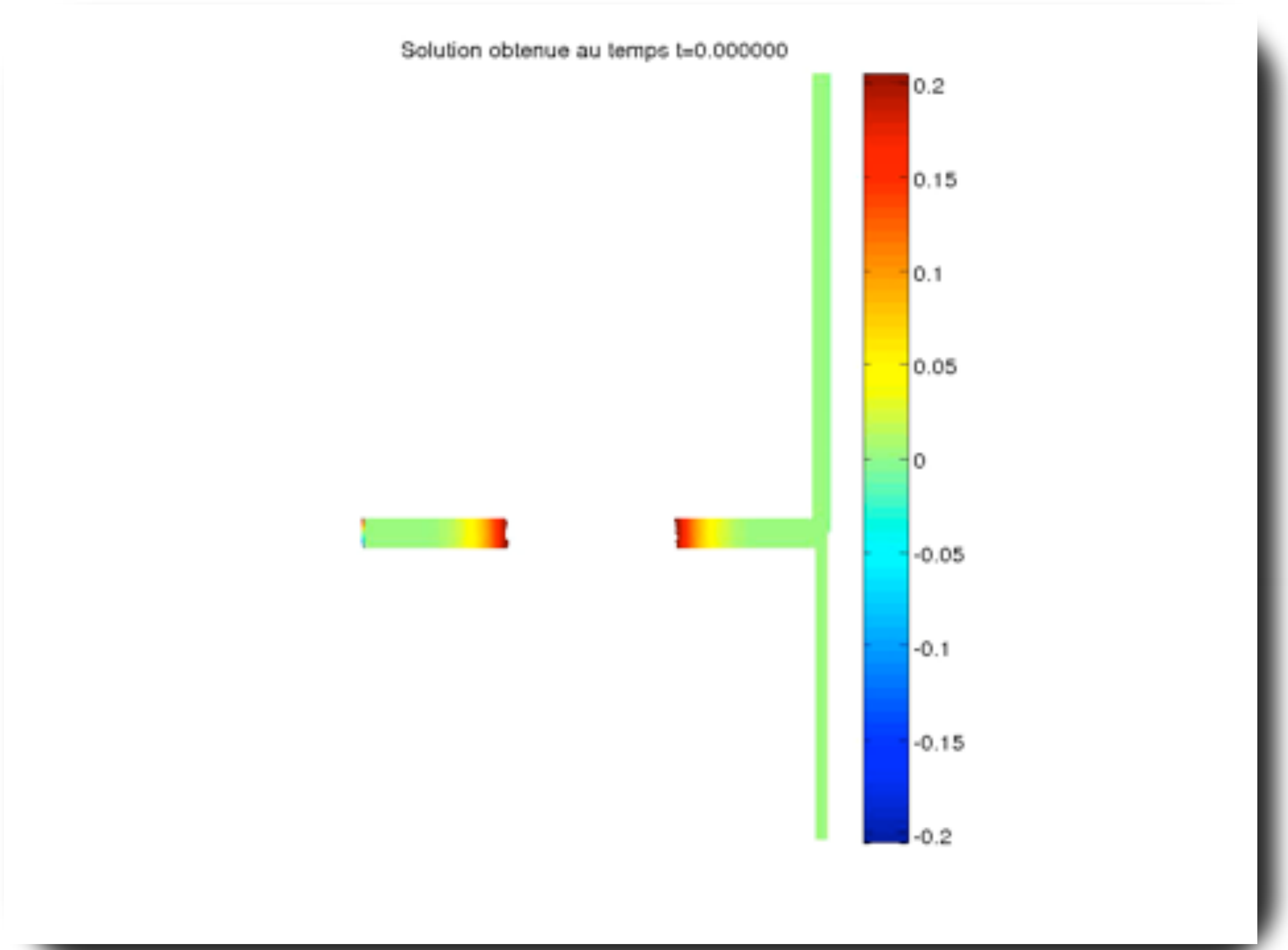
Conditions standards de Kirchhoff

Conditions standards de Kirchhoff

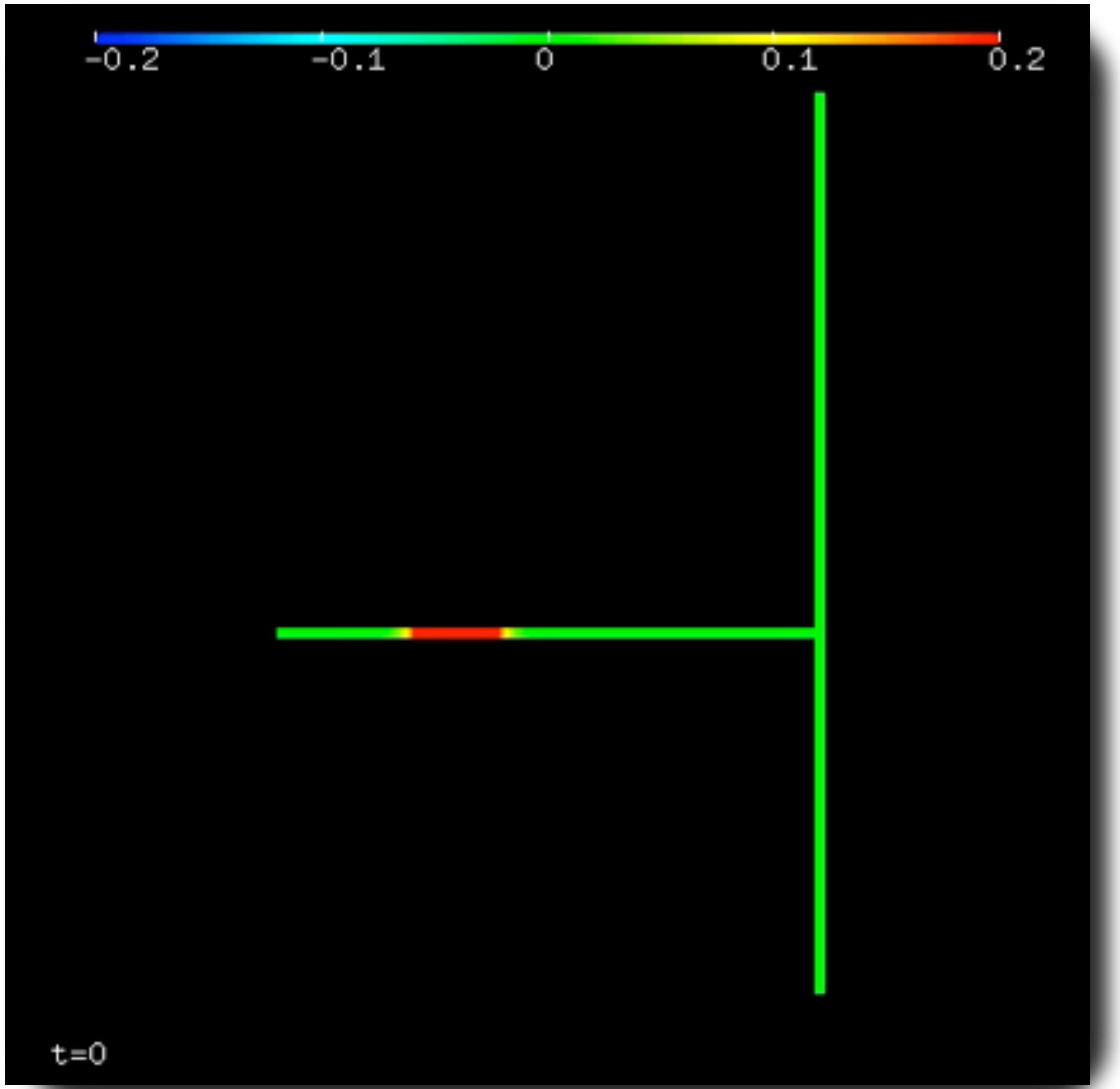
- Expérience numérique: 3 fentes, avec c_1=1, c_2=0.4 et c_3=0.6.
- Données de Cauchy à supports inclus dans la première fente.

- Expérience numérique: 3 fentes, avec $c_1=1$, $c_2=0.4$ et $c_3=0.6$.
- Données de Cauchy à supports inclus dans la première fente.

Résolution 2D exacte - script Matlab



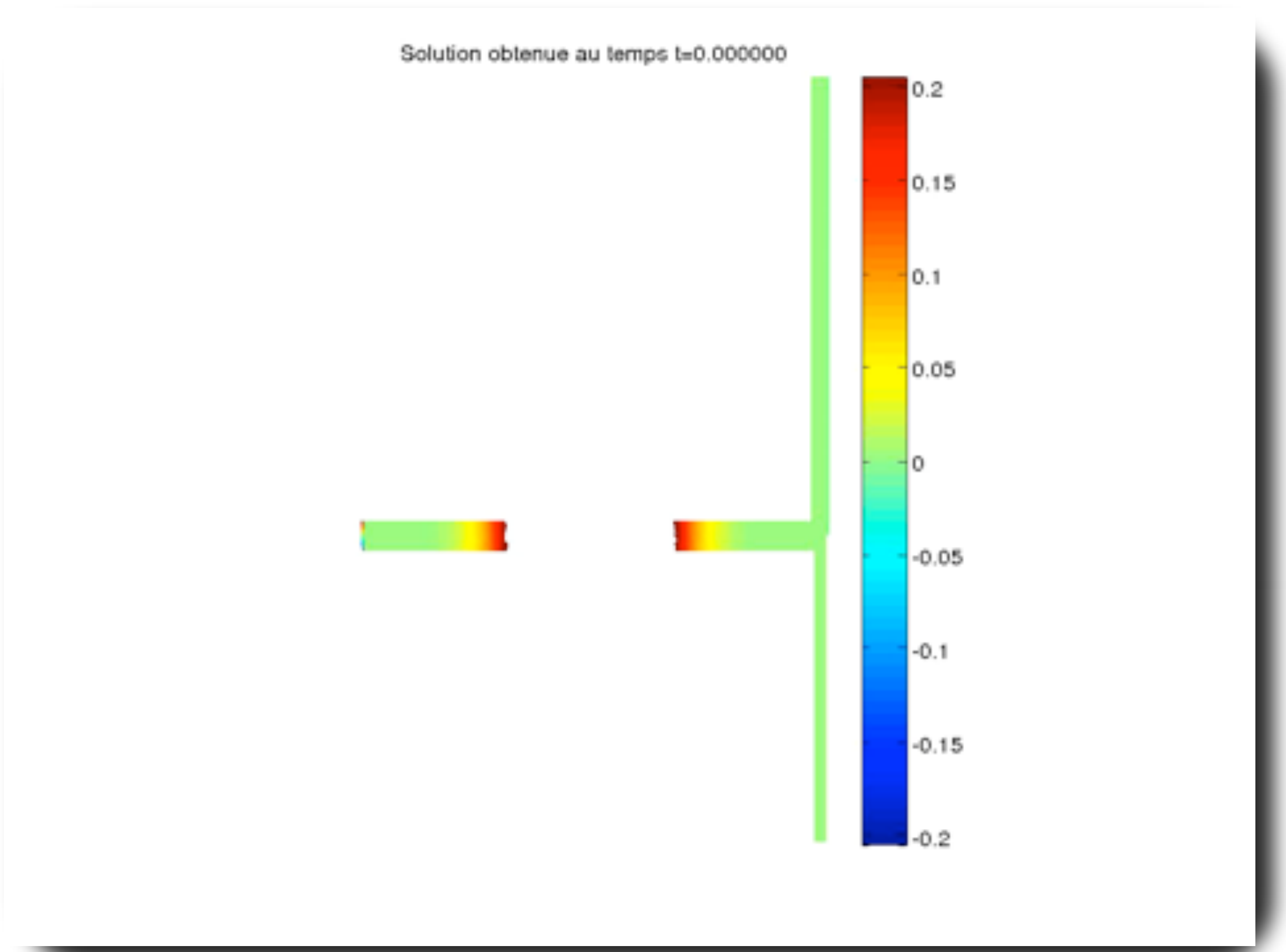
Résolution 1D du problème limite - code NetWaves



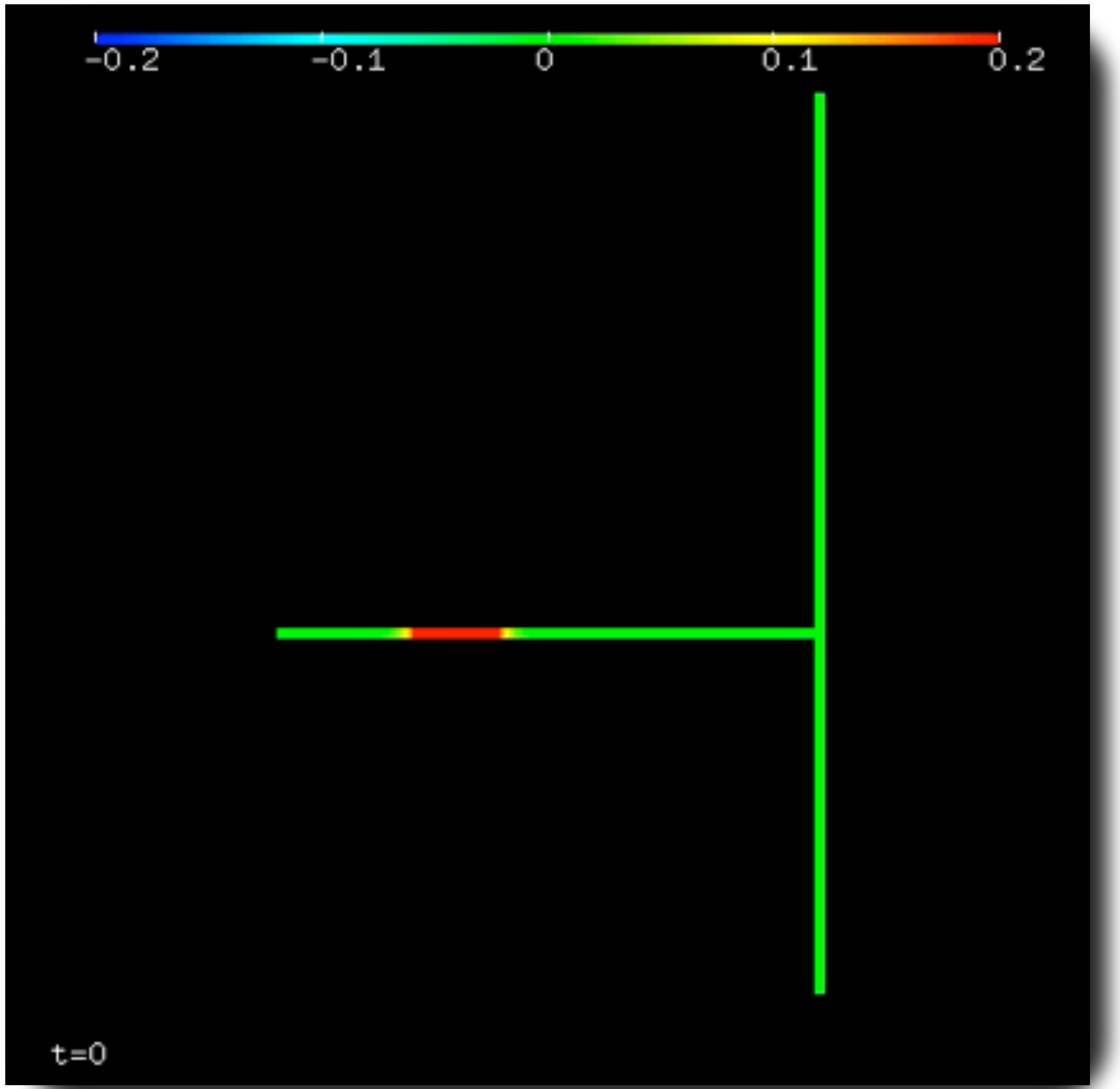
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE INRIA

- Expérience numérique: 3 fentes, avec $c_1=1$, $c_2=0.4$ et $c_3=0.6$.
- Données de Cauchy à supports inclus dans la première fente.

Résolution 2D exacte - script Matlab



Résolution 1D du problème limite - code NetWaves



- Réflexion observée sur la solution du problème exact, PAS sur la solution du problème limite ⇒ définition de conditions améliorées de Kirchhoff.

Un outil: les développements asymptotiques

Un outil: les développements asymptotiques

- La littérature sur les développements asymptotiques raccordés est conséquente, mais nous pouvons en première approximation distinguer deux écoles (avec très peu de références croisées):

- La littérature sur les développements asymptotiques raccordés est conséquente, mais nous pouvons en première approximation distinguer deux écoles (avec très peu de références croisées):
  - L'école britannique

D. G. Crighton *et al*, *Modern methods in Analytical Acoustics*. Lectures Notes, Springer Verlag, 1229. An Asymptotic Analysis.

Un outil: les développements asymptotiques

- La littérature sur les développements asymptotiques raccordés est conséquente, mais nous pouvons en première approximation distinguer deux écoles (avec très peu de références croisées):
  - L'école britannique
  - L'école russe

D. G. Crighton *et al*, *Modern methods in Analytical Acoustics*. Lectures Notes, Springer Verlag, 1229. An Asymptotic Analysis.

A. M. Il'in, *Matching of Asymptotic Expansions of Boundary value Problems*. Translations of Mathematical Monographs., 162(1992), translated from Russian by V. Michalin.

Un outil: les développements asymptotiques

- La littérature sur les développements asymptotiques raccordés est conséquente, mais nous pouvons en première approximation distinguer deux écoles (avec très peu de références croisées):
  - L'école britannique
  - L'école russe

D. G. Crighton *et al*, *Modern methods in Analytical Acoustics*. Lectures Notes, Springer Verlag, 1229. An Asymptotic Analysis.

A. M. Il'in, *Matching of Asymptotic Expansions of Boundary value Problems*. Translations of Mathematical Monographs., 162(1992), translated from Russian by V. Michalin.

- Au sein de l'EPI POems, nous retrouvons également des travaux sur les développements asymptotiques:

P. Joly and S. Tordeux, *Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: the asymptotic expansion.* Multiscale Modeling and Simulation: a SIAM Interdisciplinary Journal, 2006, 5(1): pp 304-336.

P. Joly and A. Semin, *Construction and Analysis of Improved Kirchhoff Conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots.* ESAIM Proceedings, 25(2008): pp 44-67.

Un outil: les développements asymptotiques

- La littérature sur les développements asymptotiques raccordés est conséquente, mais nous pouvons en première approximation distinguer deux écoles (avec très peu de références croisées):
  - L'école britannique
  - L'école russe

D. G. Crighton *et al*, *Modern methods in Analytical Acoustics.* Lectures Notes, Springer Verlag, 1229. An Asymptotic Analysis.

A. M. Il'in, *Matching of Asymptotic Expansions of Boundary value Problems.* Translations of Mathematical Monographs., 162(1992), translated from Russian by V. Michalin.

- Au sein de l'EPI POems, nous retrouvons également des travaux sur les développements asymptotiques:

P. Joly and S. Tordeux, *Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: the asymptotic expansion.* Multiscale Modeling and Simulation: a SIAM Interdisciplinary Journal, 2006, 5(1): pp 304-336.

P. Joly and A. Semin, *Construction and Analysis of Improved Kirchhoff Conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots.* ESAIM Proceedings, 25(2008): pp 44-67.

- La stratégie globale pour les développements asymptotiques raccordés est:

Un outil: les développements asymptotiques

- La littérature sur les développements asymptotiques raccordés est conséquente, mais nous pouvons en première approximation distinguer deux écoles (avec très peu de références croisées):
  - L'école britannique
  - L'école russe

D. G. Crighton *et al*, *Modern methods in Analytical Acoustics.* Lectures Notes, Springer Verlag, 1229. An Asymptotic Analysis.

A. M. Il'in, *Matching of Asymptotic Expansions of Boundary value Problems.* Translations of Mathematical Monographs., 162(1992), translated from Russian by V. Michalin.

- Au sein de l'EPI POems, nous retrouvons également des travaux sur les développements asymptotiques:

P. Joly and S. Tordeux, *Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: the asymptotic expansion.* Multiscale Modeling and Simulation: a SIAM Interdisciplinary Journal, 2006, 5(1): pp 304-336.

P. Joly and A. Semin, *Construction and Analysis of Improved Kirchhoff Conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots.* ESAIM Proceedings, 25(2008): pp 44-67.

- La stratégie globale pour les développements asymptotiques raccordés est:
  - Découpage géométrique avec recouvrement,

Un outil: les développements asymptotiques

- La littérature sur les développements asymptotiques raccordés est conséquente, mais nous pouvons en première approximation distinguer deux écoles (avec très peu de références croisées):
  - L'école britannique
  - L'école russe

D. G. Crighton *et al*, *Modern methods in Analytical Acoustics*. Lectures Notes, Springer Verlag, 1229. An Asymptotic Analysis.

A. M. Il'in, *Matching of Asymptotic Expansions of Boundary value Problems*. Translations of Mathematical Monographs., 162(1992), translated from Russian by V. Michalin.

- Au sein de l'EPI POems, nous retrouvons également des travaux sur les développements asymptotiques:

P. Joly and S. Tordeux, *Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: the asymptotic expansion*. Multiscale Modeling and Simulation: a SIAM Interdisciplinary Journal, 2006, 5(1): pp 304-336.

P. Joly and A. Semin, *Construction and Analysis of Improved Kirchhoff Conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots*. ESAIM Proceedings, 25(2008): pp 44-67.

- La stratégie globale pour les développements asymptotiques raccordés est:
  - Découpage géométrique avec recouvrement,
  - Écriture d'ansatz et injection des ansatz dans le problème primal,

Un outil: les développements asymptotiques

- La littérature sur les développements asymptotiques raccordés est conséquente, mais nous pouvons en première approximation distinguer deux écoles (avec très peu de références croisées):
  - L'école britannique
  - L'école russe

D. G. Crighton *et al*, *Modern methods in Analytical Acoustics*. Lectures Notes, Springer Verlag, 1229. An Asymptotic Analysis.

A. M. Il'in, *Matching of Asymptotic Expansions of Boundary value Problems*. Translations of Mathematical Monographs., 162(1992), translated from Russian by V. Michalin.

- Au sein de l'EPI POems, nous retrouvons également des travaux sur les développements asymptotiques:

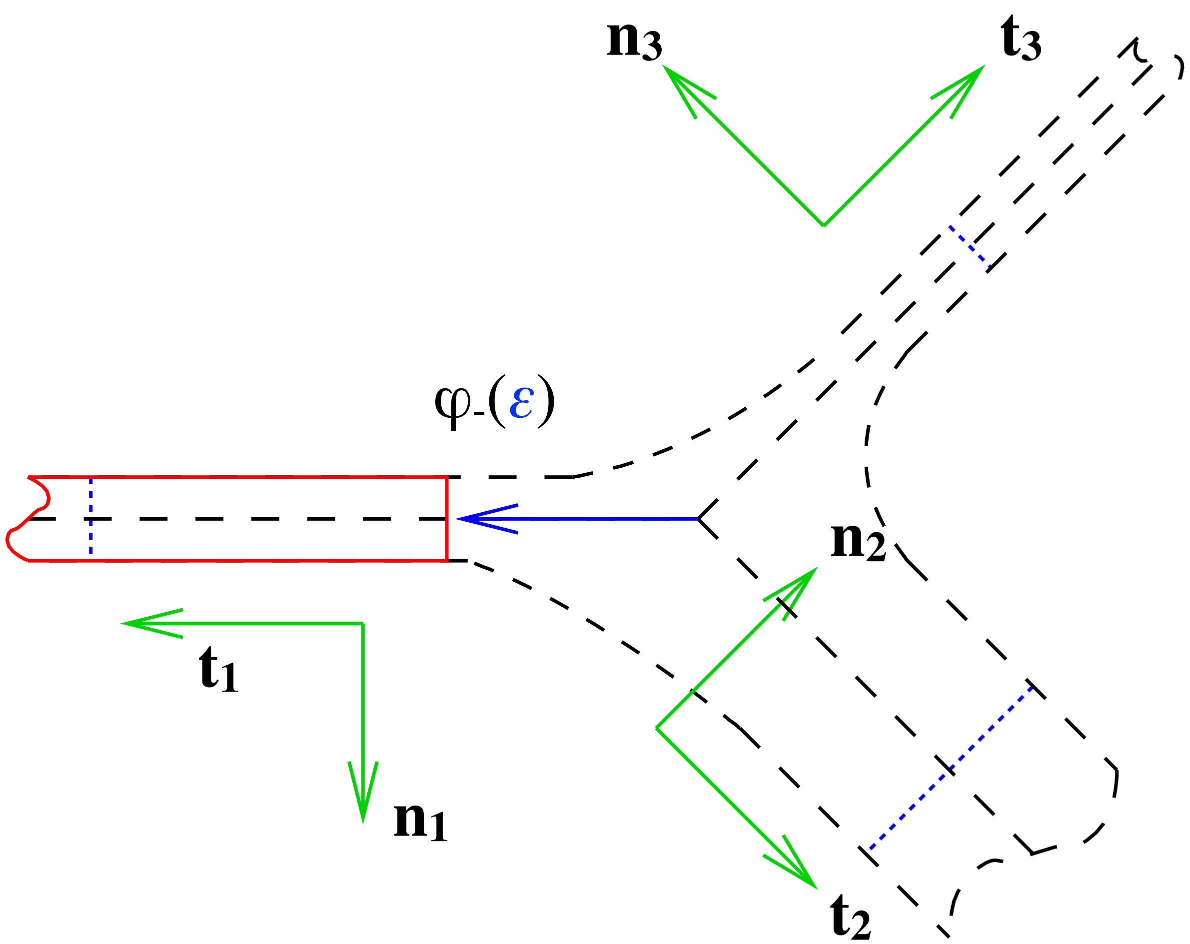
P. Joly and S. Tordeux, *Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: the asymptotic expansion.* Multiscale Modeling and Simulation: a SIAM Interdisciplinary Journal, 2006, 5(1): pp 304-336.

P. Joly and A. Semin, *Construction and Analysis of Improved Kirchhoff Conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots.* ESAIM Proceedings, 25(2008): pp 44-67.

- La stratégie globale pour les développements asymptotiques raccordés est:
  - Découpage géométrique avec recouvrement,
  - Écriture d'ansatz et injection des ansatz dans le problème primal,
  - Écriture de conditions de raccords et justification *a posteriori* des ansatz.

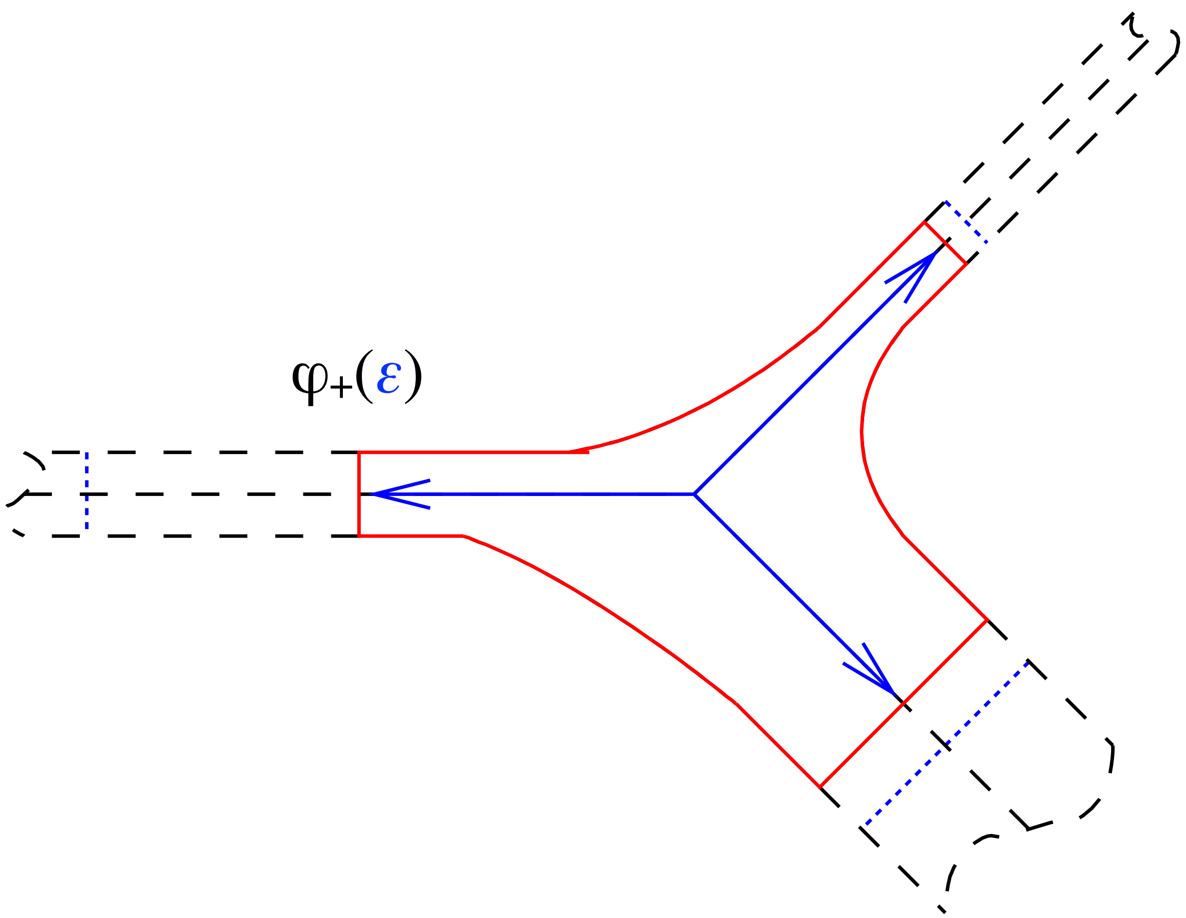
Découpage géométrique

- Nous prenons deux fonctions $\varphi_-(\varepsilon)$ et $\varphi_+(\varepsilon)$ telles que $\varphi_\pm(\varepsilon)\to 0$ et $\varphi_\pm(\varepsilon)/\varepsilon\to\infty$ lorsque $\varepsilon\to 0$.



- Nous prenons deux fonctions $\varphi_-(\varepsilon)$ et $\varphi_+(\varepsilon)$ telles que $\varphi_\pm(\varepsilon)\to 0$ et $\varphi_\pm(\varepsilon)/\varepsilon\to\infty$ lorsque $\varepsilon\to 0$.
- Nous définissons chaque fente $\Omega_i(\varepsilon)$, pour $1\leq i\leq N$, comme étant

$$\Omega_i(\varepsilon) = \left\{\mathbf{x}\in\Omega^\varepsilon \ / \ \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}_i > \varphi_-(\varepsilon) \text{ et } |\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_i| < \frac{\varepsilon c_i}{2}\right\}$$

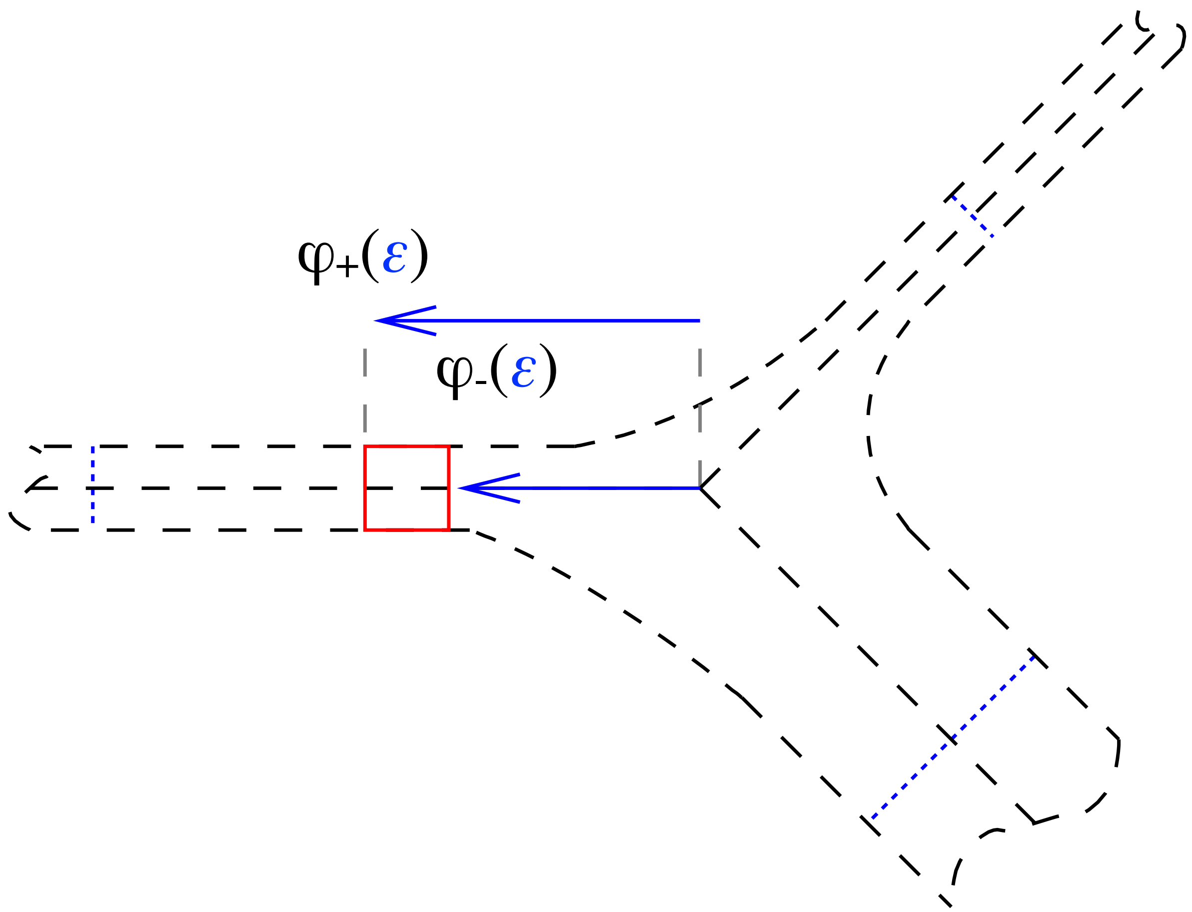


- Nous prenons deux fonctions $\varphi_-(\varepsilon)$ et $\varphi_+(\varepsilon)$ telles que $\varphi_\pm(\varepsilon)\to 0$ et $\varphi_\pm(\varepsilon)/\varepsilon\to\infty$ lorsque $\varepsilon\to 0$.
- Nous définissons chaque fente $\Omega_i(\varepsilon)$, pour $1\leq i\leq N$, comme étant

$$\Omega_i(\varepsilon) = \left\{\mathbf{x}\in\Omega^\varepsilon \ / \ \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}_i > \varphi_-(\varepsilon) \text{ et } |\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_i| < \frac{\varepsilon c_i}{2}\right\}$$

- Nous définissons la jonction $\Omega_J(\varepsilon)$ comme étant

$$\Omega_J(\varepsilon) = \Omega^\varepsilon \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \left\{\mathbf{x}\in\Omega^\varepsilon \ / \ \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}_i > \varphi_+(\varepsilon) \text{ et } |\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_i| < \frac{\varepsilon c_i}{2}\right\}$$



- Nous prenons deux fonctions $\varphi_-(\varepsilon)$ et $\varphi_+(\varepsilon)$ telles que $\varphi_\pm(\varepsilon)\to 0$ et $\varphi_\pm(\varepsilon)/\varepsilon\to\infty$ lorsque $\varepsilon\to 0$.
- Nous définissons chaque fente $\Omega_i(\varepsilon)$, pour $1\leq i\leq N$, comme étant

$$\Omega_i(\varepsilon) = \left\{ \mathbf{x}\in\Omega^\varepsilon \ / \ \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}_i > \varphi_-(\varepsilon) \text{ et } |\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_i| < \frac{\varepsilon c_i}{2} \right\}$$

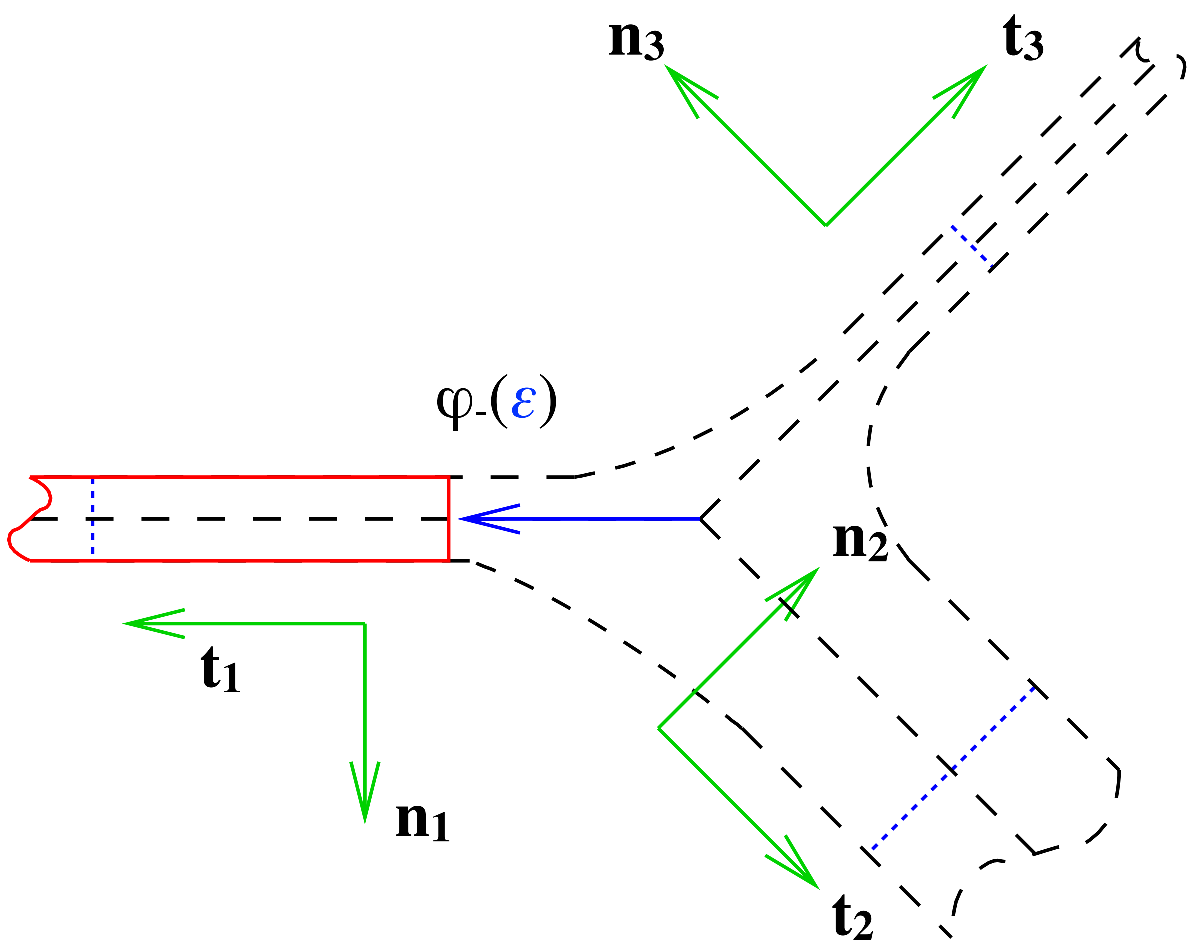
- Nous définissons la jonction $\Omega_J(\varepsilon)$ comme étant

$$\Omega_J(\varepsilon) = \Omega^\varepsilon \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \left\{ \mathbf{x}\in\Omega^\varepsilon \ / \ \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}_i > \varphi_+(\varepsilon) \text{ et } |\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_i| < \frac{\varepsilon c_i}{2} \right\}$$

- Pour $1\leq i\leq N$, le $i^{\text{ème}}$ recouvrement $O_i(\varepsilon)$ est donné par

$$\begin{aligned} O_i(\varepsilon) &= \Omega_i(\varepsilon)\cap\Omega_J(\varepsilon) \\ &= \{\mathbf{x}\in\Omega^\varepsilon \ / \ \varphi_-(\varepsilon) < \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}_i < \varphi_+(\varepsilon)\} \end{aligned}$$

Équations et changement de variable ($i^{\text{ème}}$ fente)



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta u^\varepsilon = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega^\varepsilon \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega^\varepsilon \\ u = f^\varepsilon \quad \text{sur } \{0\} \times \Omega^\varepsilon & \dfrac{\partial u}{\partial t} = g^\varepsilon \quad \text{sur } \{0\} \times \Omega^\varepsilon \end{cases}$$

- Changement de variables:

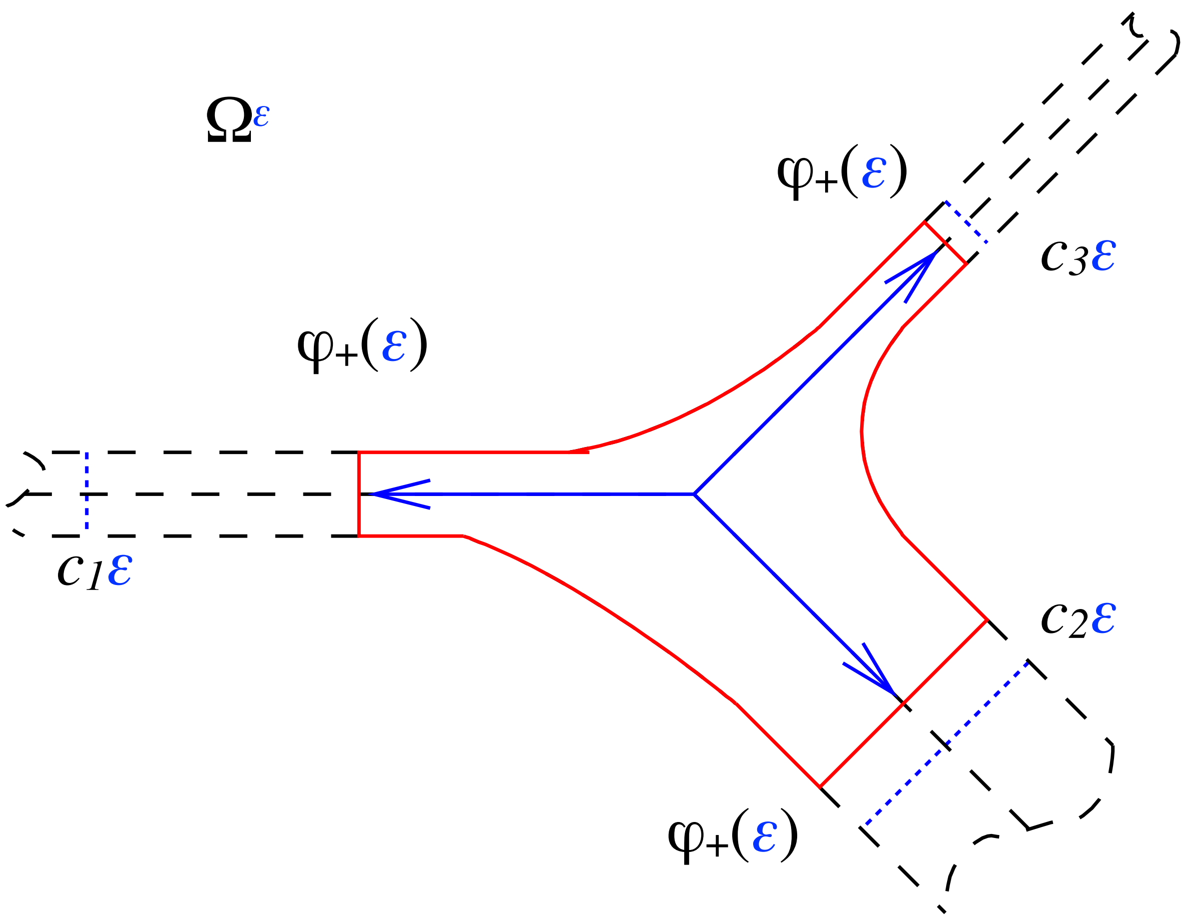
$$s_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}_i$$
$$\nu_i = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i$$

- Ansatz

$$u^\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_i^k(t, s_i, \nu_i) + o(\varepsilon)^\infty$$

- Résultats obtenus (après injection):
  - chaque fonction u_i^k ne dépend pas de la variable ν_i,
  - chaque fonction u_i^k satisfait l'équation d'onde 1D suivante:

$$\frac{\partial^2 u_i^k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial s_i^2} = 0$$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta u^\varepsilon = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega^\varepsilon \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega^\varepsilon \\ u = f^\varepsilon \quad \text{sur } \{0\} \times \Omega^\varepsilon & \dfrac{\partial u}{\partial t} = g^\varepsilon \quad \text{sur } \{0\} \times \Omega^\varepsilon \end{cases}$$

- Changement de variable:

$$\hat{\mathbf{x}} = \varepsilon^{-1}\mathbf{x}$$

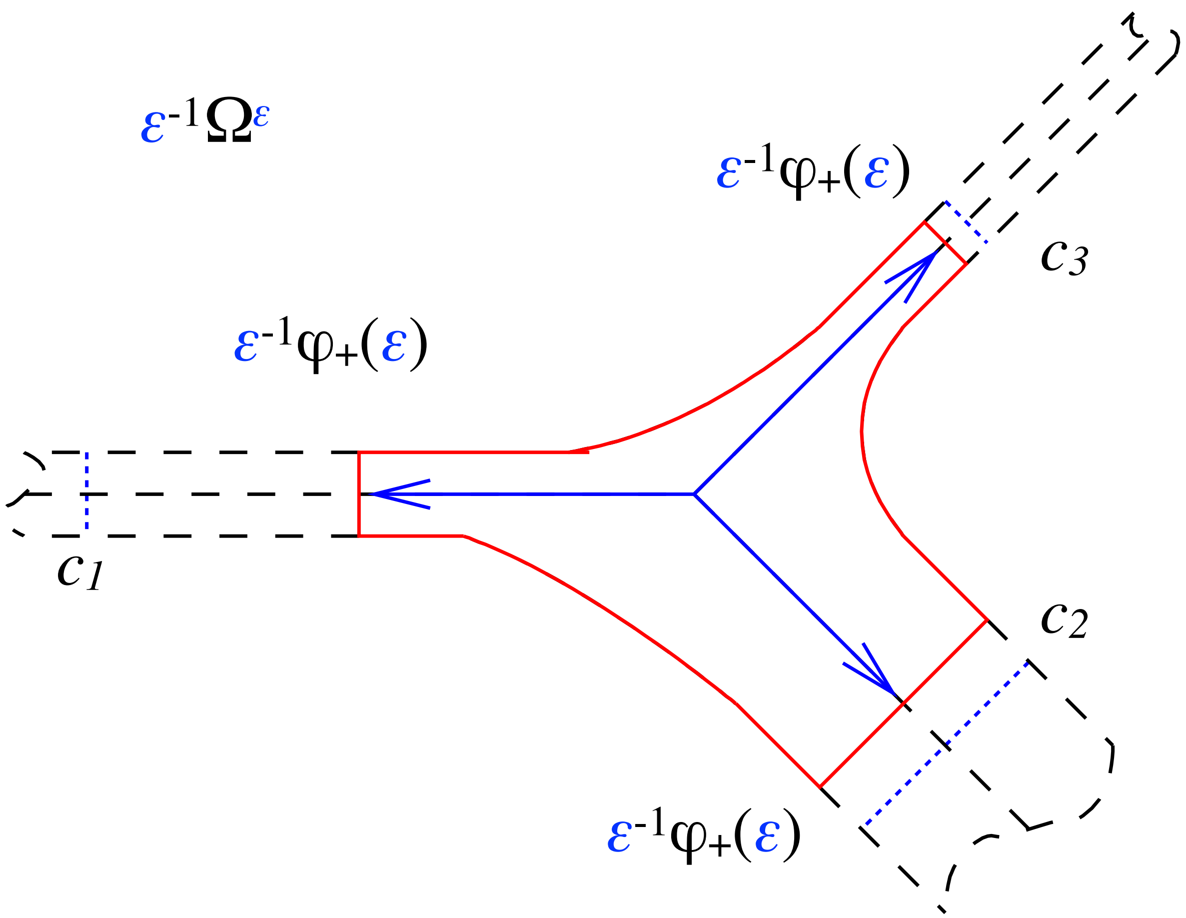
- Ansatz

$$u^\varepsilon(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U^k(t,\widehat{\mathbf{x}}) + o(\varepsilon)^\infty$$

- Résultats obtenus (après injection):
  - les fonctions $U^0(t,\bullet)$ et $U^1(t,\bullet)$ sont harmoniques,
  - les fonctions $U^k(t,\bullet)$, pour $k\geq 2$, sont solutions de l'EDP suivante:

$$\Delta U^k(t,\cdot) = \frac{\partial^2 U^{k-2}}{\partial t^2}(t,\cdot)$$

  - + condition de Neumann homogène au bord latéral de la jonction.



$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta u^\varepsilon = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega^\varepsilon \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega^\varepsilon \\ u = f^\varepsilon \quad \text{sur } \{0\} \times \Omega^\varepsilon \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} = g^\varepsilon \quad \text{sur } \{0\} \times \Omega^\varepsilon \end{array}\right.$$

- Changement de variable:

  $$\hat{\mathbf{x}} = \varepsilon^{-1}\mathbf{x}$$

- Ansatz

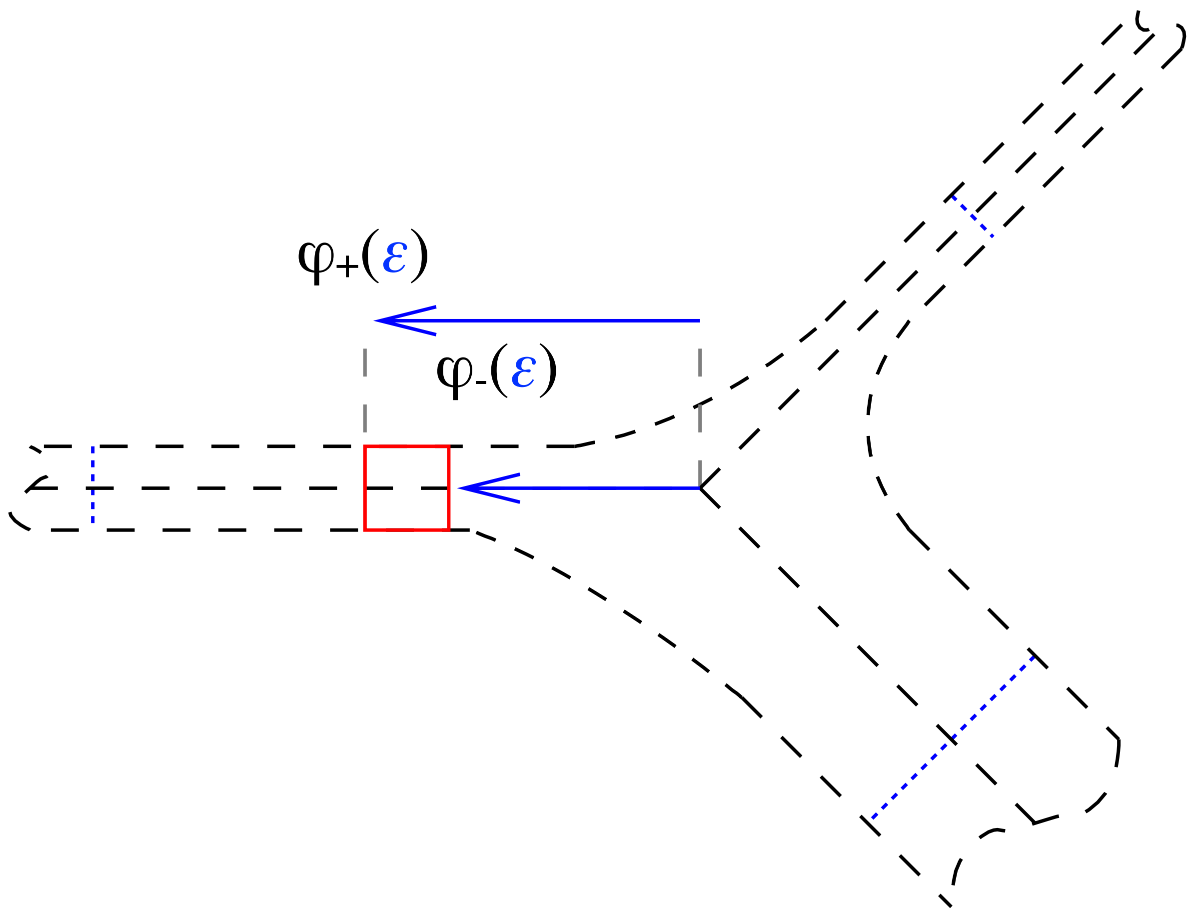
  $$u^\varepsilon(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U^k(t,\widehat{\mathbf{x}}) + o(\varepsilon)^\infty$$

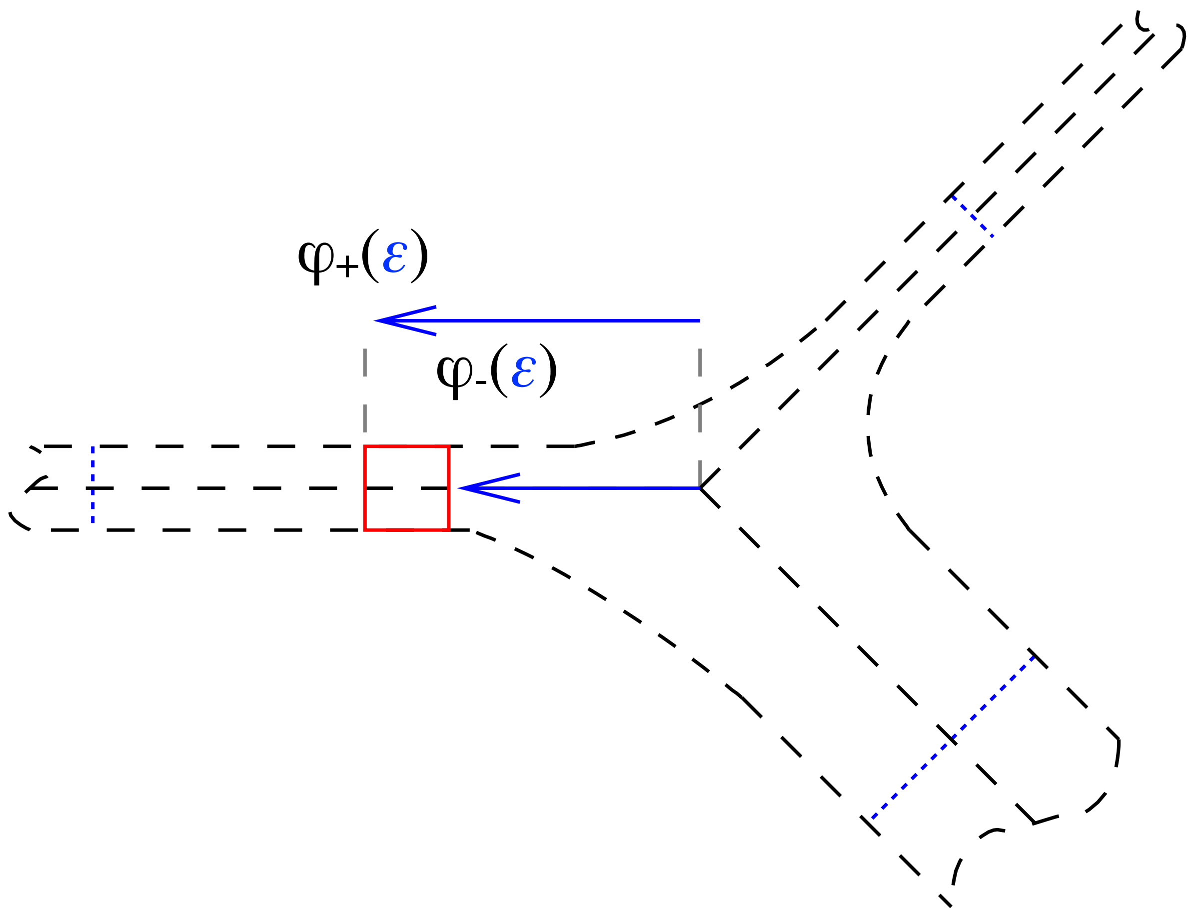
- Résultats obtenus (après injection):
  - les fonctions $U^0(\mathrm{t},\bullet)$ et $U^1(\mathrm{t},\bullet)$ sont harmoniques,
  - les fonctions $U^k(\mathrm{t},\bullet)$, pour $k \geq 2$, sont solutions de l'EDP suivante:

    $$\Delta U^k(t,\cdot) = \frac{\partial^2 U^{k-2}}{\partial t^2}(t,\cdot)$$

  - + condition de Neumann homogène au bord latéral de la jonction.

Écriture des conditions de raccords



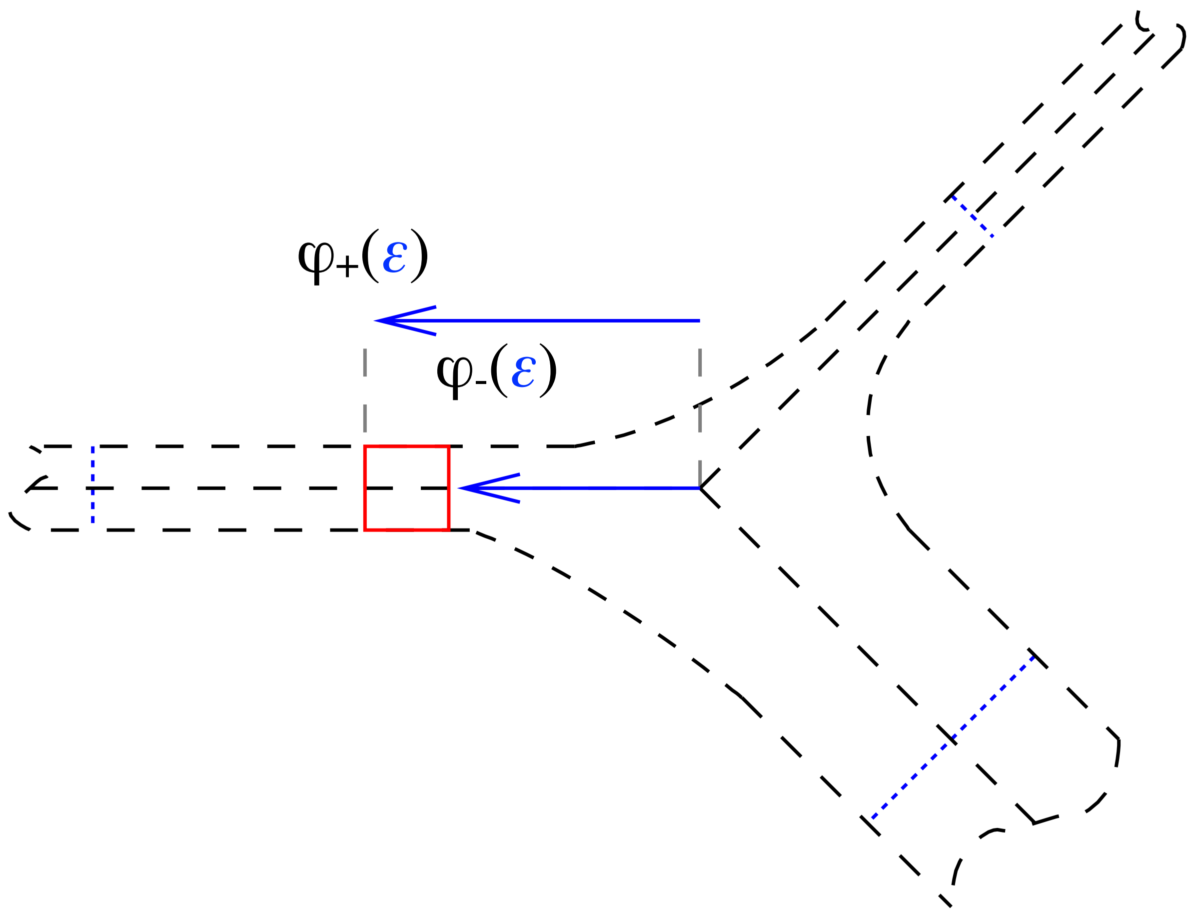


- Sur le domaine de raccord $O_i(\varepsilon)$, nous avons deux ansatz:

$$u^\varepsilon(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_i^k(t, \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}_i) + o(\varepsilon)^\infty$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U^k(t, \varepsilon^{-1}\mathbf{x}) + o(\varepsilon)^\infty$$

Écriture des conditions de raccords

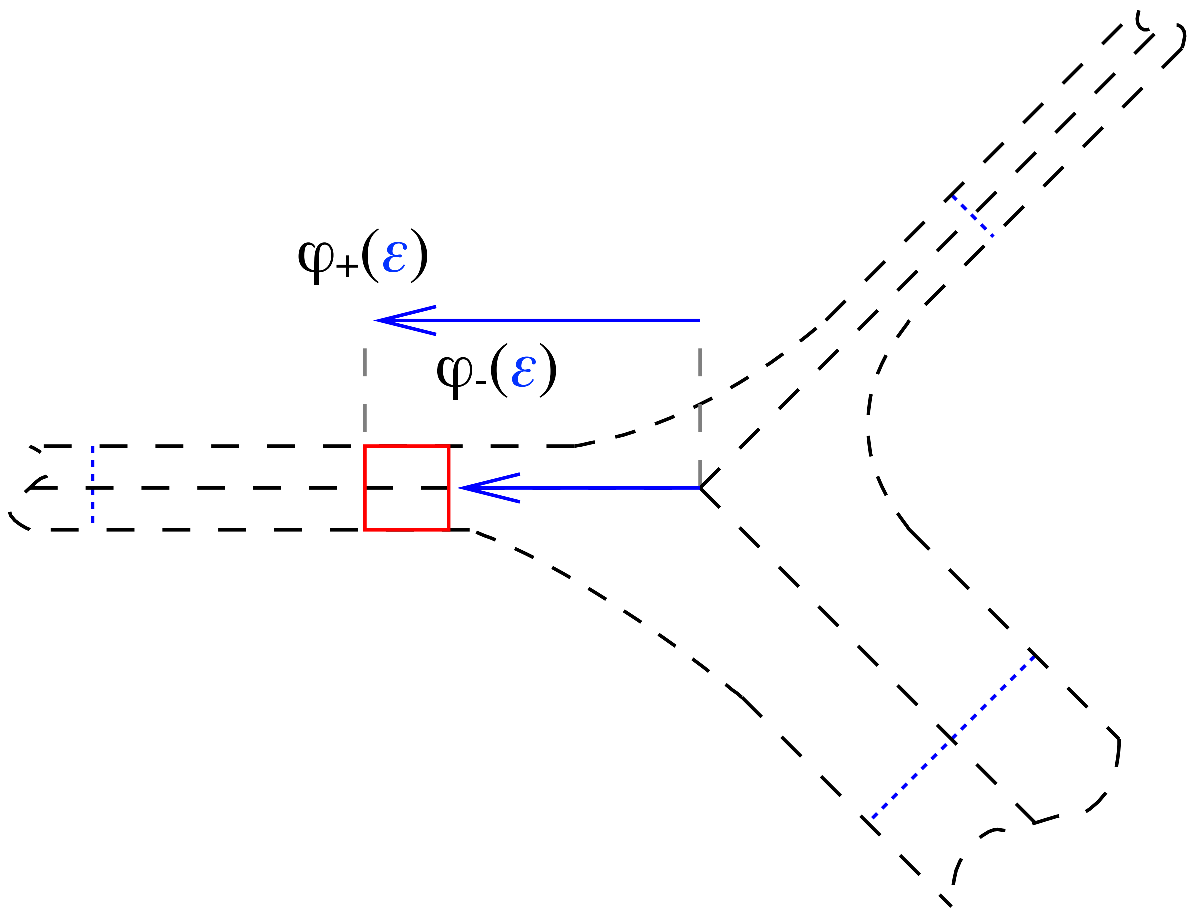


- Sur le domaine de raccord $O_i(\varepsilon)$, nous avons deux ansatz:

$$u^\varepsilon(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_i^k(t, \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}_i) + o(\varepsilon)^\infty$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U^k(t, \varepsilon^{-1}\mathbf{x}) + o(\varepsilon)^\infty$$

- Ces deux ansatz doivent être égaux.

⇒Permet de relier les fonctions u_i^k et les fonctions U^k



- Sur le domaine de raccord $O_i(\varepsilon)$, nous avons deux ansatz:

$$u^\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_i^k(t, \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}_i) + o(\varepsilon)^\infty$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U^k(t, \varepsilon^{-1}\mathbf{x}) + o(\varepsilon)^\infty$$

- Ces deux ansatz doivent être égaux.

⇒Permet de relier les fonctions u_i^k et les fonctions U^k

Théorème [Joly-Semin 2009]

Il existe N+1 uniques familles de fonctions (u_i^k) et (U^k) satisfaisant

$$\frac{\partial^2 u_i^k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial s_i^2} = 0 \qquad \Delta U^k(t,\cdot) = \frac{\partial^2 U^{k-2}}{\partial t^2}(t,\cdot) \qquad \text{raccord}$$

Écriture des cond. améliorées de Kirchhoff

Écriture des cond. améliorées de Kirchhoff

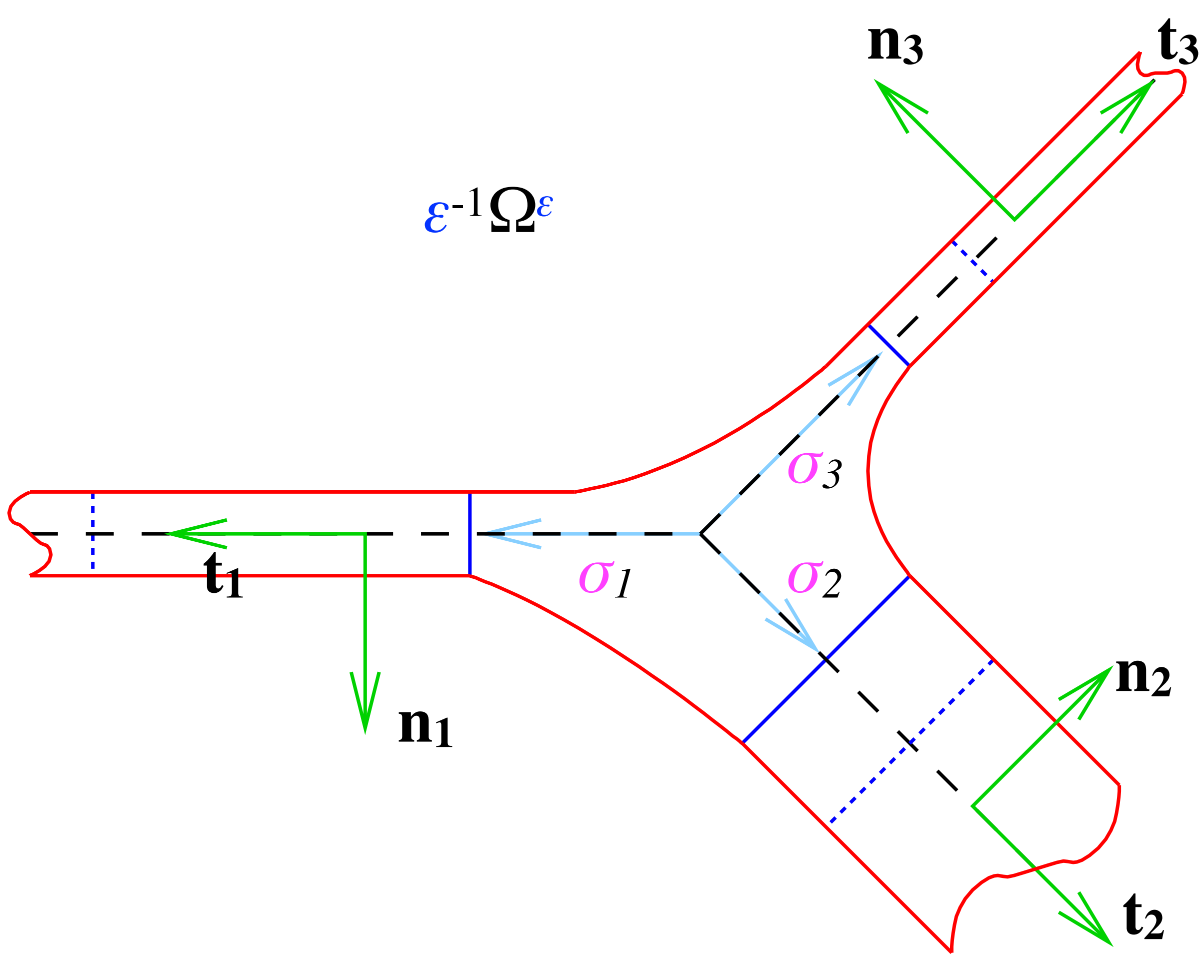
- Stratégie:

- Stratégie:
  - Les fonctions U^k étant définies sur un domaine infini, restreindre ce domaine en utilisant des opérateurs non-locaux Dirichlet-to-Neumann.

Écriture des cond. améliorées de Kirchhoff

- Stratégie:
  - Les fonctions U^k étant définies sur un domaine infini, restreindre ce domaine en utilisant des opérateurs non-locaux Dirichlet-to-Neumann.
  - À partir des informations sur les fonctions u_i^k et U^k , faire apparaître les u_i^k comme des données de Dirichlet ou de Neumann du problème que satisfait U^k.

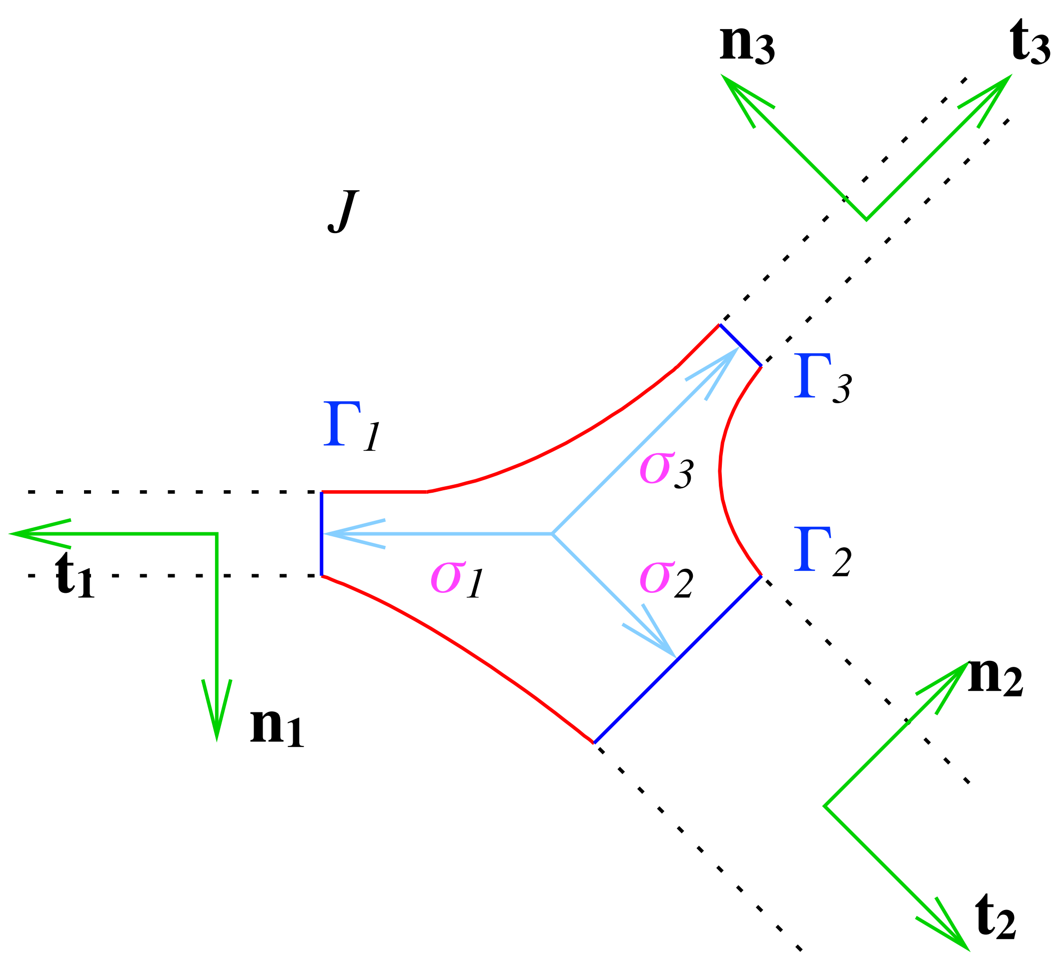
- Stratégie:
    - Les fonctions U^k étant définies sur un domaine infini, restreindre ce domaine en utilisant des opérateurs non-locaux Dirichlet-to-Neumann.
    - À partir des informations sur les fonctions u_i^k et U^k , faire apparaître les u_i^k comme des données de Dirichlet ou de Neumann du problème que satisfait U^k.
    - En déduire des conditions de transmission sur les u_i^k qui ne font plus intervenir la résolution des U^k.



- Sur le domaine $\varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon$, nous introduisons, pour la $i^{\text{ème}}$ fente, σ_i comme le plus petit réel tel que

$$\forall \mathbf{x} \in \varepsilon^{-1}\Omega^\varepsilon \text{ tel que}$$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{t_i} > \sigma_i, \text{ nous avons } 2|\mathbf{x}\cdot\mathbf{n_i}| < c_i$$

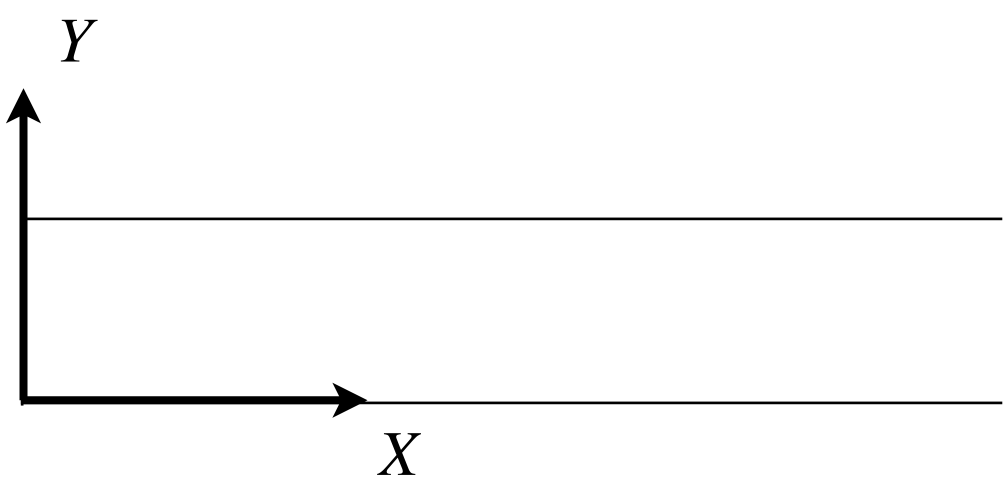


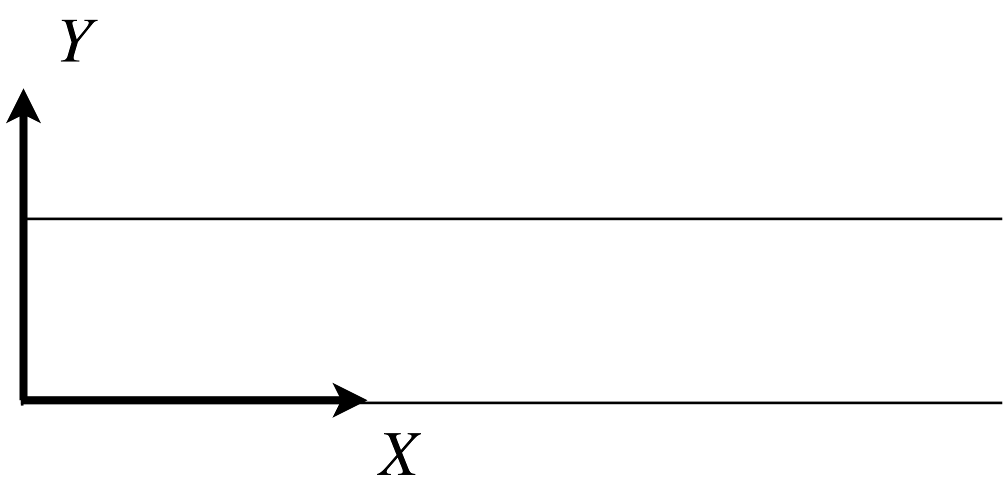
- Sur le domaine $\varepsilon^{-1}\Omega^{\varepsilon}$, nous introduisons, pour la $i^{\text{ème}}$ fente, σ_i comme le plus petit réel tel que
$$\forall \mathbf{x} \in \varepsilon^{-1}\Omega^{\varepsilon} \text{ tel que}$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{t_i} > \sigma_i, \text{ nous avons } 2|\mathbf{x}\cdot\mathbf{n_i}| < c_i$$

- Nous définissons alors la jonction canonique J en retirant les «rectangles» donnés ci-dessus.

- Nous définissons alors le $i^{\text{ème}}$ bord tronqué Γ_i comme
$$\Gamma_i = \{\mathbf{x} \in \overline{J} \text{ tel que}$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{t_i} = \sigma_i \text{ et } 2|\mathbf{x}\cdot\mathbf{n_i}| < c_i\}$$

Restriction du domaine en utilisant des DtN



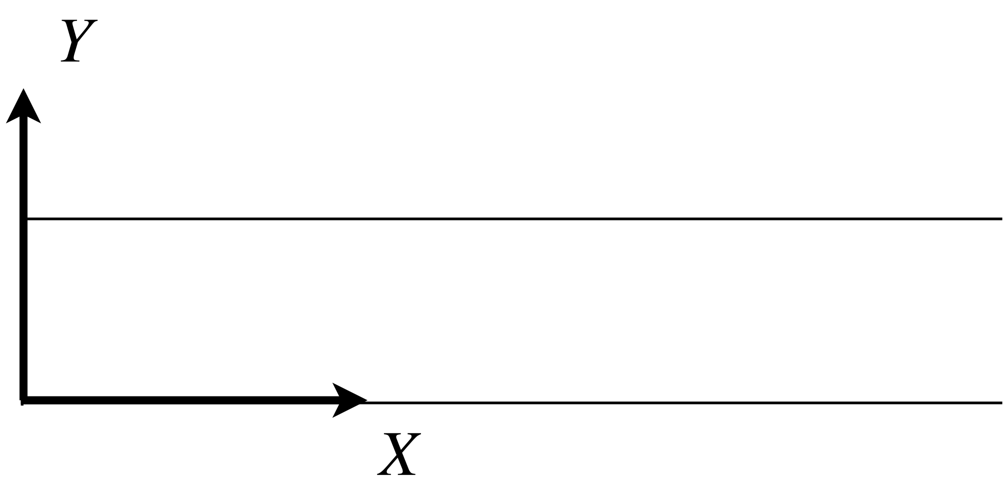


- Nous regardons le problème suivant:

Trouver $U \in \mathrm{H}^1_{loc}(]0,+\infty[\times]0,1[)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta U = 0, \text{ dans }]0,+\infty[\times]0,1[\\ \dfrac{\partial U}{\partial Y} = 0, \text{ sur }]0,+\infty[\times\{0,1\} \\ \lim\limits_{X\to\infty} U(X,Y) - \alpha X - \beta = 0, \ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Restriction du domaine en utilisant des DtN



- Nous regardons le problème suivant:

Trouver $U \in \mathrm{H}^1_{loc}(]0,+\infty[\times]0,1[)$ tel que

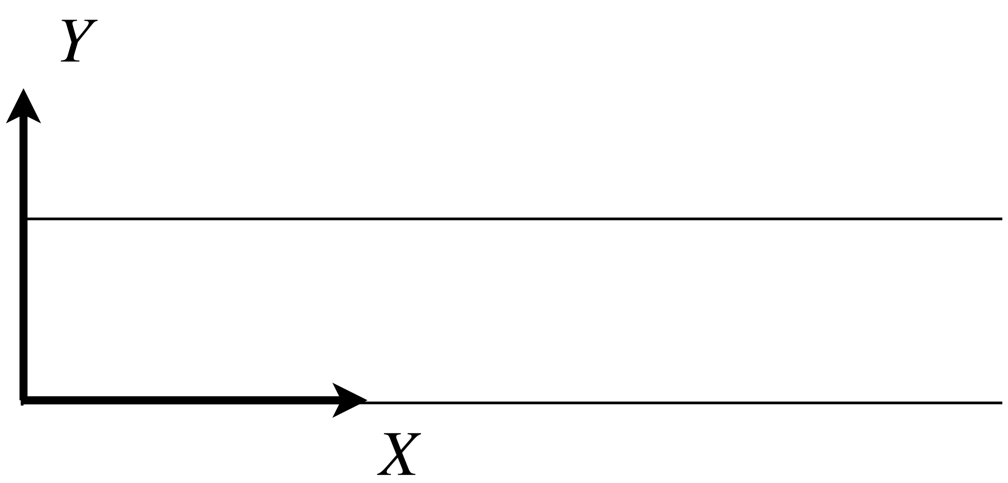
$$\begin{cases} \Delta U = 0, \text{ dans }]0,+\infty[\times]0,1[\\ \dfrac{\partial U}{\partial Y} = 0, \text{ sur }]0,+\infty[\times\{0,1\} \\ \lim\limits_{X\to\infty} U(X,Y) - \alpha X - \beta = 0, \ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R} \end{cases}$$

- Nous pouvons alors écrire U et sa dérivée suivant X sous la forme:

$$U(X,Y) = \alpha X + \beta + \sum_{p\geq 1} \cos(p\pi Y)\exp(-p\pi X)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X}(X,Y) = \alpha - \sum_{p\geq 1} p\pi\cos(p\pi Y)\exp(-p\pi X)$$

Restriction du domaine en utilisant des DtN



- Nous regardons le problème suivant:

Trouver $U \in \mathrm{H}^1_{loc}(]0,+\infty[\times]0,1[)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta U = 0, \text{ dans }]0,+\infty[\times]0,1[\\ \dfrac{\partial U}{\partial Y} = 0, \text{ sur }]0,+\infty[\times\{0,1\} \\ \lim\limits_{X\to\infty} U(X,Y) - \alpha X - \beta = 0, \ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R} \end{cases}$$

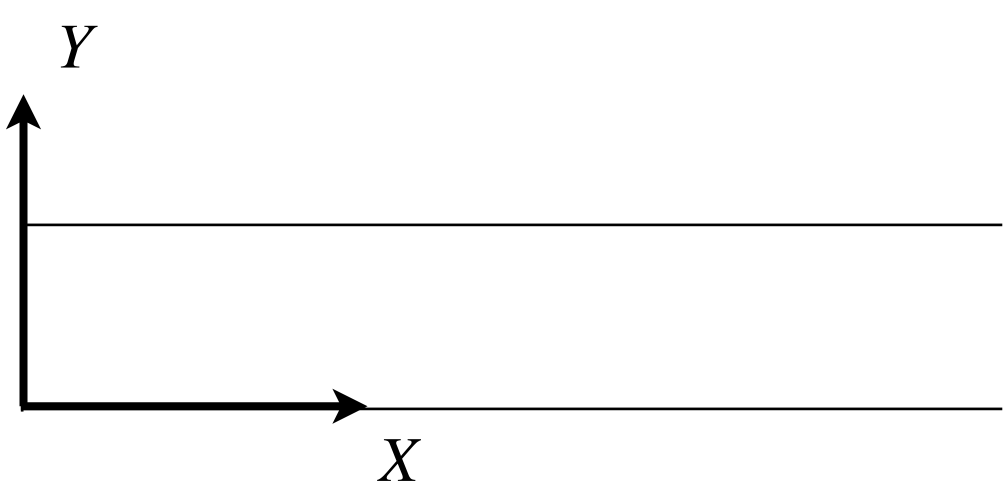
- Nous pouvons alors écrire U et sa dérivée suivant X sous la forme:

$$U(X,Y) = \alpha X + \beta + \sum_{p\geq 1} \cos(p\pi Y)\exp(-p\pi X)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X}(X,Y) = \alpha - \sum_{p\geq 1} p\pi\cos(p\pi Y)\exp(-p\pi X)$$

- L'intégration de U suivant le $p^{\text{ème}}$ mode nous donne:

$$\int_0^1 U(X,Y)\cos(p\pi Y) = \frac{1}{2}\exp(-p\pi X)$$



- Nous regardons le problème suivant:

Trouver $U \in \mathrm{H}^1_{loc}(]0,+\infty[\times]0,1[)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta U &=& 0,\ \text{dans }]0,+\infty[\times]0,1[\\ \dfrac{\partial U}{\partial Y} &=& 0,\ \text{sur }]0,+\infty[\times\{0,1\} \\ \lim\limits_{X\to\infty} U(X,Y)-\alpha X-\beta &=& 0,\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R} \end{array}\right.$$

- Nous pouvons alors écrire U et sa dérivée suivant X sous la forme:

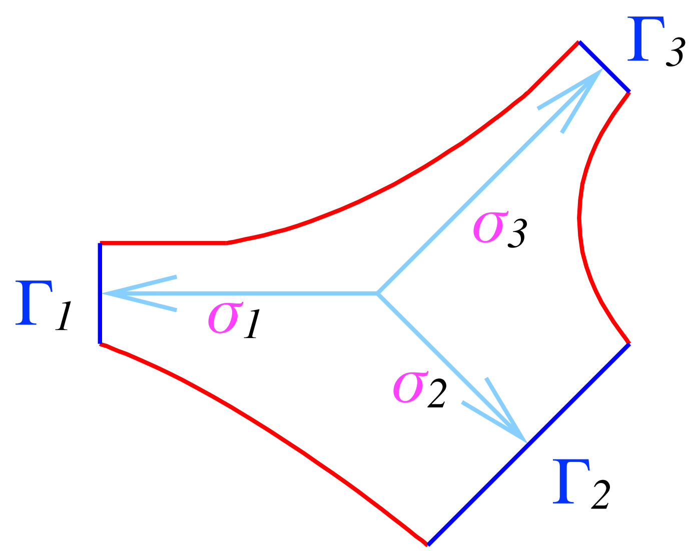
$$\boxed{\begin{array}{l} U(X,Y) = \alpha X + \beta + \sum\limits_{p\geq 1}\cos(p\pi Y)\exp(-p\pi X) \\ \dfrac{\partial U}{\partial X}(X,Y) = \alpha - \sum\limits_{p\geq 1} p\pi\cos(p\pi Y)\exp(-p\pi X) \end{array}}$$

- L'intégration de U suivant le $p^{\text{ème}}$ mode nous donne:

$$\boxed{\int_0^1 U(X,Y)\cos(p\pi Y) = \frac{1}{2}\exp(-p\pi X)}$$

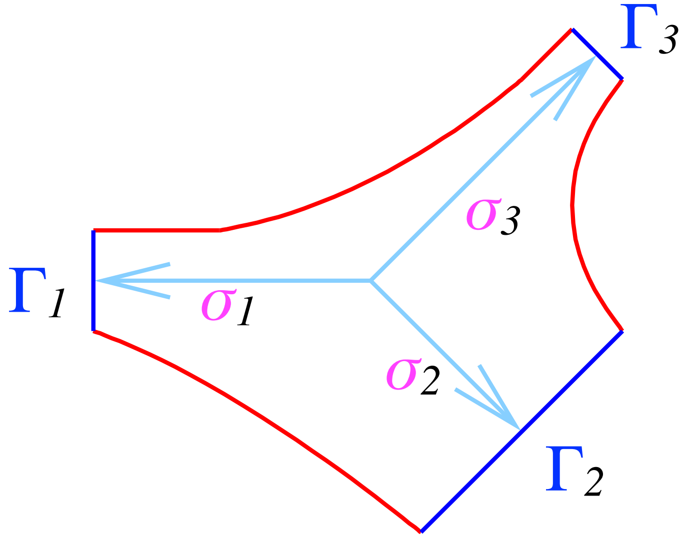
$$\frac{\partial U}{\partial X}(X,Y) + \sum_{p\geq 1} 2p\pi\left(\int_0^1 U(X,Z)\cos(p\pi Z)dZ\right)\cos(p\pi Y) = \alpha \qquad \frac{\partial U}{\partial X} + T\,U = \alpha$$

Problème satisfait par la fonction U^0



- En appelant T_k l'opérateur de troncature T défini sur le bord Γ_k, nous voyons que $U^0(t,\bullet)$ est solution du problème:

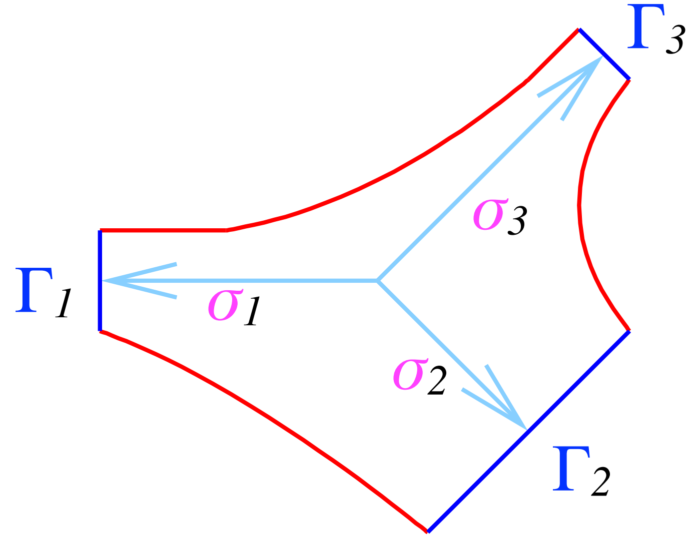
Problème satisfait par la fonction U^0



- En appelant T_k l'opérateur de troncature T défini sur le bord Γ_k, nous voyons que $U^0(t,\bullet)$ est solution du problème:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta U^0(t,\cdot) & = & 0 \text{ dans } J \\ \partial_{\vec{n}} U^0(t,\cdot) & = & 0 \text{ sur } \partial J \setminus \cup \Gamma_k \\ c_k \partial_{\vec{n}} U^0(t,\cdot) + T_k U^0 & = & 0 \text{ sur } \Gamma_k \end{array}\right.$$

Problème satisfait par la fonction U^0

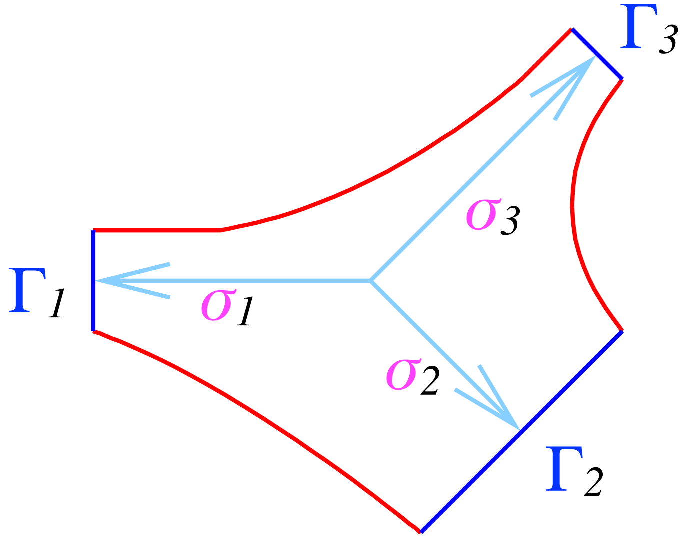


- En appelant T_k l'opérateur de troncature T défini sur le bord Γ_k, nous voyons que $U^0(t,\bullet)$ est solution du problème:

$$\begin{cases} \Delta U^0(t,\cdot) &= 0 \text{ dans } J \\ \partial_{\vec{n}} U^0(t,\cdot) &= 0 \text{ sur } \partial J \setminus \cup \Gamma_k \\ c_k \partial_{\vec{n}} U^0(t,\cdot) + T_k U^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_k \end{cases}$$

- Nous avons la condition de raccord de Dirichlet

$$\int_{\Gamma_k} U^0(t,\cdot) = u_k^0(t,0)$$



- En appelant T_k l'opérateur de troncature T défini sur le bord Γ_k, nous voyons que $U^0(t,\bullet)$ est solution du problème:

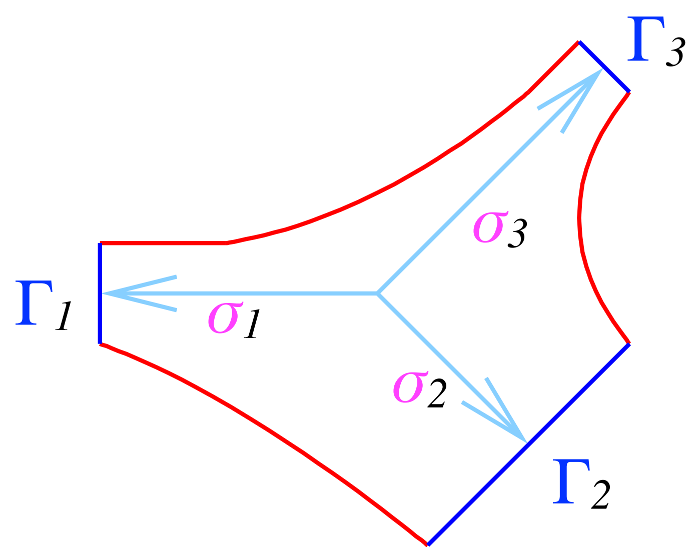
$$\begin{cases} \Delta U^0(t,\cdot) & = & 0 \text{ dans } J \\ \partial_{\vec{n}} U^0(t,\cdot) & = & 0 \text{ sur } \partial J \setminus \cup \Gamma_k \\ c_k \partial_{\vec{n}} U^0(t,\cdot) + T_k U^0 & = & 0 \text{ sur } \Gamma_k \end{cases}$$

- Nous avons la condition de raccord de Dirichlet

$$\int_{\Gamma_k} U^0(t,\cdot) = u_k^0(t,0)$$

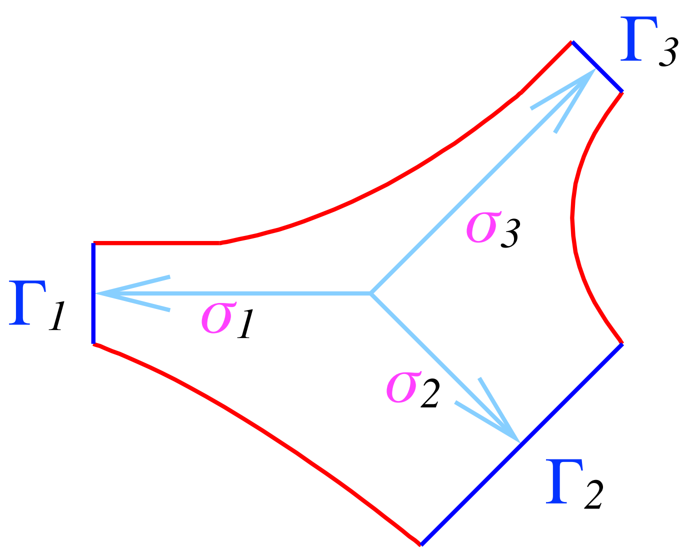
Proposition

La fonction $U^0(t,\bullet)$ est une fonction constante, et nous retrouvons la continuité de la fonction u^0 au nœud du graphe.



- En appellant T_k l'opérateur de troncature T défini sur le bord Γ_k, nous voyons que $U^1(t,\bullet)$ est solution du problème:

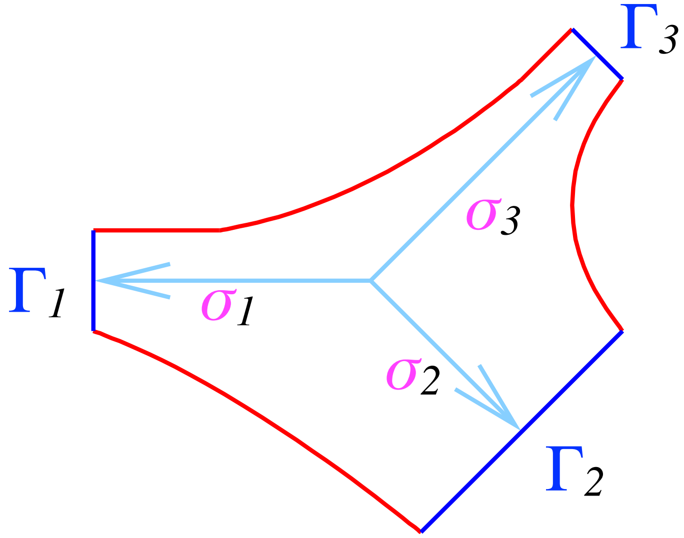
Problème satisfait par la fonction U^1



- En appellant T_k l'opérateur de troncature T défini sur le bord Γ_k, nous voyons que $U^1(t,\bullet)$ est solution du problème:

$$\begin{cases} \Delta U^1(t,\cdot) = 0 \text{ dans } J \\ \partial_{\vec{n}} U^1(t,\cdot) = 0 \text{ sur } \partial J \setminus \cup \Gamma_k \\ c_k \partial_{\vec{n}} U^1(t,\cdot) + T_k U^1 = c_k \dfrac{\partial u^0}{\partial s_k}(t,0) \text{ sur } \Gamma_k \end{cases}$$

Problème satisfait par la fonction U^1



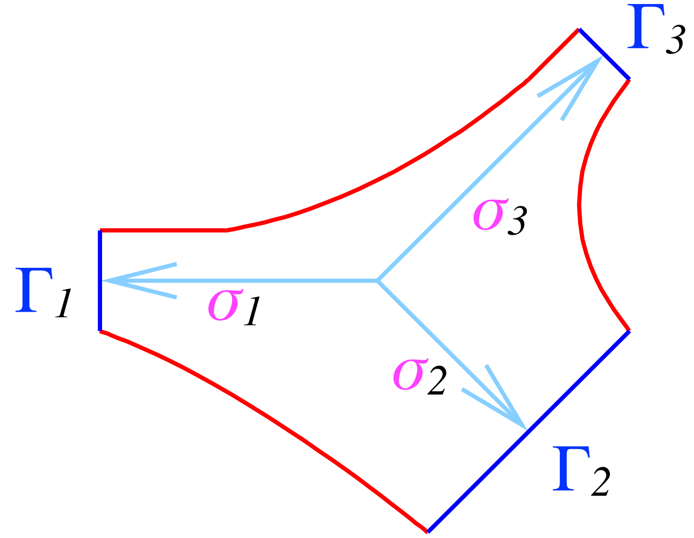
- En appellant T_k l'opérateur de troncature T défini sur le bord Γ_k, nous voyons que $U^1(t,\bullet)$ est solution du problème:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta U^1(t,\cdot) & = & 0 \text{ dans } J \\ \partial_{\vec{n}} U^1(t,\cdot) & = & 0 \text{ sur } \partial J \setminus \cup \Gamma_k \\ c_k \partial_{\vec{n}} U^1(t,\cdot) + T_k U^1 & = & c_k \dfrac{\partial u^0}{\partial s_k}(t,0) \text{ sur } \Gamma_k \end{array}\right.$$

- Nous avons la condition de raccord de Dirichlet

$$\int_{\Gamma_k} U^1(t,\cdot) = u_k^1(t,0) + \sigma_k \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0)$$

Problème satisfait par la fonction U^1



- En appellant T_k l'opérateur de troncature T défini sur le bord Γ_k, nous voyons que $U^1(t,\bullet)$ est solution du problème:

$$\begin{cases} \Delta U^1(t,\cdot) &= 0 \text{ dans } J \\ \partial_{\vec{n}} U^1(t,\cdot) &= 0 \text{ sur } \partial J \setminus \cup \Gamma_k \\ c_k \partial_{\vec{n}} U^1(t,\cdot) + T_k U^1 &= c_k \dfrac{\partial u^0}{\partial s_k}(t,0) \text{ sur } \Gamma_k \end{cases}$$

- Nous avons la condition de raccord de Dirichlet

$$\int_{\Gamma_k} U^1(t,\cdot) = u_k^1(t,0) + \sigma_k \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0)$$

Proposition

La condition de compatibilité sur la fonction $U^1(t,\bullet)$ nous impose alors

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0) = 0$$

Problème satisfait par la fonction U^1

Problème satisfait par la fonction U^1

- Nous appelons P la matrice N-1×N définie par

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problème satisfait par la fonction U^1

- Nous appelons P la matrice N-$1\times N$ définie par

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La relation de la proposition précédente peut se réécrire sous la forme

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left[c_1 \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0), \dots, c_N \frac{\partial u_N^0}{\partial s_k}(t,0) \right] \cdot [1, \dots, 1] = 0$$

Problème satisfait par la fonction U^1

- Nous appelons P la matrice N-1×N définie par

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La relation de la proposition précédente peut se réécrire sous la forme

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0) = 0 \iff \left[c_1 \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0), \dots, c_N \frac{\partial u_N^0}{\partial s_k}(t,0)\right] \cdot [1, \dots, 1] = 0$$

- Nous en déduisons que le vecteur $\left[c_1 \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0), \dots, c_N \frac{\partial u_N^0}{\partial s_k}(t,0)\right]$ vérifie:

$$\left[c_1 \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0), \dots, c_N \frac{\partial u_N^0}{\partial s_k}(t,0)\right] \in (\mathrm{Ker} P)^{\perp} = \mathrm{Im} P^T$$

$$\left[c_1 \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0), \dots, c_N \frac{\partial u_N^0}{\partial s_k}(t,0)\right] = P^T \left[\gamma_1(t), \dots, \gamma_{N-1}(t)\right]$$

Problème satisfait par la fonction U^1

- Nous appelons P la matrice N-1×N définie par

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La relation de la proposition précédente peut se réécrire sous la forme

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[c_1 \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0), \dots, c_N \frac{\partial u_N^0}{\partial s_k}(t,0)\right] \cdot [1,\dots,1] = 0$$

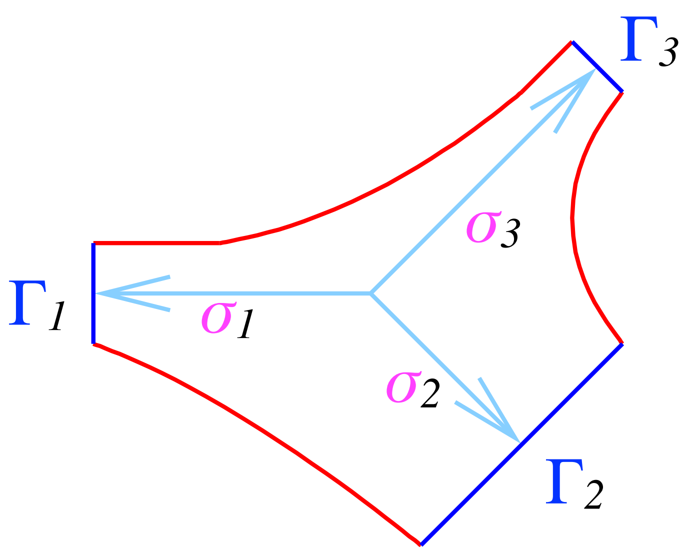
- Nous en déduisons que le vecteur $\left[c_1 \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0), \dots, c_N \frac{\partial u_N^0}{\partial s_k}(t,0)\right]$ vérifie:

$$\left[c_1 \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0), \dots, c_N \frac{\partial u_N^0}{\partial s_k}(t,0)\right] \in (\mathrm{Ker} P)^{\perp} = \mathrm{Im} P^T$$

$$\left[c_1 \frac{\partial u_k^0}{\partial s_k}(t,0), \dots, c_N \frac{\partial u_N^0}{\partial s_k}(t,0)\right] = P^T \left[\gamma_1(t), \dots, \gamma_{N-1}(t)\right]$$

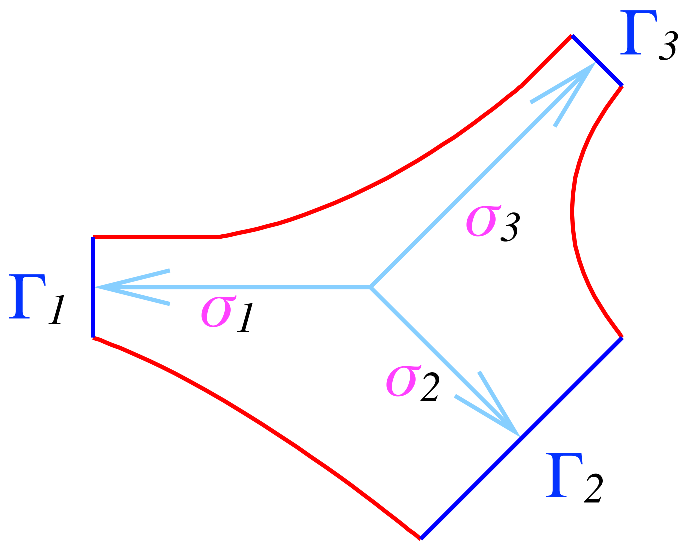
- Nous allons nous servir de ce résultat pour décomposer la fonction $U^1(t,\bullet)$ en décomposant la condition au bord satisfaite par $U^1(t,\bullet)$.

Problème satisfait par la fonction U^1



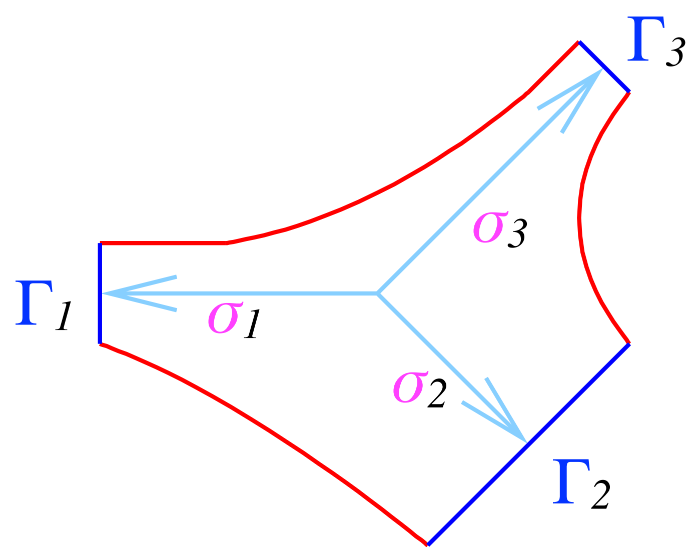
- Nous introduisons alors une collection de fonctions $(W_i \in \mathrm{H}^1(J))_{1\leq i\leq N\text{-}1}$ telles que

Problème satisfait par la fonction U^1



- Nous introduisons alors une collection de fonctions $(W_i \in \mathrm{H}^1(J))_{1 \leq i \leq N-1}$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta W_i & = & 0 \text{ dans } J \\ \partial_{\vec{n}} W_i & = & 0 \text{ sur } \partial J \setminus \cup \Gamma_k \\ c_k \partial_{\vec{n}} W_i + T_k W_i & = & 0 \text{ sur } \Gamma_k, k \neq \{i, i+1\} \\ c_i \partial_{\vec{n}} W_i + T_i W_i & = & -1 \text{ sur } \Gamma_i \\ c_{i+1} \partial_{\vec{n}} W_i + T_{i+1} W_i & = & +1 \text{ sur } \Gamma_{i+1} \\ \displaystyle\int_J W_i & = & 0 \end{array} \right.$$



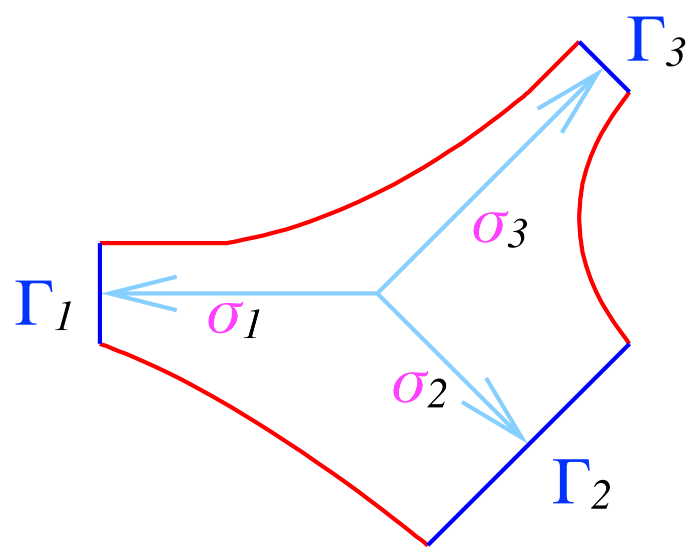
- Nous introduisons alors une collection de fonctions $(W_i \in \mathrm{H}^1(J))_{1 \le i \le N-1}$ telles que

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta W_i &= 0 \text{ dans } J \\ \partial_{\vec{n}} W_i &= 0 \text{ sur } \partial J \setminus \cup \Gamma_k \\ c_k \partial_{\vec{n}} W_i + T_k W_i &= 0 \text{ sur } \Gamma_k, k \neq \{i, i+1\} \\ c_i \partial_{\vec{n}} W_i + T_i W_i &= -1 \text{ sur } \Gamma_i \\ c_{i+1} \partial_{\vec{n}} W_i + T_{i+1} W_i &= +1 \text{ sur } \Gamma_{i+1} \\ \int_J W_i &= 0 \end{aligned} \right.$$

Proposition

La famille de problèmes $(W_i \in \mathrm{H}^1(J))$ est bien définie dans $\mathrm{H}^1(J)$.

Problème satisfait par la fonction U^1



- Nous introduisons alors une collection de fonctions $(W_i \in \mathrm{H}^1(J))_{1\le i\le N-1}$ telles que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta W_i & = & 0 \text{ dans } J \\ \partial_{\vec{n}} W_i & = & 0 \text{ sur } \partial J \setminus \cup \Gamma_k \\ c_k \partial_{\vec{n}} W_i + T_k W_i & = & 0 \text{ sur } \Gamma_k, k \neq \{i, i+1\} \\ c_i \partial_{\vec{n}} W_i + T_i W_i & = & -1 \text{ sur } \Gamma_i \\ c_{i+1} \partial_{\vec{n}} W_i + T_{i+1} W_i & = & +1 \text{ sur } \Gamma_{i+1} \\ \displaystyle\int_J W_i & = & 0 \end{array}\right.$$

Proposition

La famille de problèmes $(W_i \in \mathrm{H}^1(J))$ est bien définie dans $\mathrm{H}^1(J)$.

Proposition

Nous avons

$$U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) W_k + \frac{1}{|J|} \int U^1(t,\cdot)$$

Écriture des conditions de saut

Écriture des conditions de saut

- Nous partons de la relation

$$U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) W_k + \frac{1}{|J|} \int U^1(t,\cdot)$$

Écriture des conditions de saut

- Nous partons de la relation

$$U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) W_k + \frac{1}{|J|} \int U^1(t,\cdot)$$

- Cette relation nous permet d'écrire alors

$$\frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} U^1(t,\cdot) - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) \left(\frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} W_k - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} W_k \right)$$

Écriture des conditions de saut

- Nous partons de la relation

$$U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) W_k + \frac{1}{|J|} \int U^1(t,\cdot)$$

- Cette relation nous permet d'écrire alors

$$\frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} U^1(t,\cdot) - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) \left(\frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} W_k - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} W_k \right)$$

- Il est donc naturel d'introduire la matrice $K \in \mathcal{M}_{N-1}$ par

$$K_{i,j} = \frac{1}{c_{j+1}} \int_{\Gamma_{j+1}} W_i - \frac{1}{c_j} \int_{\Gamma_j} W_i$$

- Nous partons de la relation

$$U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) W_k + \frac{1}{|J|} \int U^1(t,\cdot)$$

- Cette relation nous permet d'écrire alors

$$\frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} U^1(t,\cdot) - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) \left(\frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} W_k - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} W_k \right)$$

- Il est donc naturel d'introduire la matrice $K \in \mathcal{M}_{N\text{-}1}$ par

$$K_{i,j} = \frac{1}{c_{j+1}} \int_{\Gamma_{j+1}} W_i - \frac{1}{c_j} \int_{\Gamma_j} W_i$$

Proposition

K est une matrice symétrique définie positive.

- Nous partons de la relation

$$U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) W_k + \frac{1}{|J|} \int U^1(t,\cdot)$$

- Cette relation nous permet d'écrire alors

$$\frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} U^1(t,\cdot) - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) \left(\frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} W_k - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} W_k \right)$$

- Il est donc naturel d'introduire la matrice $K \in \mathcal{M}_{N\text{-}1}$ par

$$K_{i,j} = \frac{1}{c_{j+1}} \int_{\Gamma_{j+1}} W_i - \frac{1}{c_j} \int_{\Gamma_j} W_i$$

- Nous rappelons la matrice P:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

K est une matrice symétrique définie positive.

- Nous partons de la relation

$$U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t) W_k + \frac{1}{|J|}\int U^1(t,\cdot)$$

- Cette relation nous permet d'écrire alors

$$\frac{1}{c_{i+1}}\int_{\Gamma_{i+1}} U^1(t,\cdot) - \frac{1}{c_i}\int_{\Gamma_i} U^1(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(t)\left(\frac{1}{c_{i+1}}\int_{\Gamma_{i+1}} W_k - \frac{1}{c_i}\int_{\Gamma_i} W_k\right)$$

- Il est donc naturel d'introduire la matrice $K \in \mathcal{M}_{N-1}$ par

$$K_{i,j} = \frac{1}{c_{j+1}}\int_{\Gamma_{j+1}} W_i - \frac{1}{c_j}\int_{\Gamma_j} W_i$$

Proposition

K est une matrice symétrique définie positive.

- Nous rappelons la matrice P:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Nous définissons alors la matrice de saut $\mathcal{J} \in \mathcal{M}_N$ par

$$\mathcal{J} = P^T K^{-1} P$$

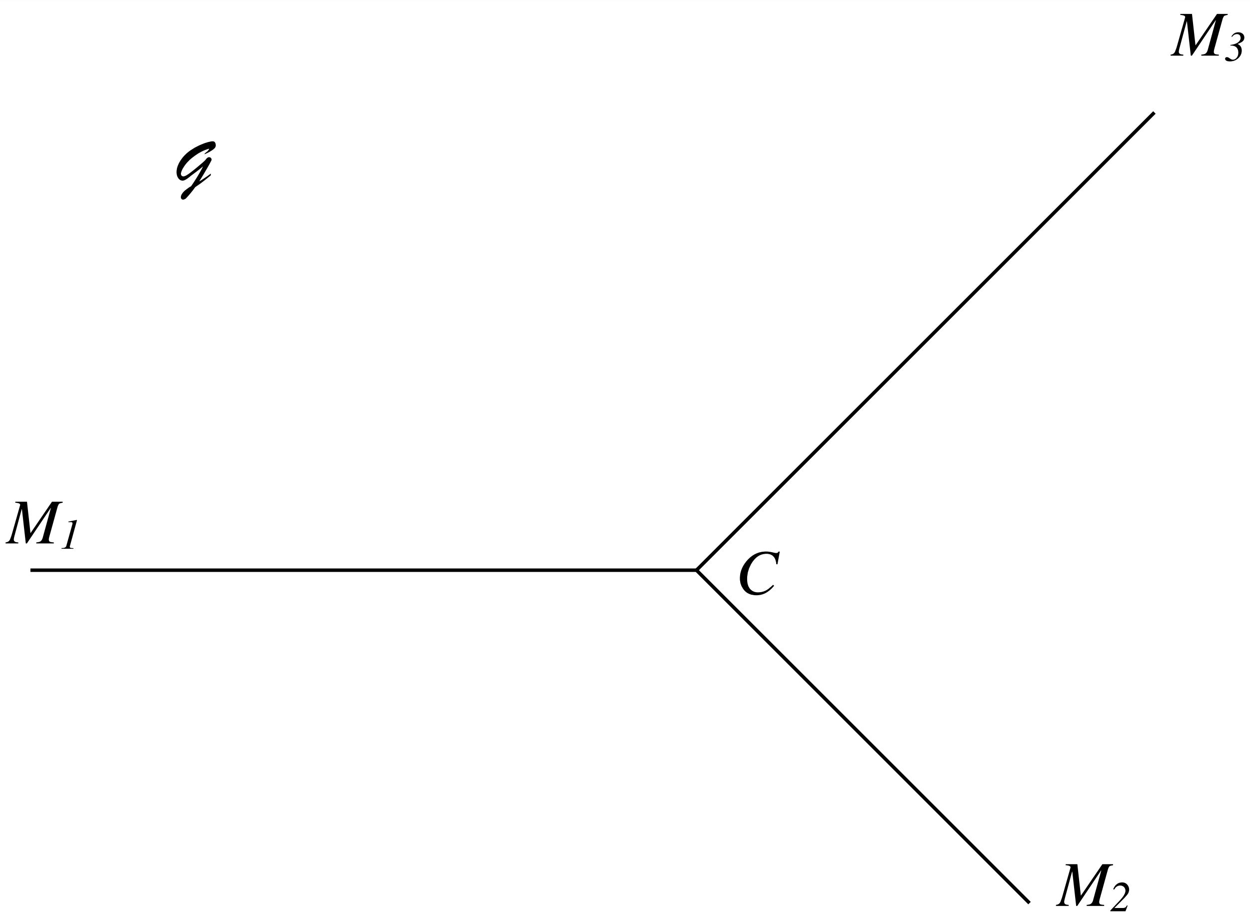
Dernières notations à introduire

- Nous définissons la matrice $\mathcal{A} \in \mathscr{M}_N$ (matrice de moyenne) par

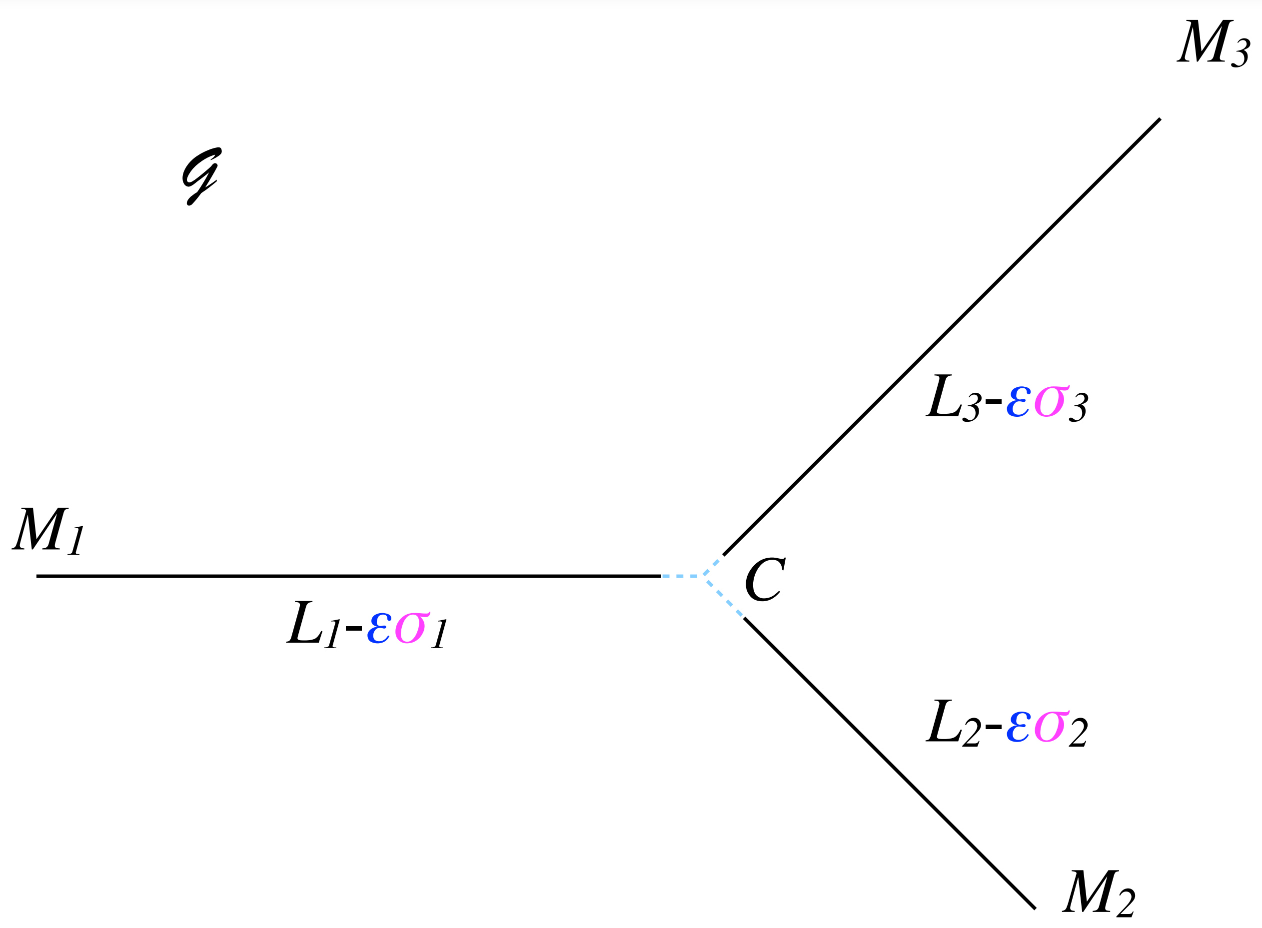
$$\mathcal{A} = \frac{|J|}{N^2} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Nous définissons la matrice $\mathcal{C} \in \mathscr{M}_N$ (matrice de poids) par

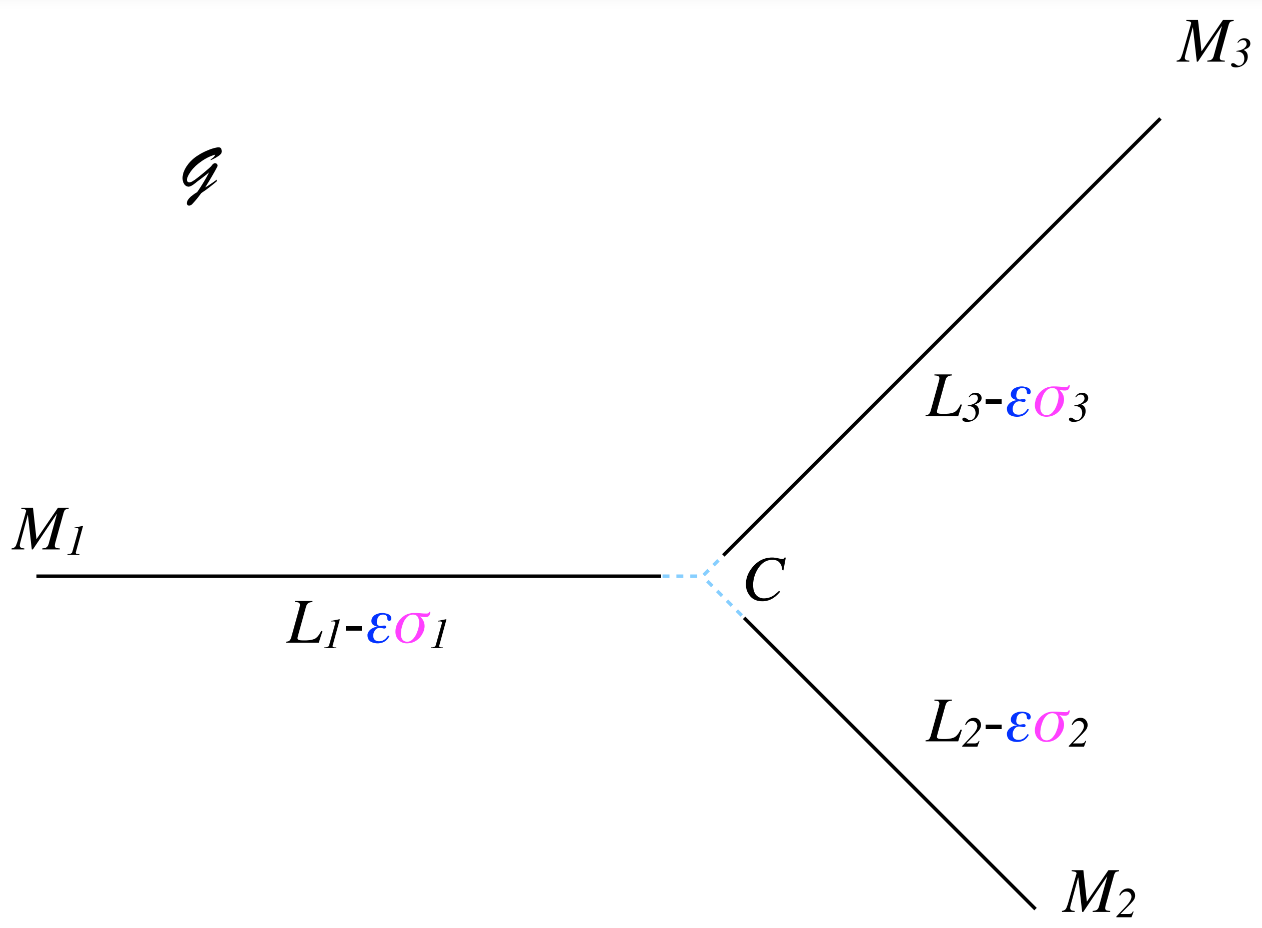
$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c_{N-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_N \end{pmatrix}$$



- Nous paramétrons chaque segment (CM_i) par son abscisse curviligne s_i (avec $s_i = 0$ au point C).



- Nous paramétrons chaque segment (CM_i) par son abscisse curviligne s_i (avec $s_i = 0$ au point C).
- Sur le segment (CM_i), nous introduisons le point $N_i(\varepsilon)$ d'abscisse curviligne $\varepsilon\sigma_i$ (nous avons tracé en pointillés bleus le segment $(CN_i(\varepsilon))$).

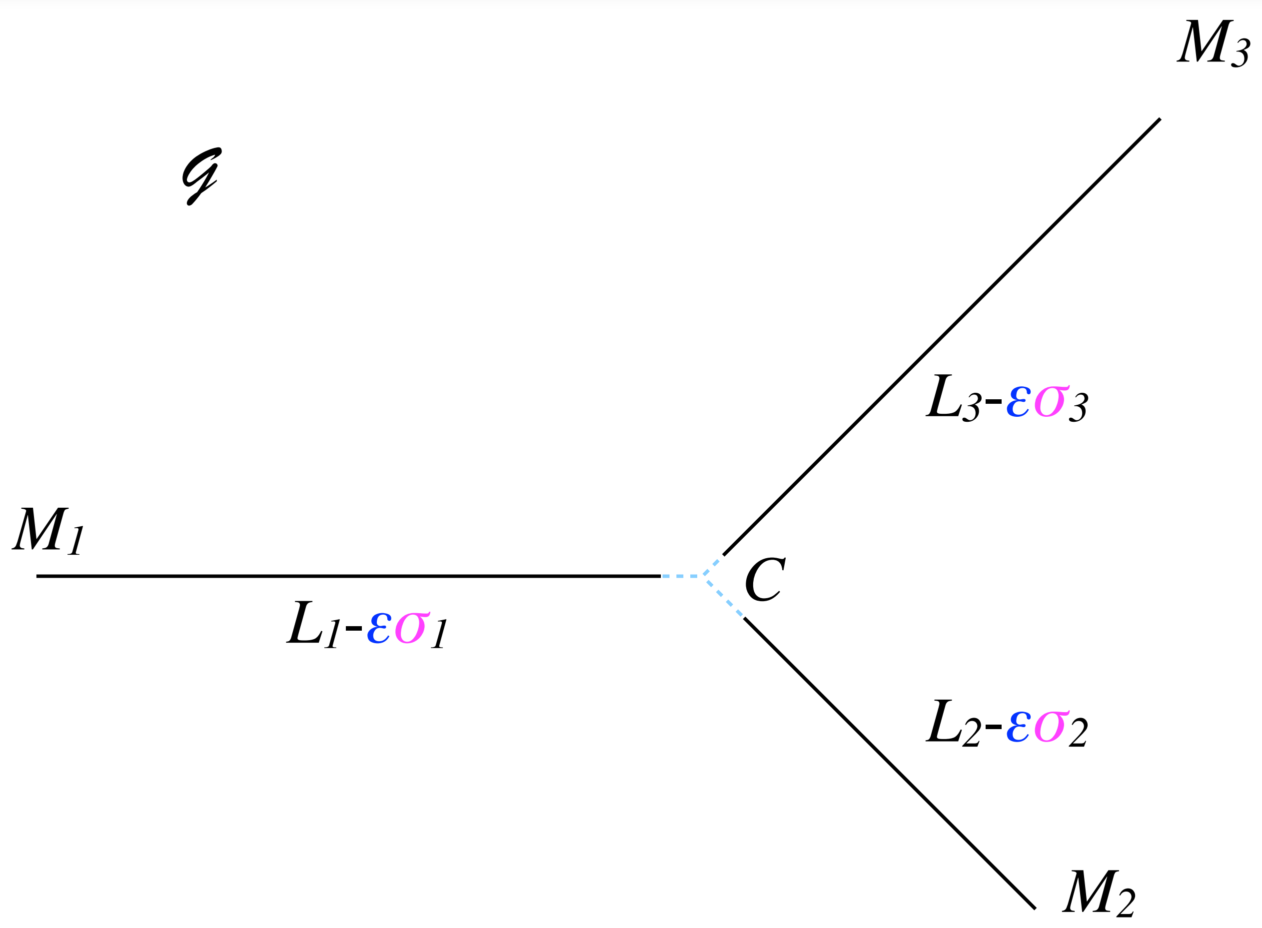


- Nous paramétrons chaque segment (CM_i) par son abscisse curviligne s_i (avec $s_i = 0$ au point C).
- Sur le segment (CM_i), nous introduisons le point $N_i(\varepsilon)$ d'abscisse curviligne $\varepsilon\sigma_i$ (nous avons tracé en pointillés bleus le segment $(CN_i(\varepsilon))$).

- Nous résolvons alors le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta_{1\mathrm{D}}\tilde{u}_i^\varepsilon & = & 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times (N_i^\varepsilon M_i) \\ \dfrac{\partial \tilde{u}_i^\varepsilon}{\partial n} & = & 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \{M_i\} \end{array}\right.$$

Construction du modèle avec Kirchhoff amélioré



- Nous paramétrons chaque segment (CM_i) par son abscisse curviligne s_i (avec $s_i = 0$ au point C).
- Sur le segment (CM_i), nous introduisons le point $N_i(\varepsilon)$ d'abscisse curviligne $\varepsilon\sigma_i$ (nous avons tracé en pointillés bleus le segment $(CN_i(\varepsilon))$).
- Nous résolvons alors le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta_{1\mathrm{D}} \widetilde{u}_i^\varepsilon & = & 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times (N_i^\varepsilon M_i) \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}_i^\varepsilon}{\partial n} & = & 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \{M_i\} \\ \boxed{\mathcal{C}\partial_s U^\varepsilon(t) = \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\mathcal{J} + \varepsilon\mathcal{A}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U^\varepsilon(t)} \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{rcl} U^\varepsilon(t) & = & \left(\widetilde{u}_i^\varepsilon(t, \varepsilon\sigma_i)\right) \\ \partial_s U^\varepsilon(t) & = & \left(\dfrac{\partial \widetilde{u}_i^\varepsilon}{\partial s_i}(t, \varepsilon\sigma_i)\right) \end{array}\right.$$

Comparaison entre K. standard et K. amélioré

- Nous rappelons ici la forme des conditions améliorées de Kirchhoff:

$$(\star) \qquad \mathcal{C}\partial_s U^\varepsilon(t) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{J} + \varepsilon \mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U^\varepsilon(t)$$

- Nous rappelons ici la forme des conditions améliorées de Kirchhoff:

$$(\star) \qquad \mathcal{C}\partial_s U^\varepsilon(t) \;=\; \left(\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{J} + \varepsilon\mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U^\varepsilon(t)$$

- Nous multiplions $(\star)$ par ε et nous prenons la limite formelle lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui nous donne en notant $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$:

$$\mathcal{J}U^0(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U^0(t) = u^0(t)\mathbb{1}$$

Comparaison entre K. standard et K. amélioré

- Nous rappelons ici la forme des conditions améliorées de Kirchhoff:

$$(\star) \qquad \mathcal{C}\partial_s U^\varepsilon(t) \;=\; \left(\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{J} + \varepsilon\mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U^\varepsilon(t)$$

- Nous multiplions $(\star)$ par ε et nous prenons la limite formelle lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui nous donne en notant $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$:

$$\mathcal{J}U^0(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U^0(t) = u^0(t)\mathbb{1}$$

- Nous multiplions $(\star)$ à gauche par $\mathbb{1}^T$ et nous utilisons la relation $\mathbb{1}^T\mathcal{J} = 0$ pour avoir:

$$(\star\star) \qquad \mathbb{1}^T\mathcal{C}\partial_s U^\varepsilon(t) \;=\; \varepsilon\mathbb{1}^T\mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U^\varepsilon(t)$$

- Nous rappelons ici la forme des conditions améliorées de Kirchhoff:

$$(\star) \qquad \mathcal{C}\partial_s U^\varepsilon(t) \;=\; \left(\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{J} + \varepsilon\mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U^\varepsilon(t)$$

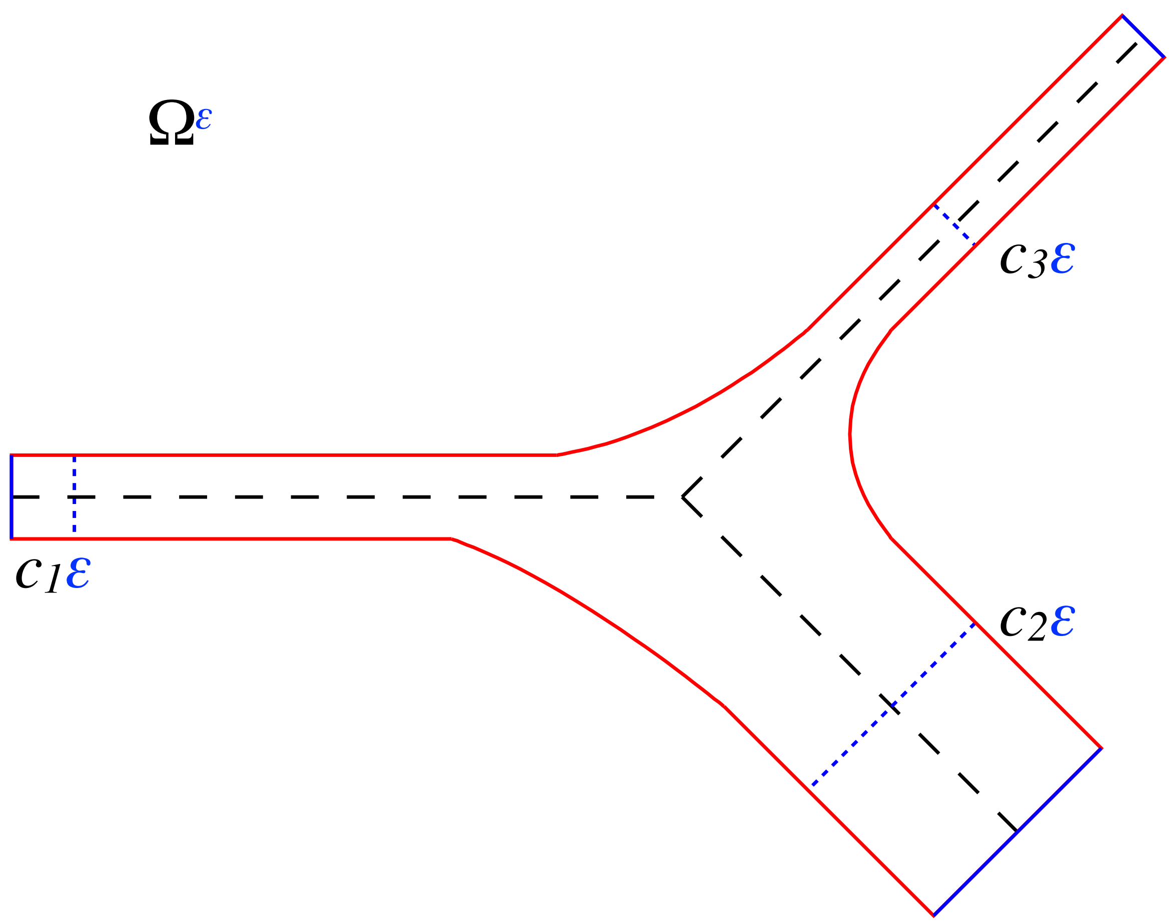
- Nous multiplions $(\star)$ par ε et nous prenons la limite formelle lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui nous donne en notant $\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$:

$$\mathcal{J}U^0(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U^0(t) = u^0(t)\mathbb{1}$$

- Nous multiplions $(\star)$ à gauche par $\mathbb{1}^T$ et nous utilisons la relation $\mathbb{1}^T\mathcal{J} = 0$ pour avoir:

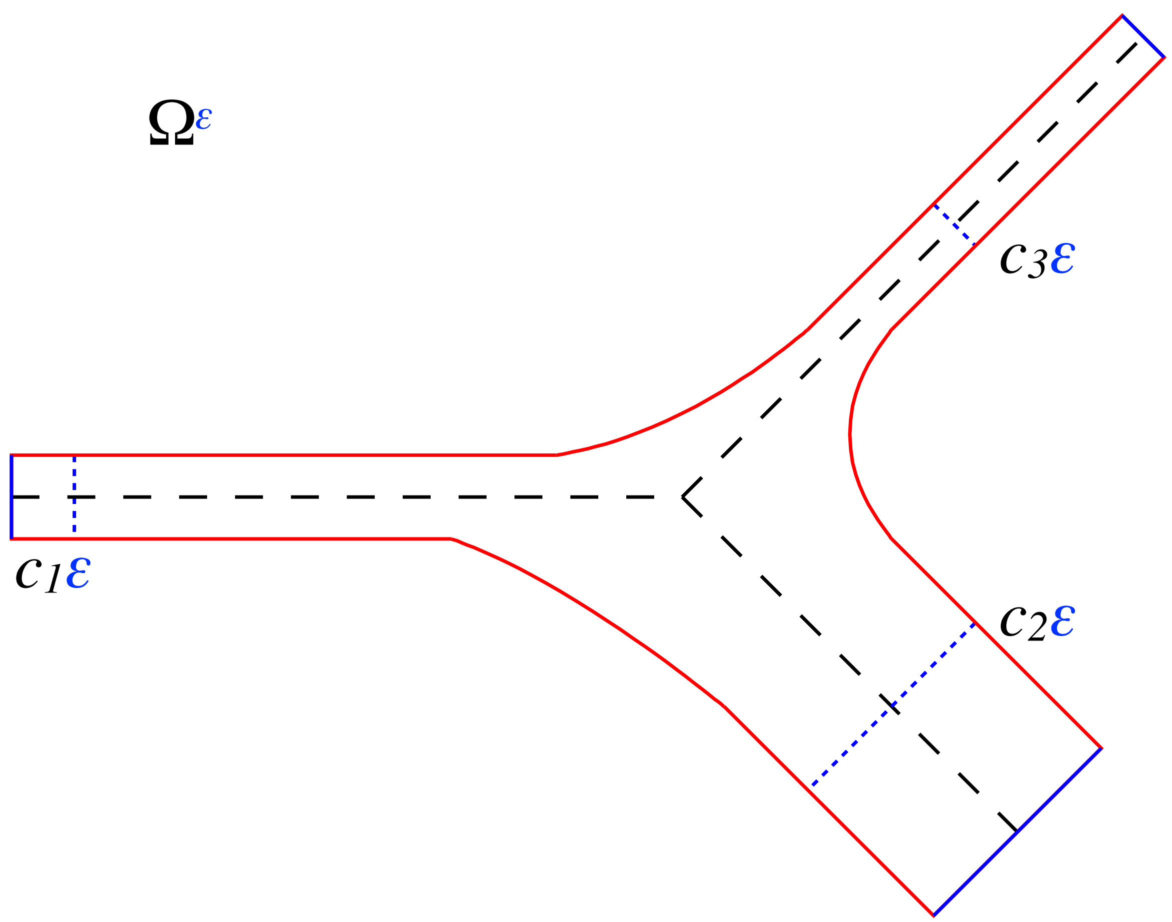
$$(\star\star) \qquad \mathbb{1}^T\mathcal{C}\partial_s U^\varepsilon(t) \;=\; \varepsilon\mathbb{1}^T\mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U^\varepsilon(t)$$

- En prenant la limite formelle dans $(\star\star)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, nous avons $\mathbb{1}^T\mathcal{C}\partial_s U^0(t) \;=\; 0$.



- Pour ε_0 donné, nous définissons l'énergie canonique sur le $i^{\text{ème}}$ segment:

$$\mathcal{E}_i^{\varepsilon_0}(t,v) = \int_{\varepsilon_0\,\sigma_i}^{L_i} \left|\frac{\partial v}{\partial t}(t,s')\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial s_i}(t,s')\right|^2 ds'$$

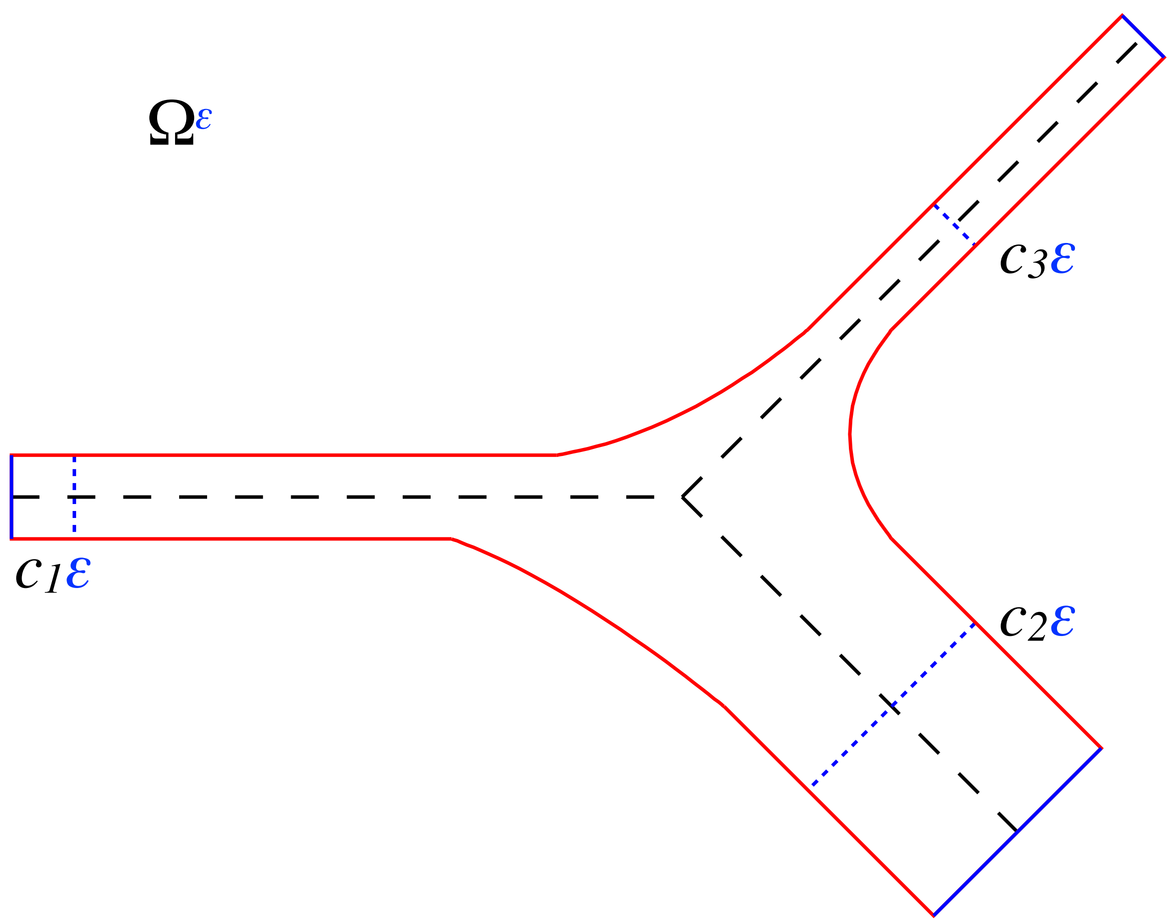


- Pour ε_0 donné, nous définissons l'énergie canonique sur le $i^{\text{ème}}$ segment:

$$\mathcal{E}_i^{\varepsilon_0}(t,v) = \int_{\varepsilon_0\,\sigma_i}^{L_i} \left|\frac{\partial v}{\partial t}(t,s')\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial s_i}(t,s')\right|^2 ds'$$

- Pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, nous définissons la fonction $\overline{u}_i^\varepsilon$ comme l'intégrale transverse normalisée de la fonction u^ε sur le $i^{\text{ème}}$ segment:

$$\overline{u}_i^\varepsilon(t,s_i) = \frac{1}{c_i\varepsilon}\int_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{t_i}=s_i} u^\varepsilon(t,\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x})$$



- Pour ε_0 donné, nous définissons l'énergie canonique sur le $i^{\text{ème}}$ segment:

$$\mathcal{E}_i^{\varepsilon_0}(t,v) = \int_{\varepsilon_0\,\sigma_i}^{L_i} \left|\frac{\partial v}{\partial t}(t,s')\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial s_i}(t,s')\right|^2 ds'$$

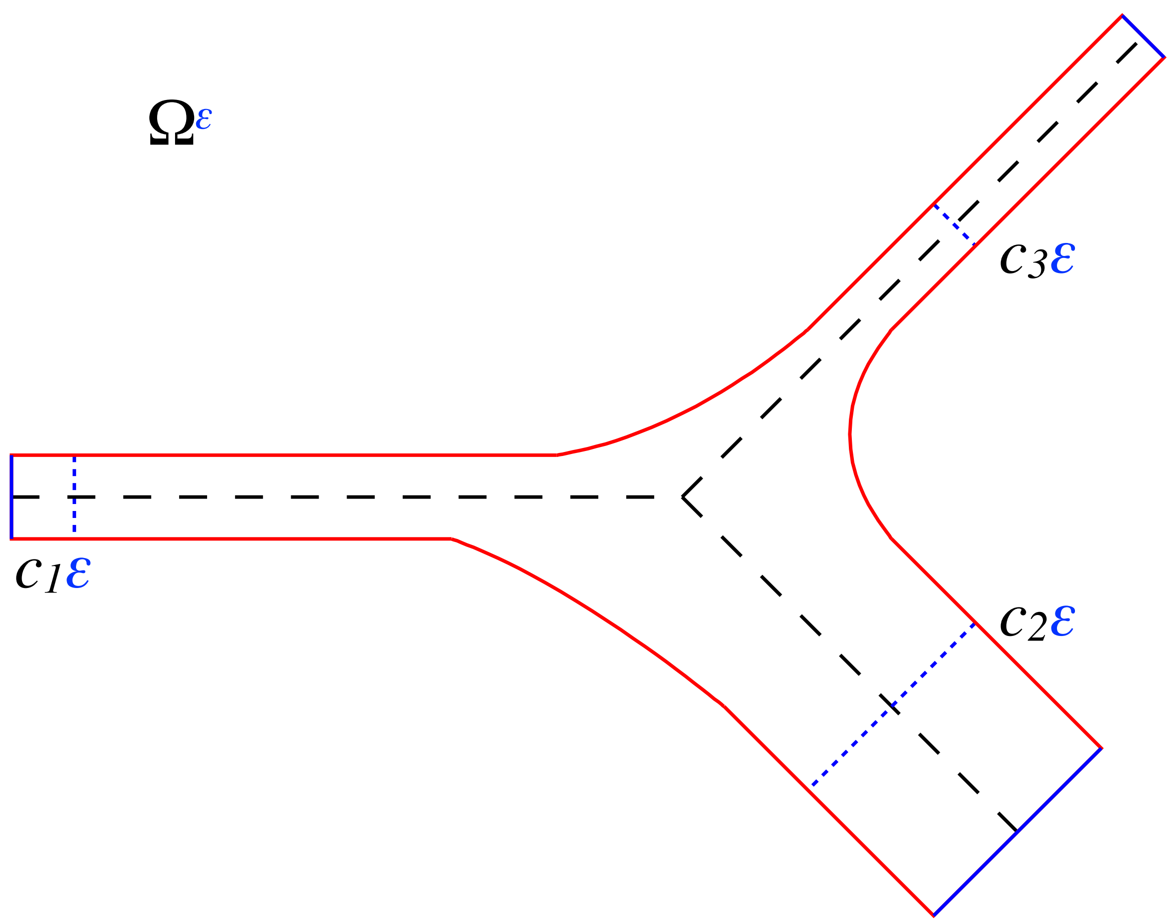
- Pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, nous définissons la fonction $\overline{u}_i^\varepsilon$ comme l'intégrale transverse normalisée de la fonction u^ε sur le $i^{\text{ème}}$ segment:

$$\overline{u}_i^\varepsilon(t,s_i) = \frac{1}{c_i\varepsilon}\int_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{t_i}=s_i} u^\varepsilon(t,\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x})$$

Théorème

Il existe une fonction $C(t)$ ne dépendant pas de ε telle que, pour tout $\varepsilon<\varepsilon_0$,

$$\left(\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i^{\varepsilon_0}(t,\overline{u}_i^\varepsilon - u_i^0)\right)^{1/2} \leq C(t)\varepsilon$$



- Pour ε_0 donné, nous définissons l'énergie canonique sur le $i^{\text{ème}}$ segment:

$$\mathcal{E}_i^{\varepsilon_0}(t,v) = \int_{\varepsilon_0\,\sigma_i}^{L_i} \left|\frac{\partial v}{\partial t}(t,s')\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial s_i}(t,s')\right|^2 ds'$$

- Pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, nous définissons la fonction $\overline{u}_i^\varepsilon$ comme l'intégrale transverse normalisée de la fonction u^ε sur le $i^{\text{ème}}$ segment:

$$\overline{u}_i^\varepsilon(t,s_i) = \frac{1}{c_i\varepsilon}\int_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{t_i}=s_i} u^\varepsilon(t,\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x})$$

Théorème

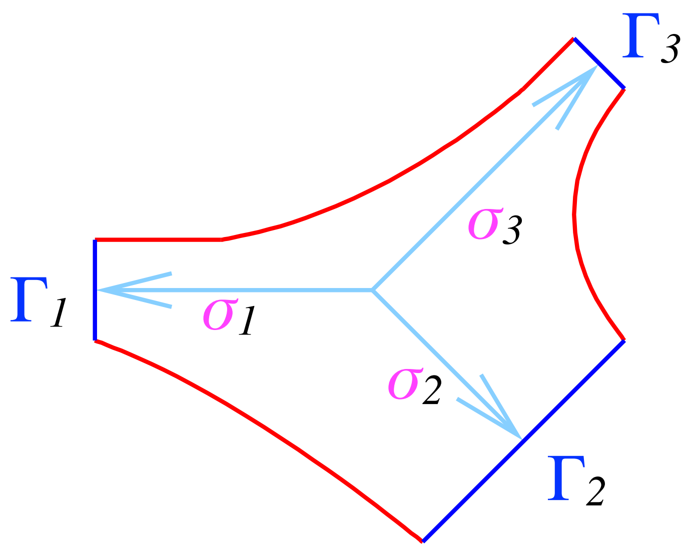
Il existe une fonction $C(t)$ ne dépendant pas de ε telle que, pour tout $\varepsilon<\varepsilon_0$,

$$\left(\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i^{\varepsilon_0}(t,\overline{u}_i^\varepsilon - u_i^0)\right)^{1/2} \leq C(t)\varepsilon$$

Théorème

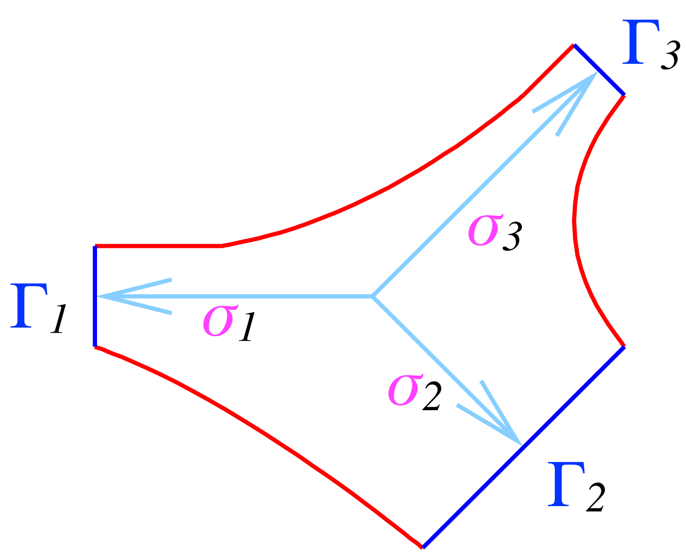
Il existe une fonction $C'(t)$ ne dépendant pas de ε telle que, pour tout $\varepsilon<\varepsilon_0$,

$$\left(\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i^{\varepsilon_0}(t,\overline{u}_i^\varepsilon - \tilde{u}_i^\varepsilon)\right)^{1/2} \leq C'(t)\varepsilon^2$$



Γ_3
σ_3
Γ_1
σ_1
σ_2
Γ_2

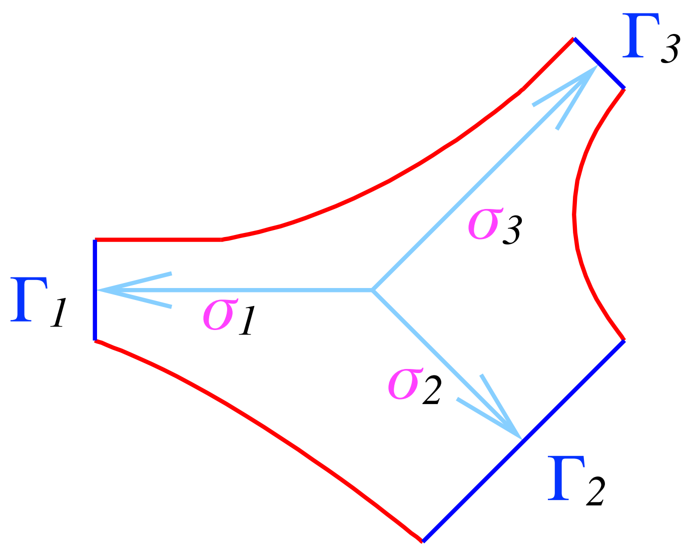
Calcul des fonctions W_i



- Nous rappelons ici le problème satisfait par la fonction W_i, sous formulation variationnelle:

$$\text{Trouver } W_i \in \mathrm{H}^1(J) \text{ telle que, } \forall V \in \mathrm{H}^1(J),$$

$$\int_J \nabla W_i \cdot \nabla V + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} V T_k W_i = \frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} V - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} V$$



- Nous rappelons ici le problème satisfait par la fonction W_i, sous formulation variationnelle:

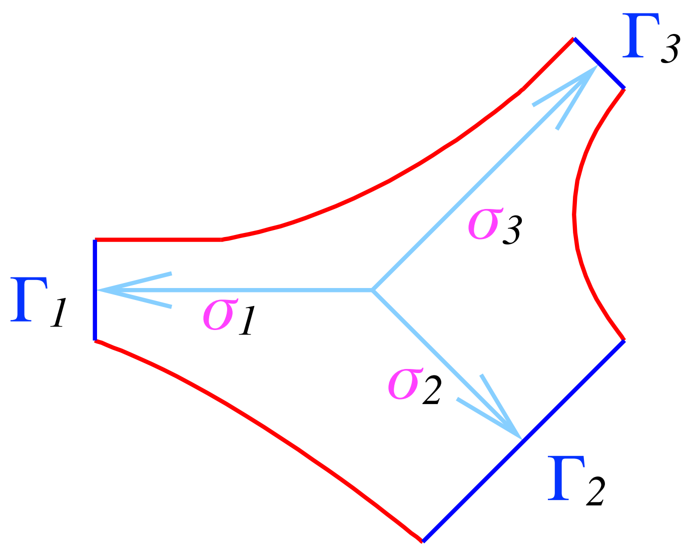
$$\text{Trouver } W_i \in \mathrm{H}^1(J) \text{ telle que, } \forall\, V \in \mathrm{H}^1(J),$$

$$\int_J \nabla W_i \cdot \nabla V + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} V T_k W_i = \frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} V - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} V$$

- Nous appelons l'opérateur T_k^P la troncature de l'opérateur T_k à P termes, et nous résolvons à la place le problème suivant:

$$\text{Trouver } W_i^P \in \mathrm{H}^1(J) \text{ telle que, } \forall\, V \in \mathrm{H}^1(J),$$

$$\int_J \nabla W_i^P \cdot \nabla V + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} V T_k^P W_i^P = \frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} V - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} V$$



- Nous rappelons ici le problème satisfait par la fonction W_i, sous formulation variationnelle:

$$\text{Trouver } W_i \in \mathrm{H}^1(J) \text{ telle que, } \forall V \in \mathrm{H}^1(J),$$

$$\int_J \nabla W_i \cdot \nabla V + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} V T_k W_i = \frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} V - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} V$$

- Nous appelons l'opérateur T_k^P la troncature de l'opérateur T_k à P termes, et nous résolvons à la place le problème suivant:

$$\text{Trouver } W_i^P \in \mathrm{H}^1(J) \text{ telle que, } \forall V \in \mathrm{H}^1(J),$$

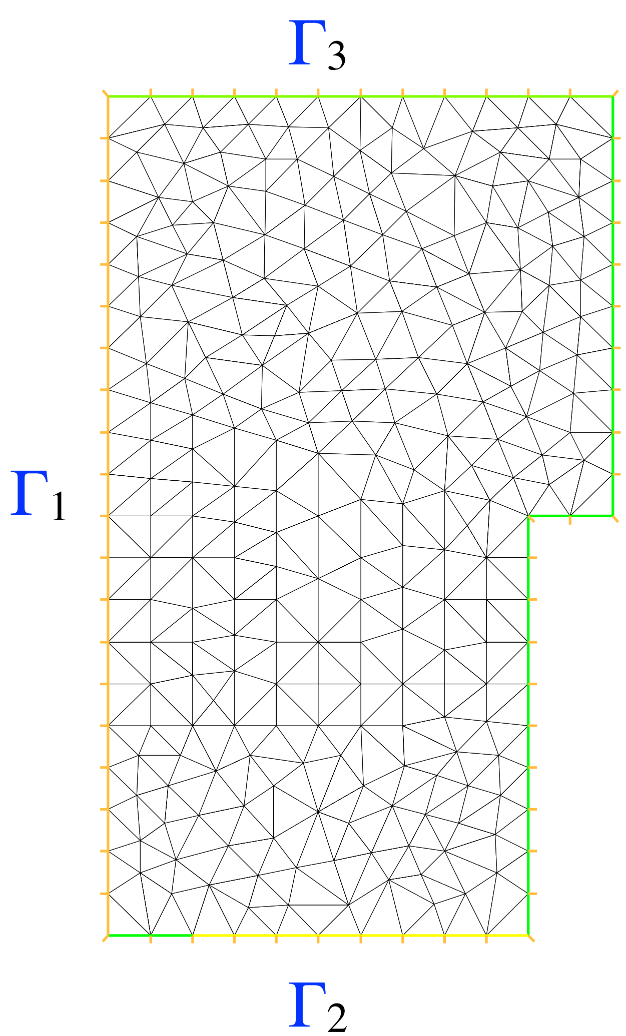
$$\int_J \nabla W_i^P \cdot \nabla V + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} V T_k^P W_i^P = \frac{1}{c_{i+1}} \int_{\Gamma_{i+1}} V - \frac{1}{c_i} \int_{\Gamma_i} V$$

Proposition

$$\lim_{P \to \infty} \left\| W_i - W_i^P \right\|_{\mathrm{H}^1(J)} = 0$$

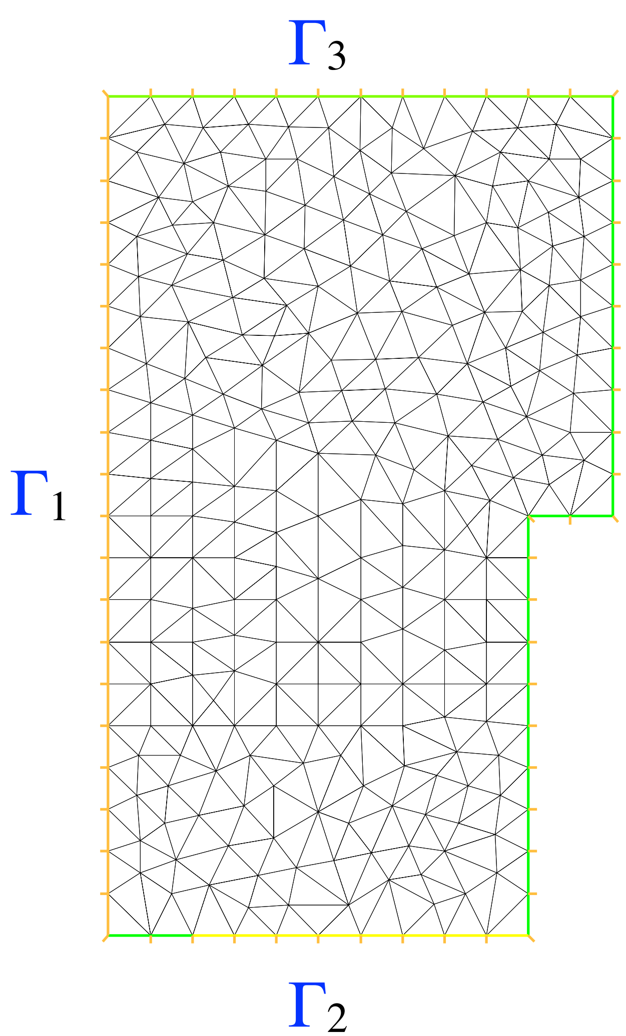
Calcul des fonctions W_i

- Nous reprenons la jonction ayant servi pour la première simulation numérique.



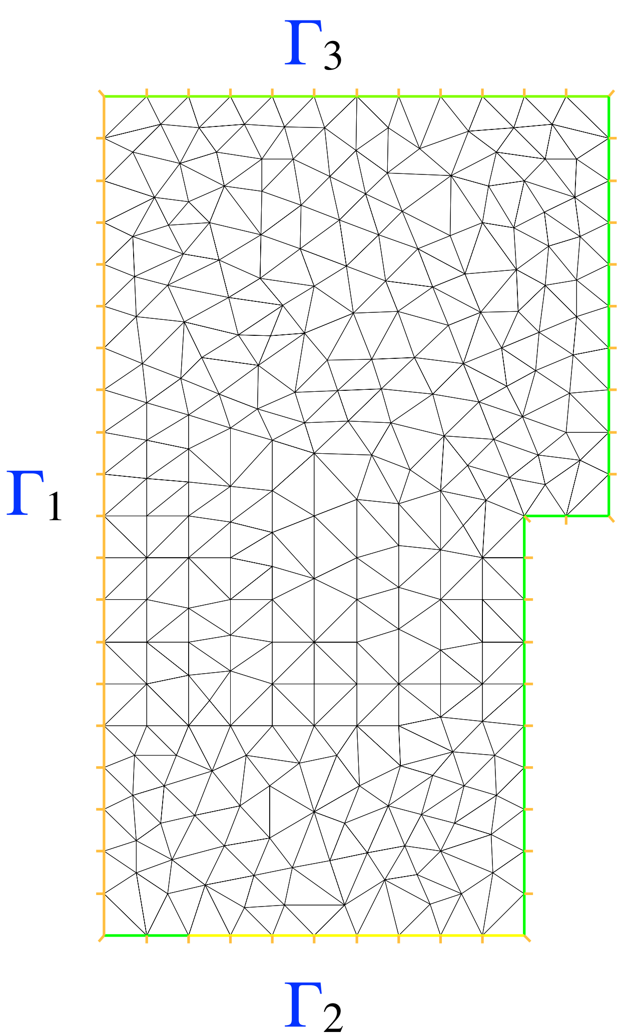
Calcul des fonctions W_i

- Nous reprenons la jonction ayant servi pour la première simulation numérique.
- Le calcul de W_i est réalisé à l'aide d'un script FreeFem++ (http://www.freefem.org/ff++/)

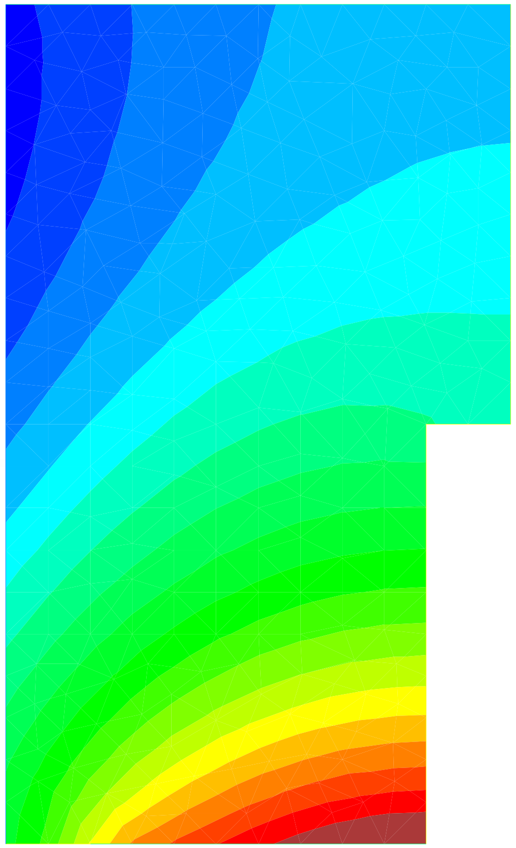


Calcul des fonctions W_i

- Nous reprenons la jonction ayant servi pour la première simulation numérique.
- Le calcul de W_i est réalisé à l'aide d'un script FreeFem++ (http://www.freefem.org/ff++/)

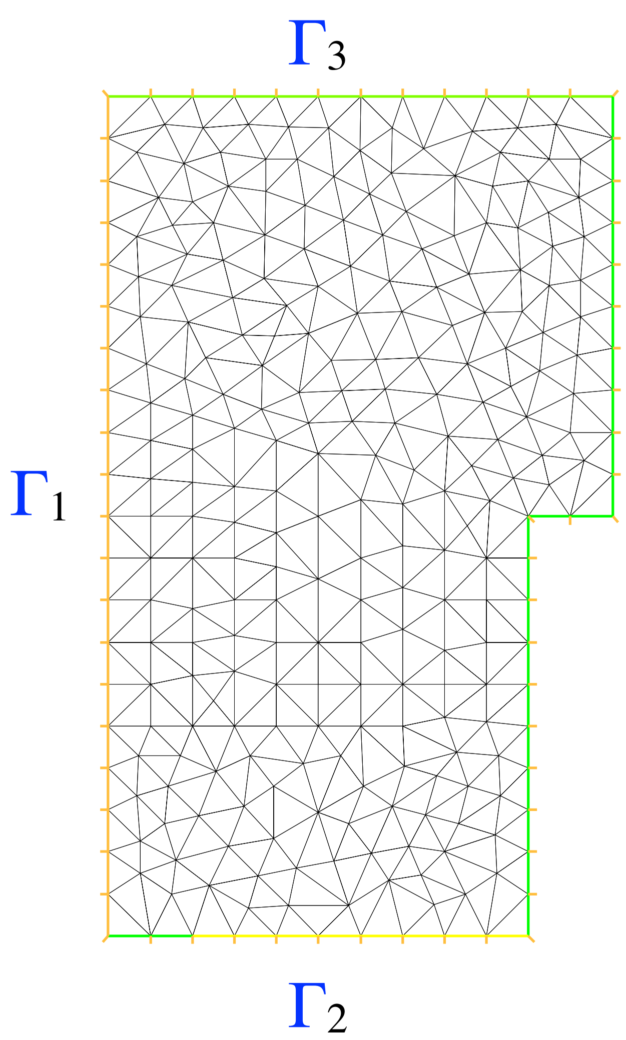


Calcul de la fonction W_1



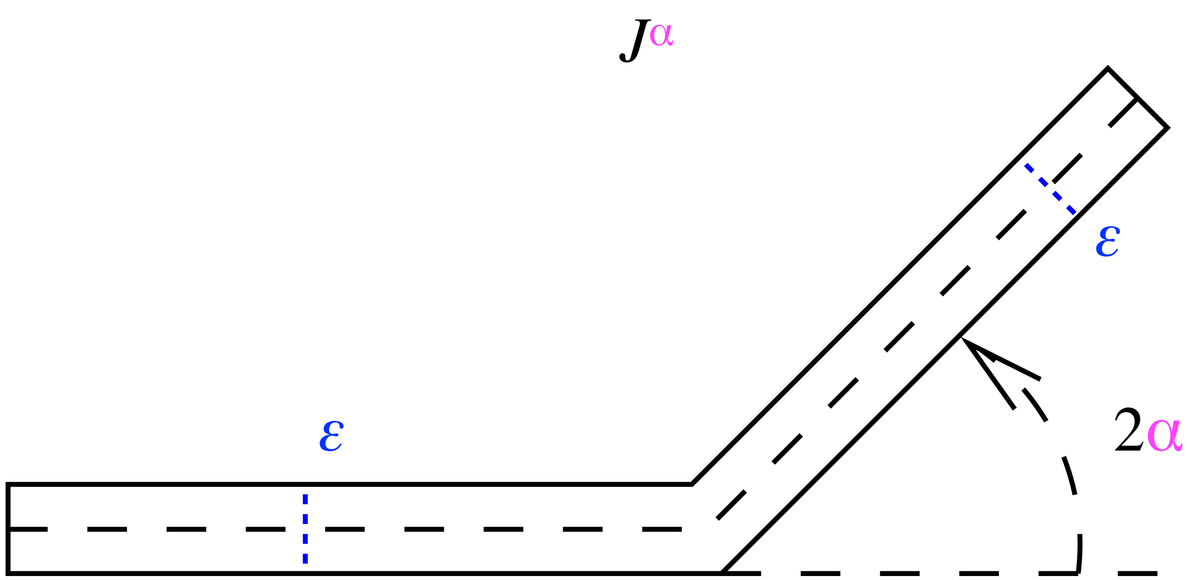
Calcul des fonctions W_i

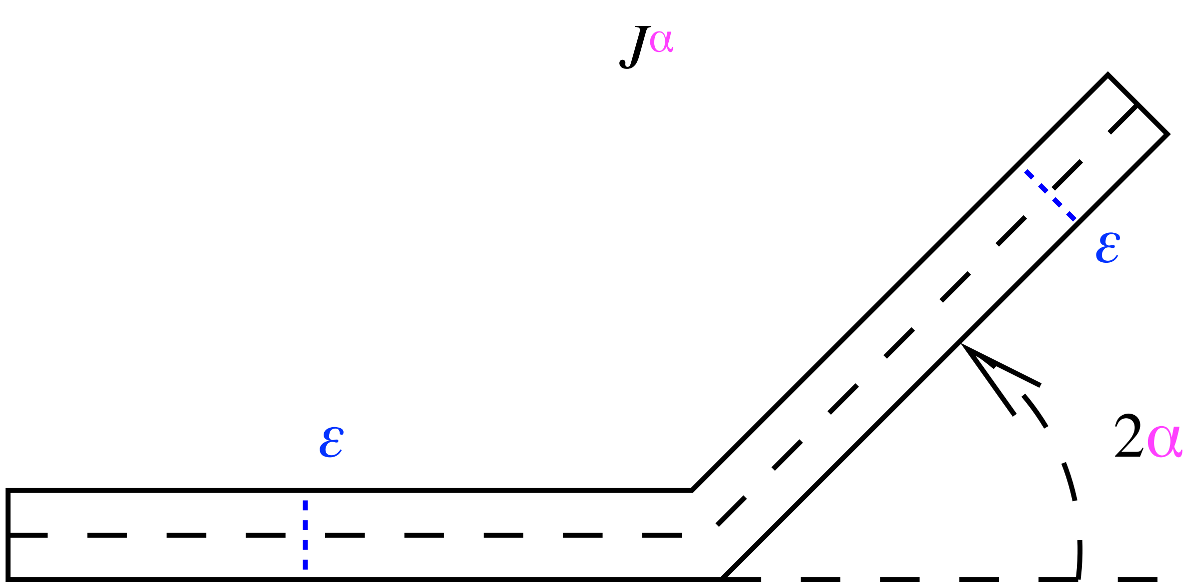
- Nous reprenons la jonction ayant servi pour la première simulation numérique.
- Le calcul de W_i est réalisé à l'aide d'un script FreeFem++ (http://www.freefem.org/ff++/)



Calcul de la fonction W_2

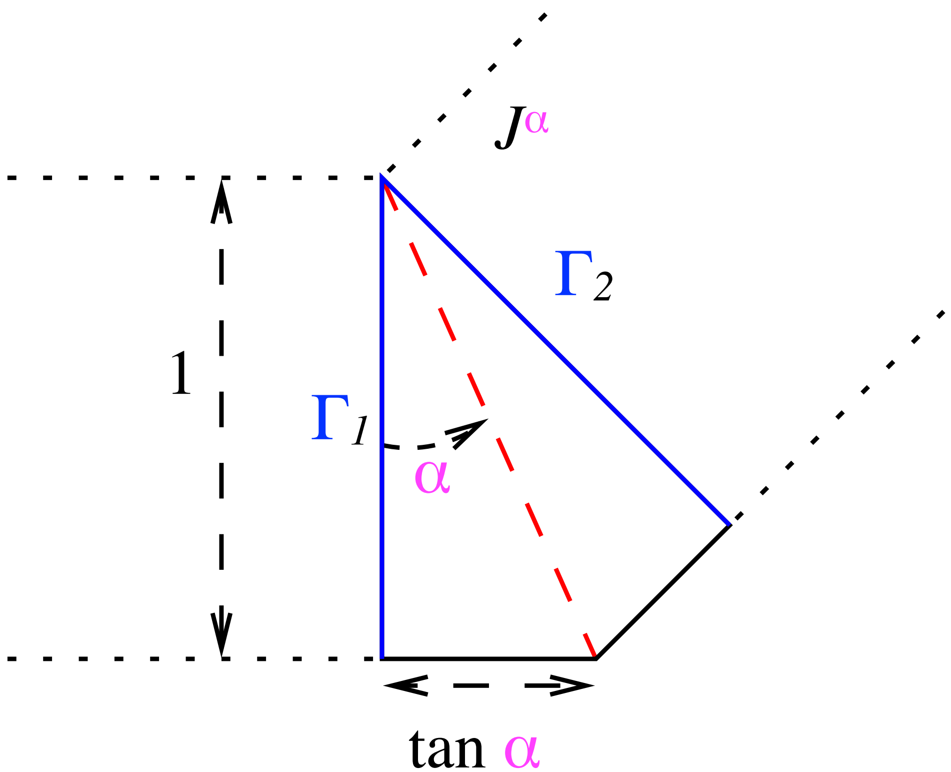
Cas particulier d'une jonction de deux fentes





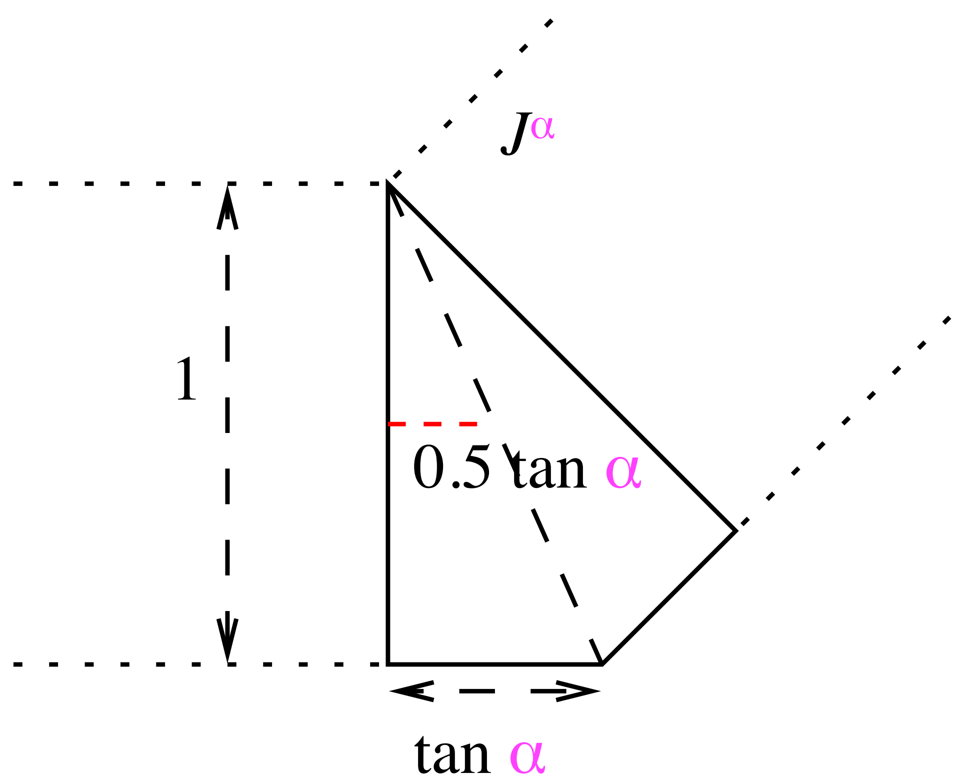
- Nous considérons une jonction de deux fentes de même épaisseur ε faisant un angle de 2α.

Cas particulier d'une jonction de deux fentes



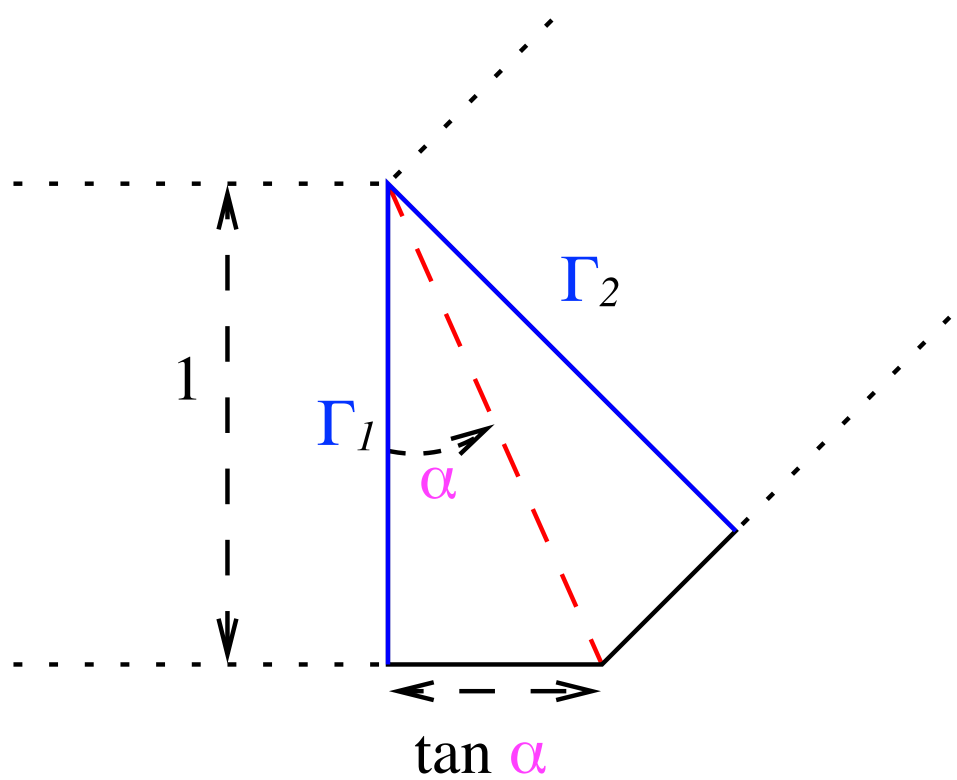
- Nous considérons une jonction de deux fentes de même épaisseur ε faisant un angle de 2α.
- La jonction canonique est une réunion de deux triangles rectangles. Ce domaine possède un axe de symétrie.

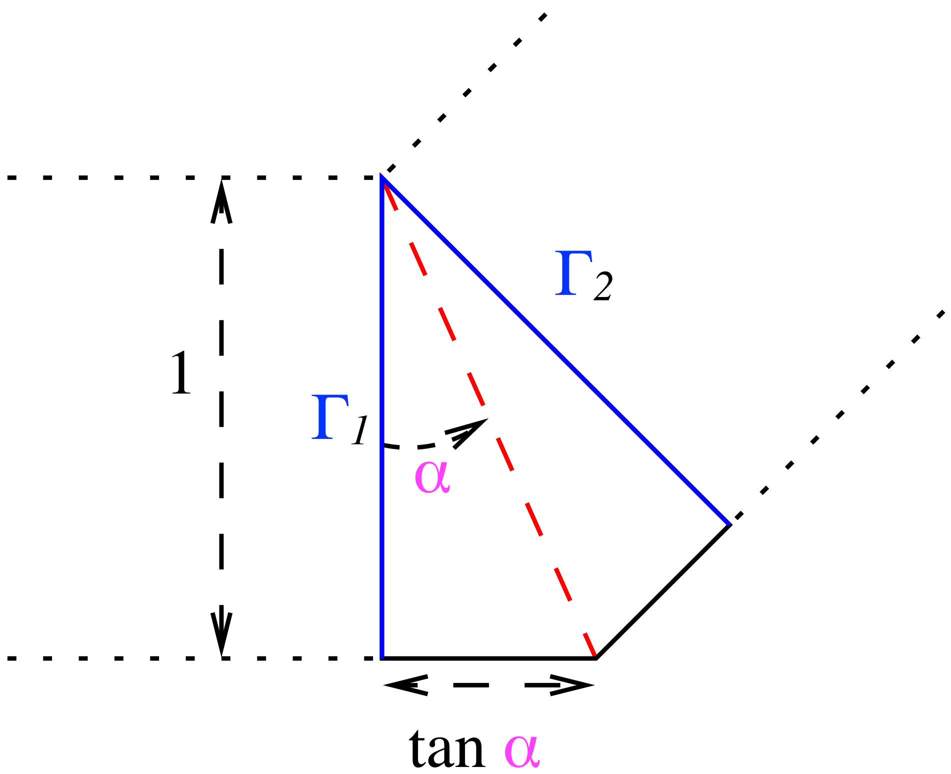
Cas particulier d'une jonction de deux fentes



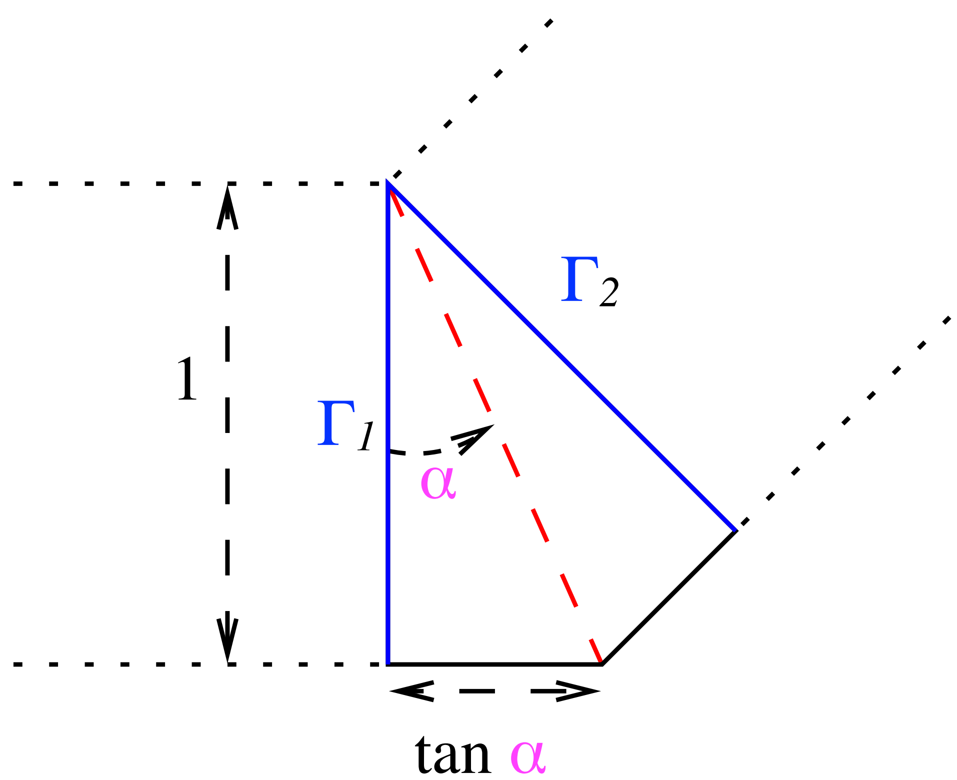
- Nous considérons une jonction de deux fentes de même épaisseur ε faisant un angle de 2α.
- La jonction canonique est une réunion de deux triangles rectangles. Ce domaine possède un axe de symétrie.
- Les conditions améliorées de Kirchhoff seront écrites en prenant
  $$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5 \tan \alpha.$$

Cas particulier d'une jonction de deux fentes





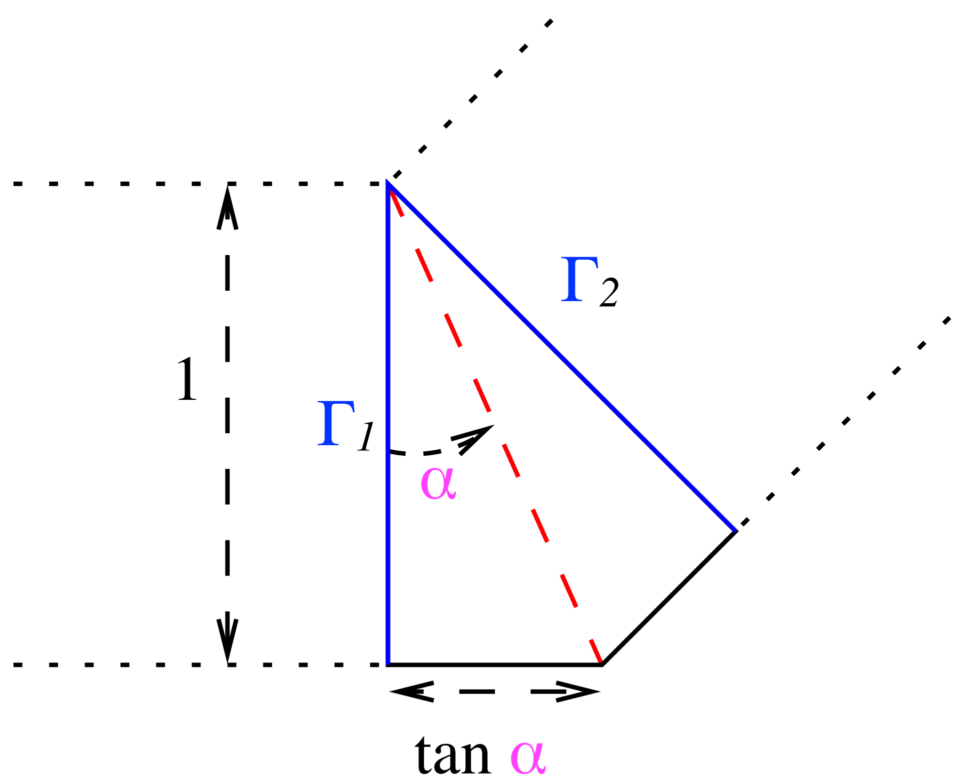
- Le nombre de jonctions est égal à 2, nous avons un seul problème de Laplace à résoudre.



- Le nombre de jonctions est égal à 2, nous avons un seul problème de Laplace à résoudre.
- Nous regardons le problème suivant :

Trouver $W^\alpha \in \mathrm{H}^1(J^\alpha)$ telle que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta W^\alpha & = & 0 \text{ dans } J^\alpha \\ \nabla W^\alpha \cdot \vec{n} + T_1 W^\alpha & = & -1 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \nabla W^\alpha \cdot \vec{n} + T_2 W^\alpha & = & 1 \text{ sur } \Gamma_2 \\ \nabla W^\alpha \cdot \vec{n} & = & 0 \text{ sur } \partial J^\alpha \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \\ \displaystyle\int_{J^\alpha} W^\alpha & = & 0 \end{array}\right.$$



- Le nombre de jonctions est égal à 2, nous avons un seul problème de Laplace à résoudre.
- Nous regardons le problème suivant :

Trouver $W^\alpha \in \mathrm{H}^1(J^\alpha)$ telle que

$$\left\{\begin{aligned} \Delta W^\alpha &= 0 \text{ dans } J^\alpha \\ \nabla W^\alpha \cdot \vec{n} + T_1 W^\alpha &= -1 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \nabla W^\alpha \cdot \vec{n} + T_2 W^\alpha &= 1 \text{ sur } \Gamma_2 \\ \nabla W^\alpha \cdot \vec{n} &= 0 \text{ sur } \partial J^\alpha \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \\ \int_{J^\alpha} W^\alpha &= 0 \end{aligned}\right.$$

- Nous construisons alors la «matrice» K de la manière suivante :

$$K = K(\alpha) = \int_{\Gamma_2} W^\alpha - \int_{\Gamma_1} W^\alpha$$

Cas particulier d'une jonction de deux fentes

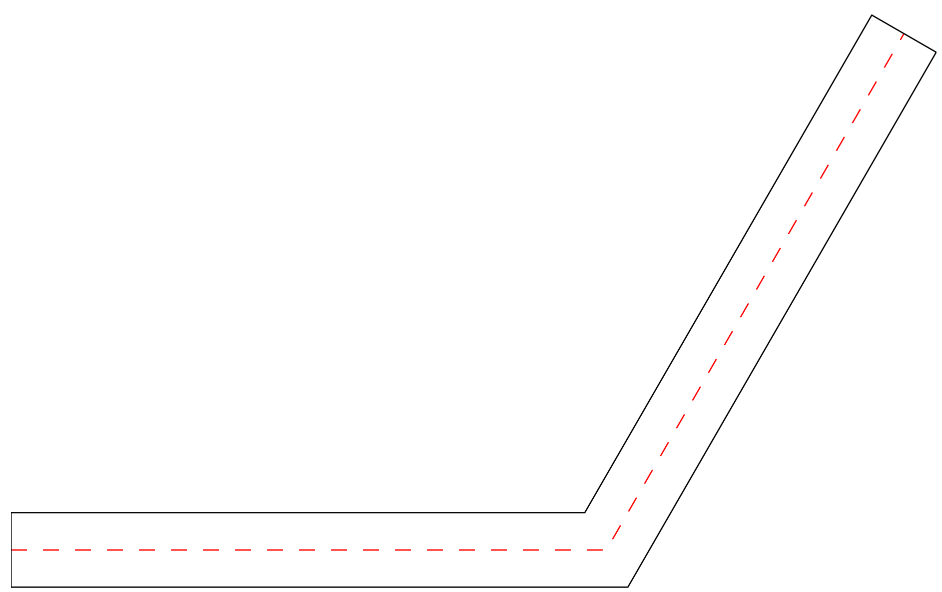
Cas particulier d’une jonction de deux fentes

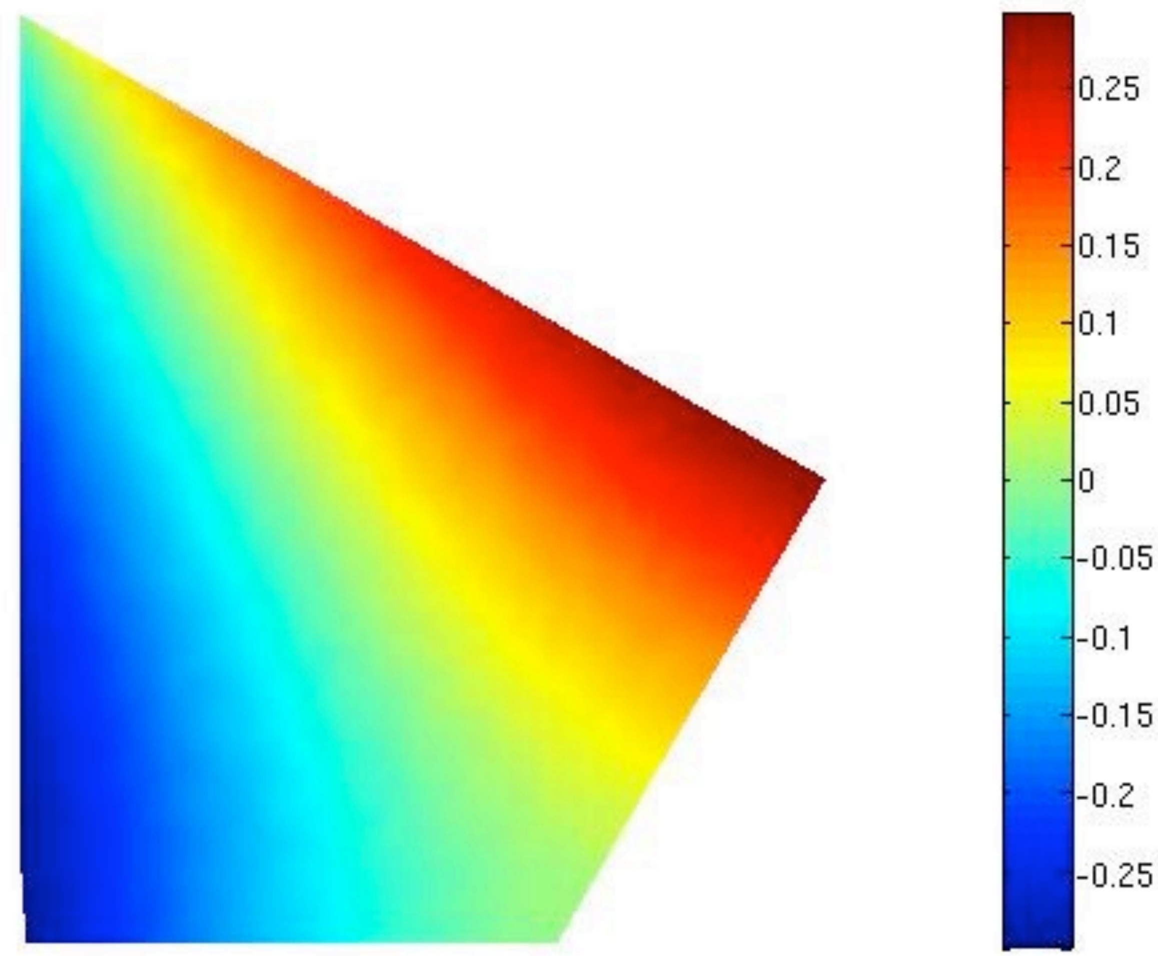
- Le calcul de W^{α} est réalisé à l’aide d’un script FreeFem++

Cas particulier d'une jonction de deux fentes

- Le calcul de W^{α} est réalisé à l'aide d'un script FreeFem++
- Le calcul est réalisé sur un maillage indépendant de α (le problème devient donc α-dépendant),

- Le calcul de W^{α} est réalisé à l'aide d'un script FreeFem++
- Le calcul est réalisé sur un maillage indépendant de α (le problème devient donc α-dépendant),

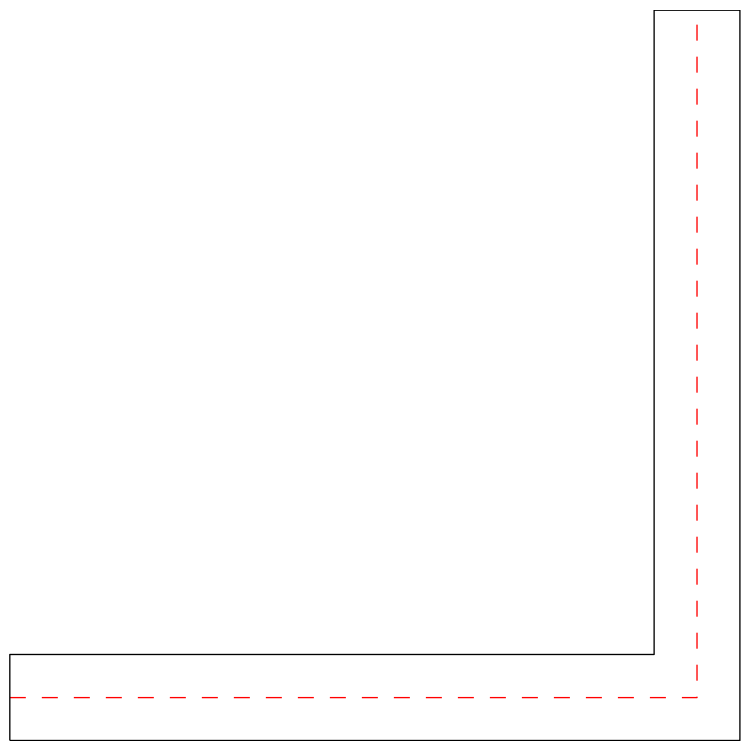


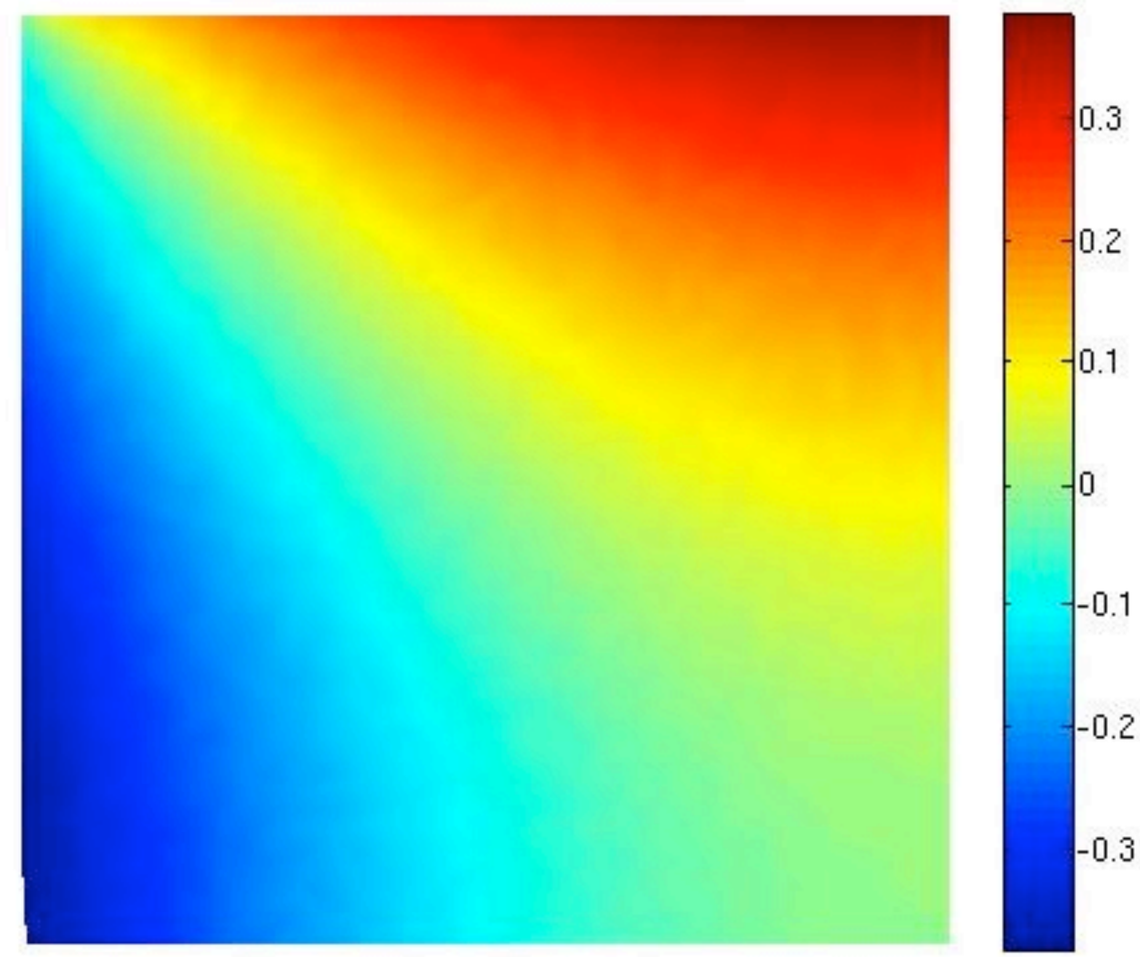


- Calcul de W^{α}, pour $\alpha=\pi/6$.

Cas particulier d'une jonction de deux fentes

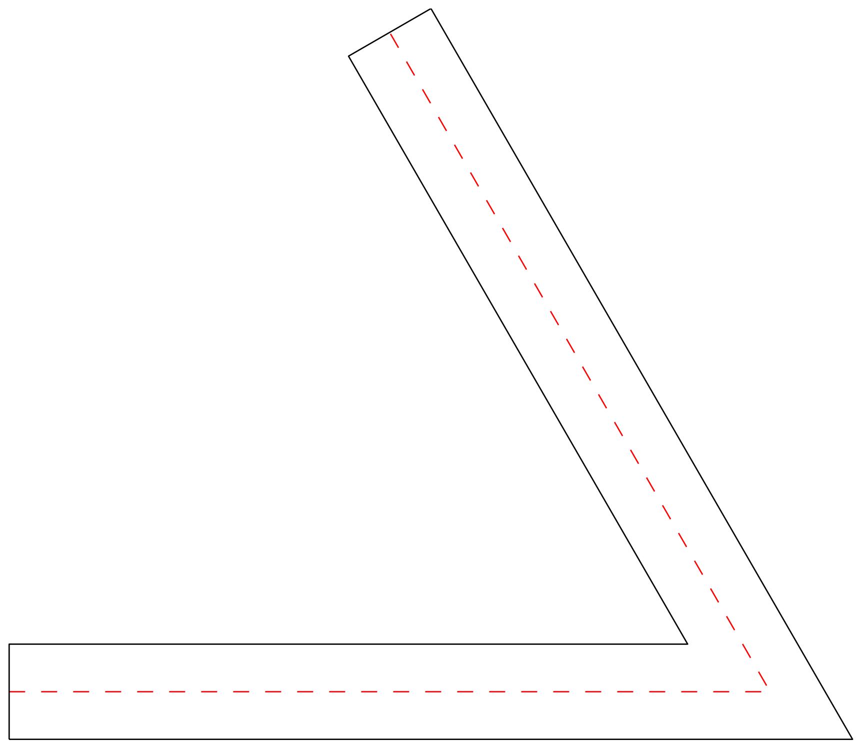
- Le calcul de W^{α} est réalisé à l'aide d'un script FreeFem++
- Le calcul est réalisé sur un maillage indépendant de α (le problème devient donc α-dépendant),

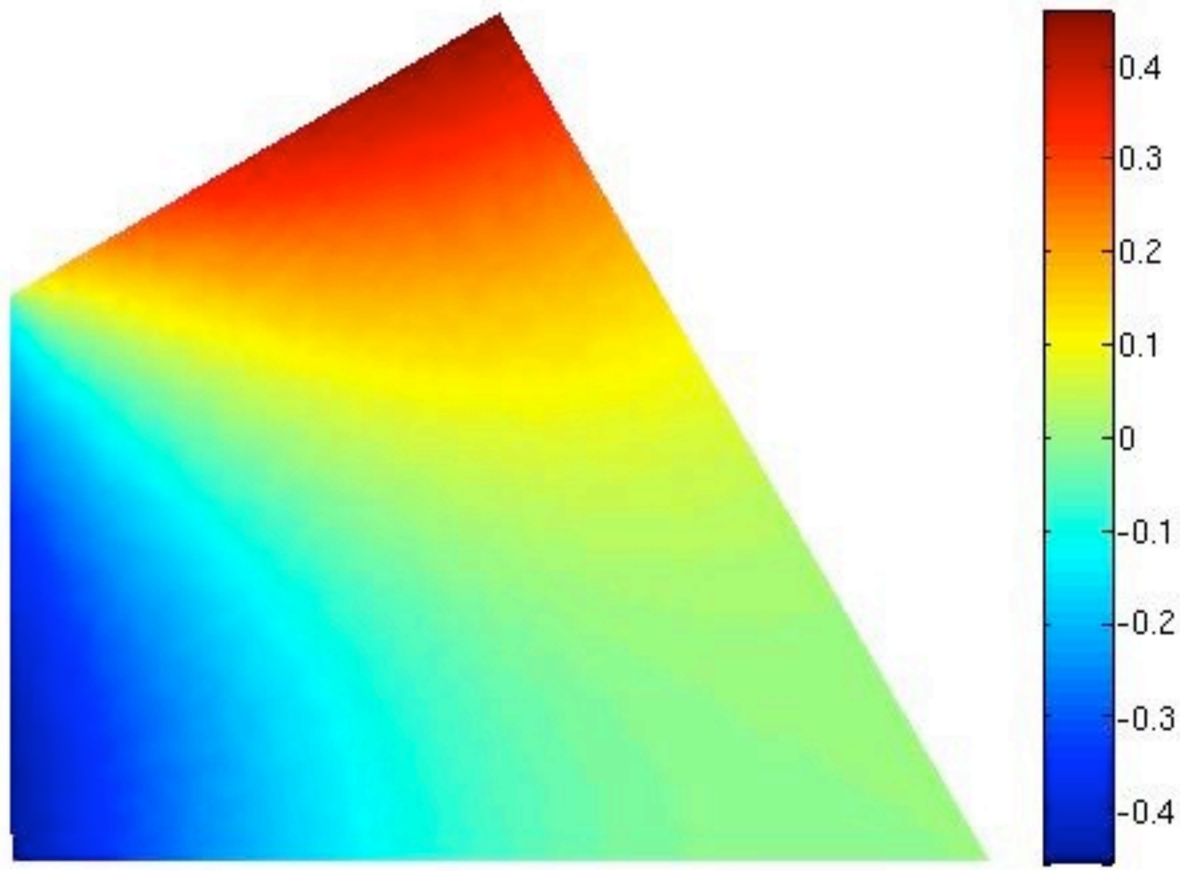




- Calcul de W^{α}, pour $\alpha=\pi/4$.

- Le calcul de W^α est réalisé à l'aide d'un script FreeFem++
- Le calcul est réalisé sur un maillage indépendant de α (le problème devient donc α-dépendant),



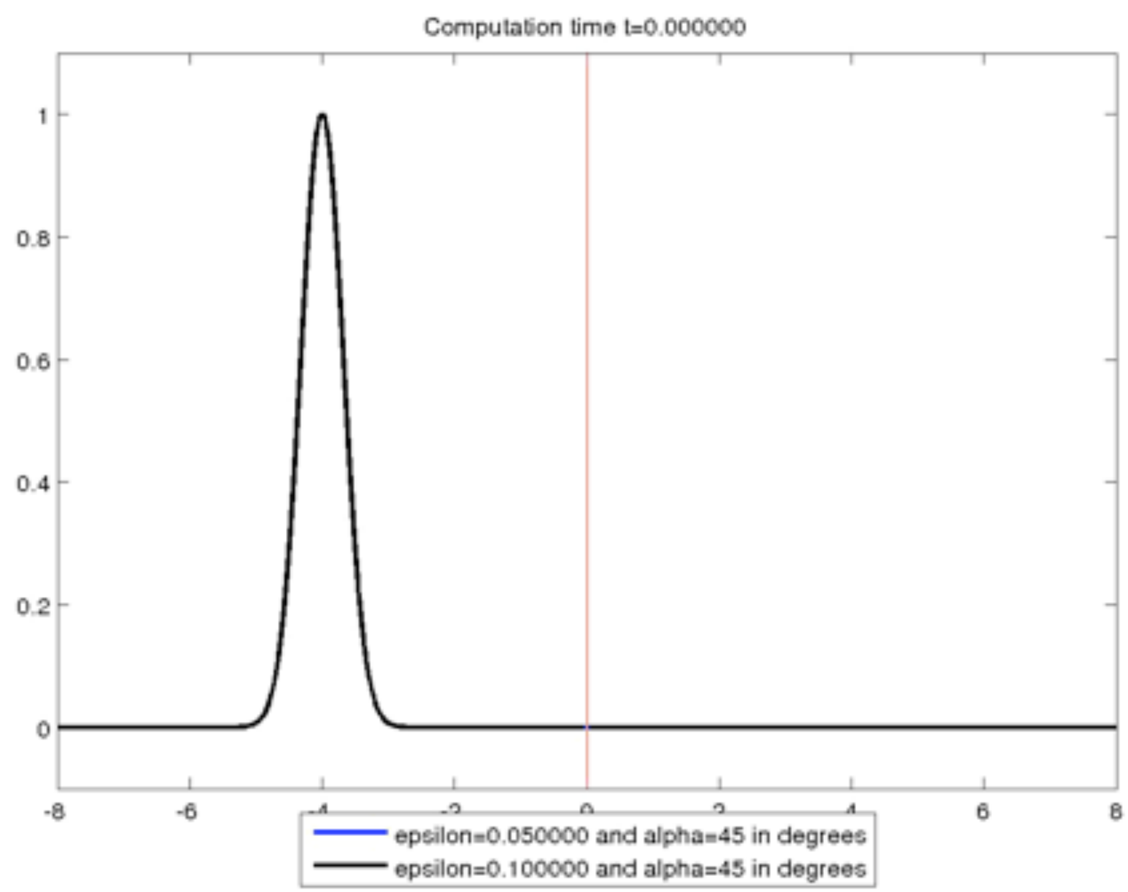


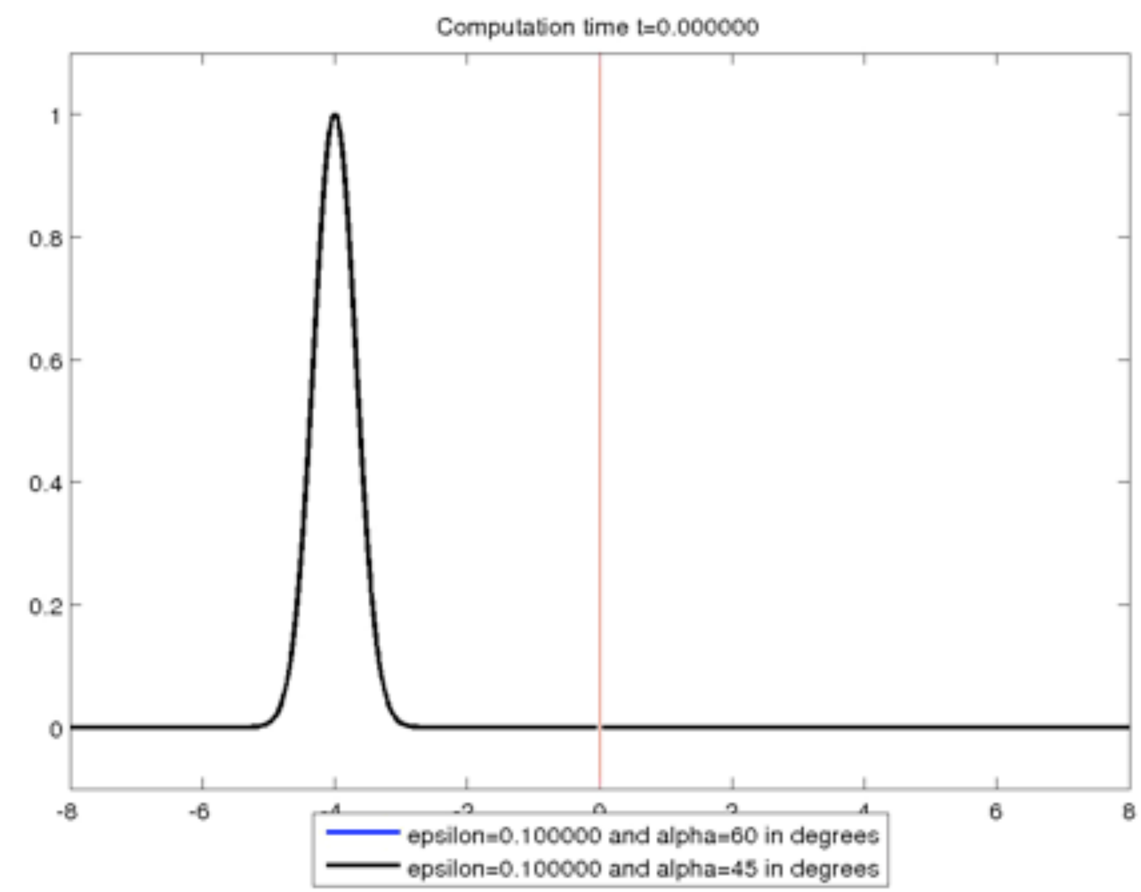
- Calcul de W^α, pour $\alpha=\pi/3$.

Cas particulier d'une jonction de deux fentes

Cas particulier d'une jonction de deux fentes

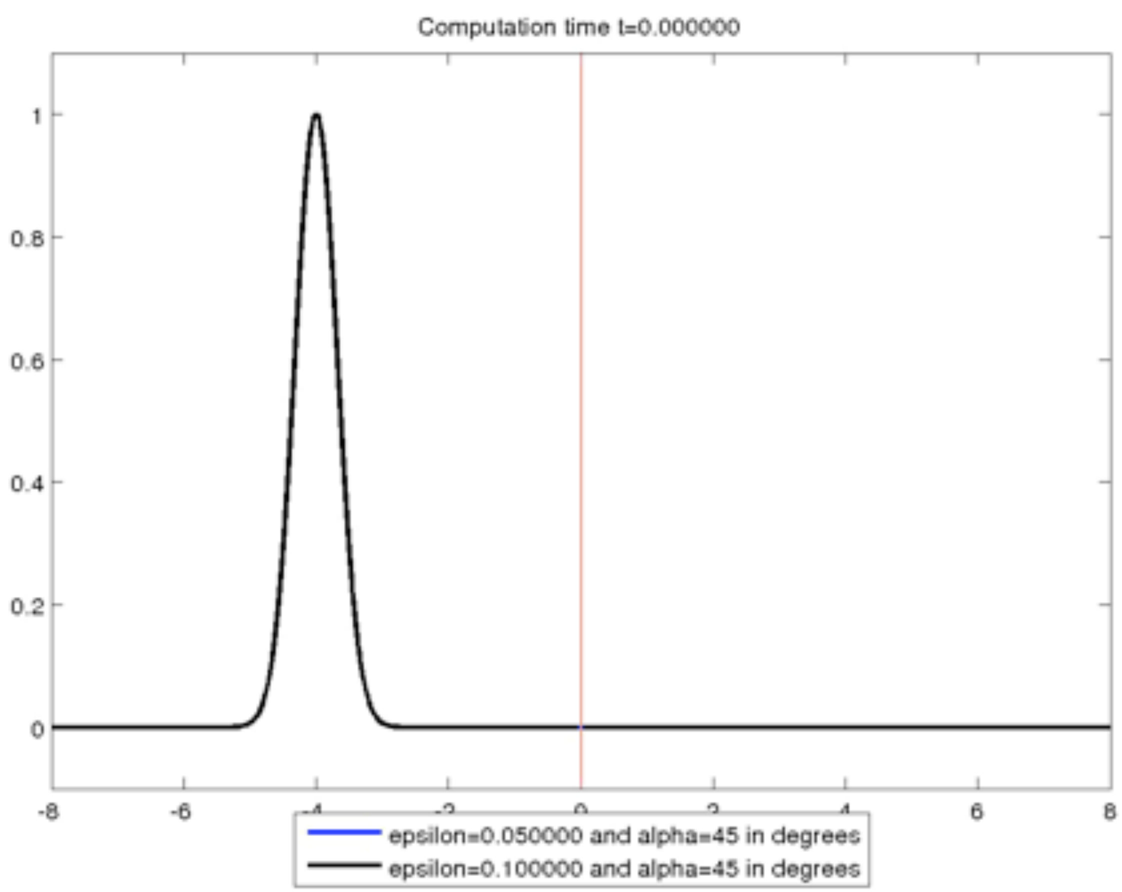
- Les simulations ont été réalisées avec le code numérique Netwaves (développé durant ma thèse - https://gforge.inria.fr/projects/netwaves).

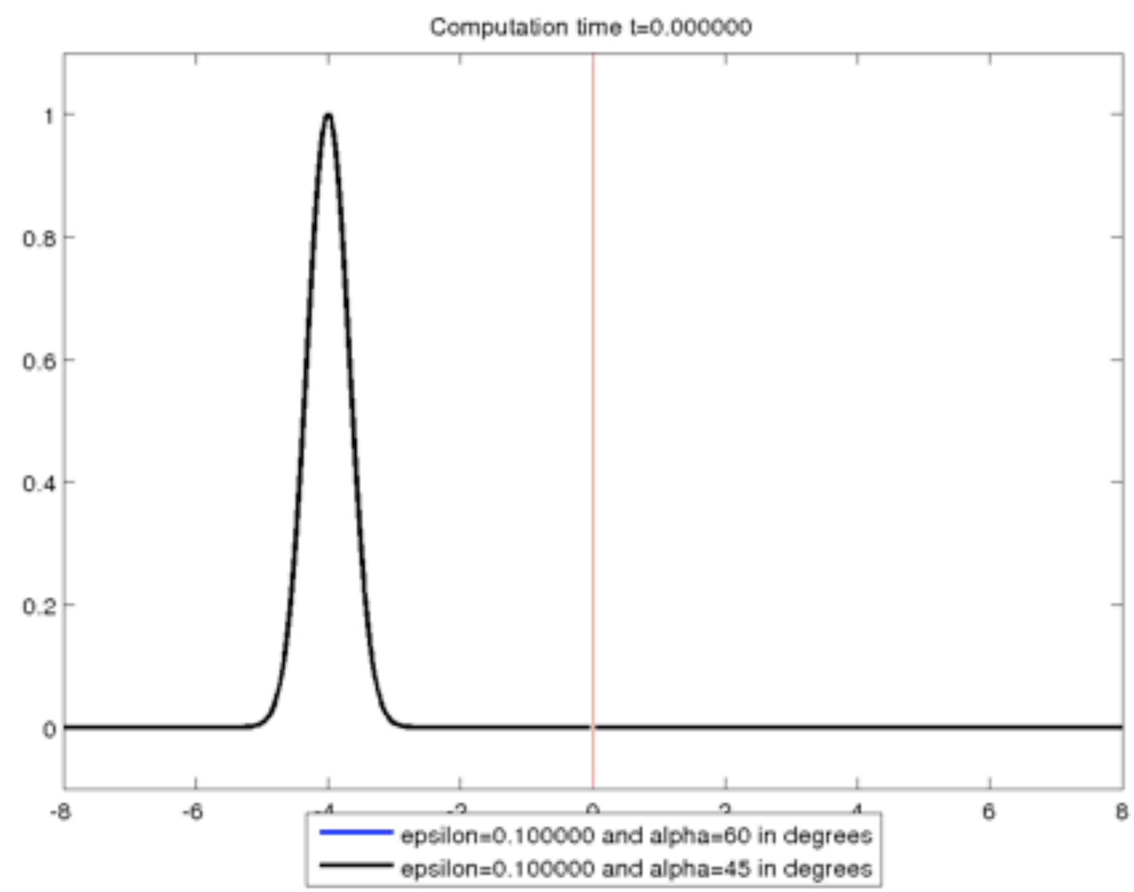




Cas particulier d'une jonction de deux fentes

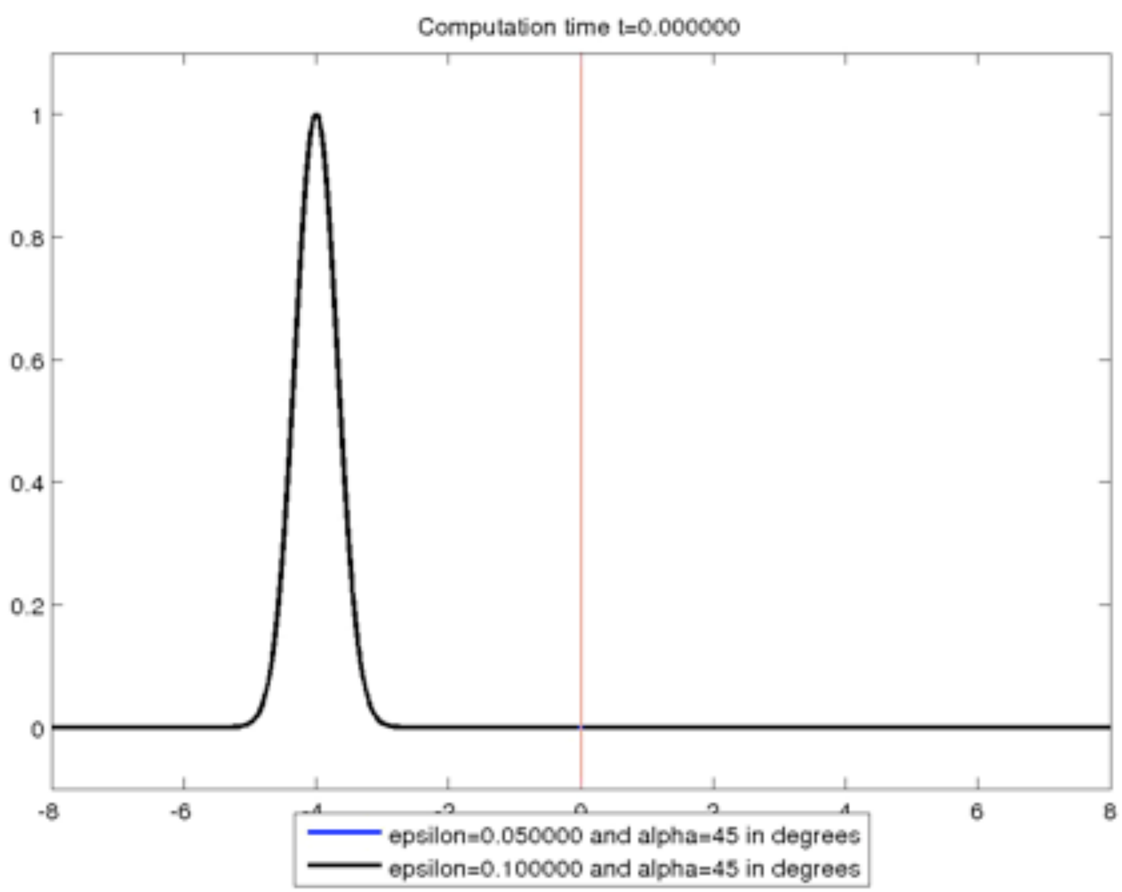
- Les simulations ont été réalisées avec le code numérique Netwaves (développé durant ma thèse - https://gforge.inria.fr/projects/netwaves).
- Simulation: α est donné, et nous prenons différentes valeurs de ε.

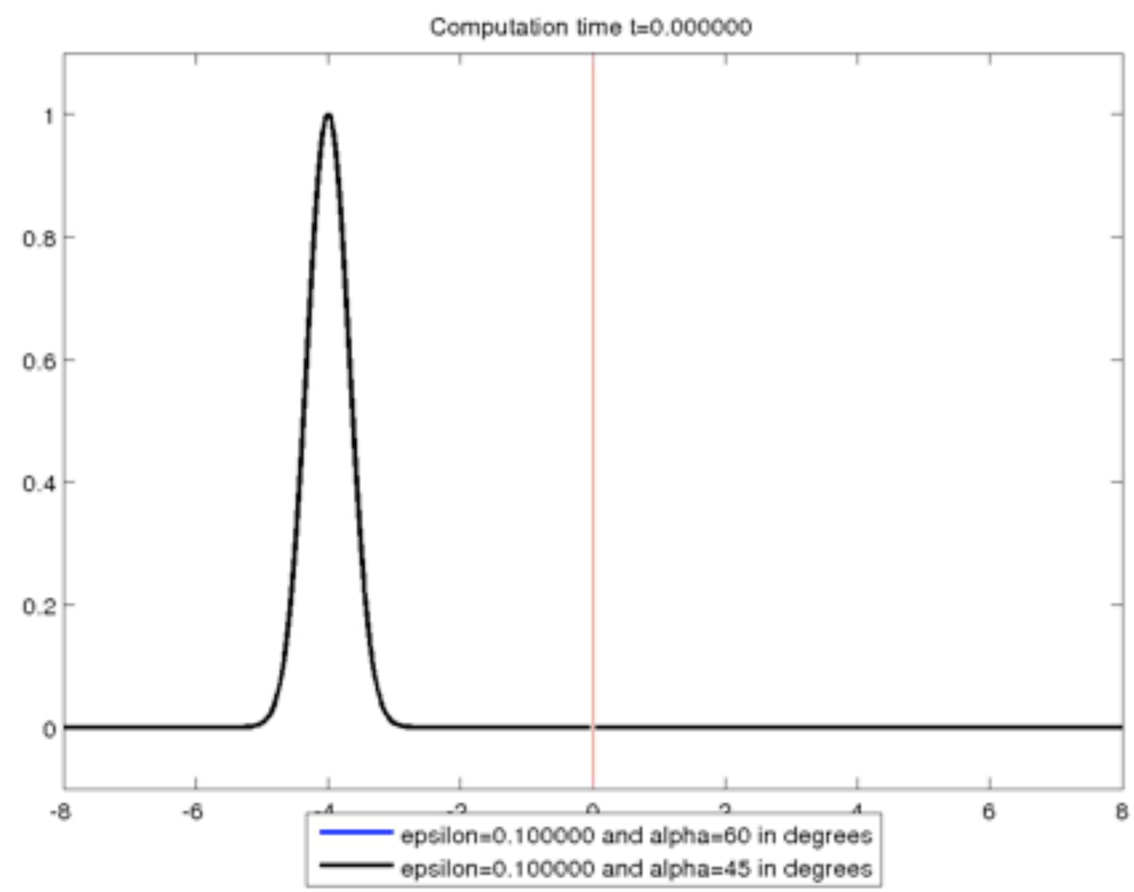




Cas particulier d'une jonction de deux fentes

- Les simulations ont été réalisées avec le code numérique Netwaves (développé durant ma thèse - https://gforge.inria.fr/projects/netwaves).
- Simulation: α est donné, et nous prenons différentes valeurs de ε.
- Simulation: ε est donné, et nous prenons différentes valeurs de α.

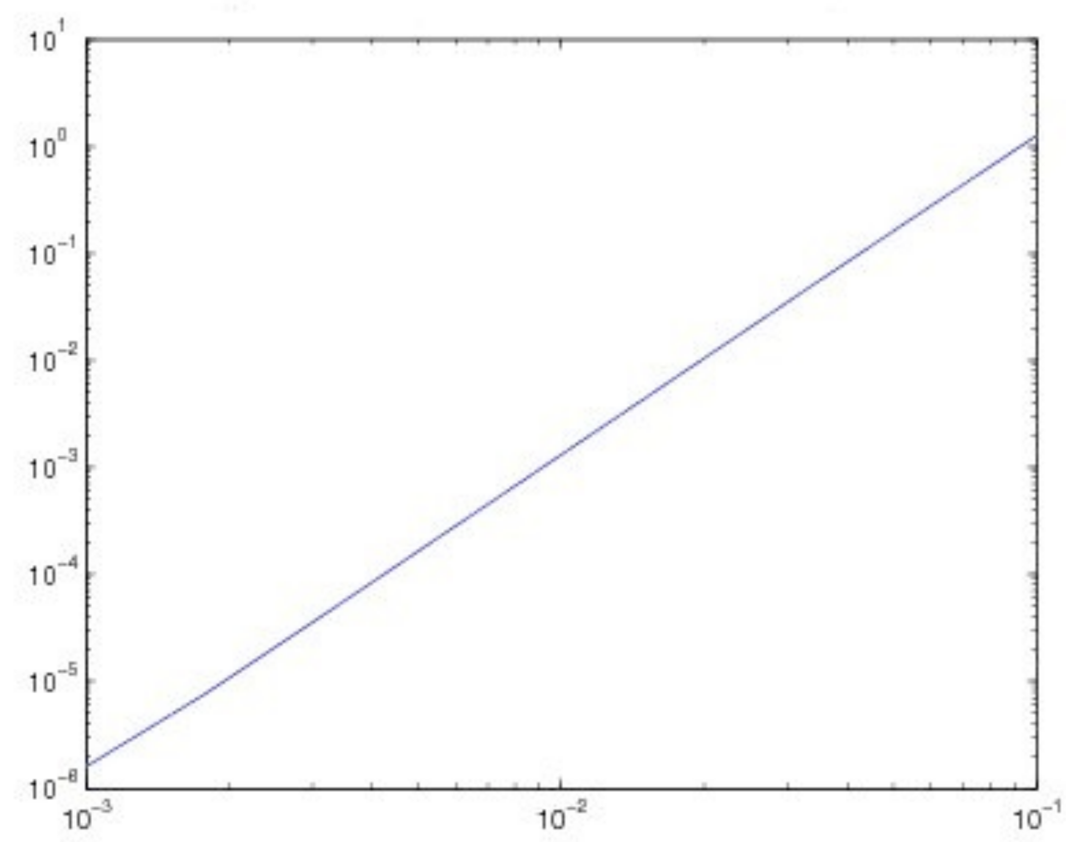




Estimations d'erreurs

Estimations d'erreurs

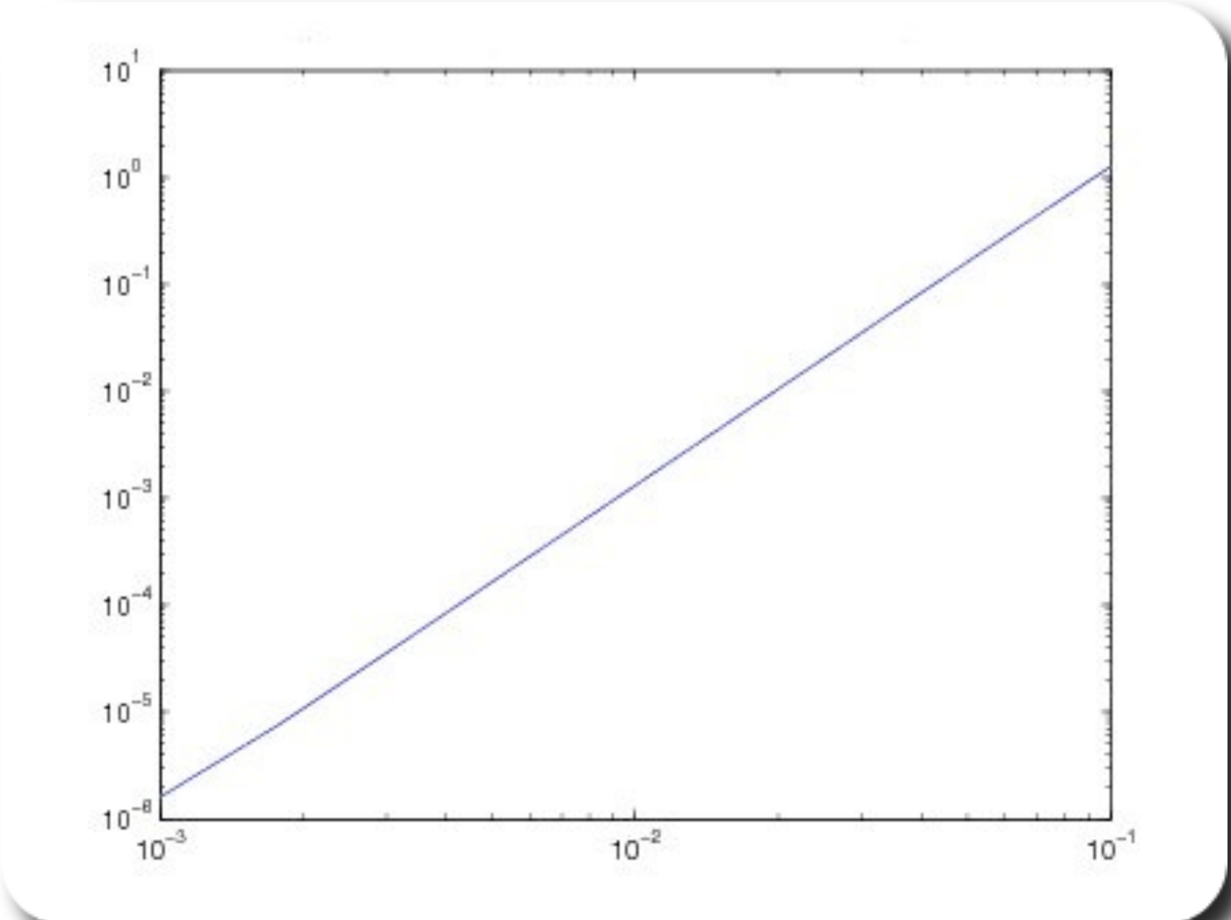
- Les résultats théoriques montrent que l'erreur entre la solution du problème exact et la solution du problème approché est en ε^2.



Tracé de $(\mathcal{E}^{\varepsilon}(T, \overline{u}^{\varepsilon} - \tilde{u}^{\varepsilon}))^{1/2}$ par rapport à ε

- Les résultats théoriques montrent que l'erreur entre la solution du problème exact et la solution du problème approché est en ε^2.
- Les résultats numériques montrent que cette erreur est en ε^3.

Estimations d'erreurs



Tracé de $(\mathcal{E}^\varepsilon(T, \overline{u}^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon))^{1/2}$ par rapport à ε

- Les résultats théoriques montrent que l'erreur entre la solution du problème exact et la solution du problème approché est en ε^2.
- Les résultats numériques montrent que cette erreur est en ε^3.
- En fait, pour certaines configurations de géométries (jonctions avec axes de symétrie), l'erreur est en ε^3.

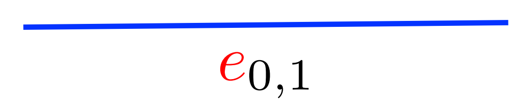
Passage à un réseau infini - géométrie

Passage à un réseau infini - géométrie

- Nous considérons Σ un segment générateur de longueur 1.

$$e_{0,1} = \Sigma$$

Exemple pour p=2.



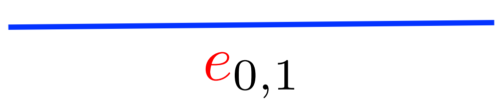
Passage à un réseau infini - géométrie

- Nous considérons Σ un segment générateur de longueur 1.

$$e_{0,1} = \Sigma$$

- Nous prenons aussi p similitudes strictement contractantes s_i de rapport respectif α_i<1.

Exemple pour p=2.



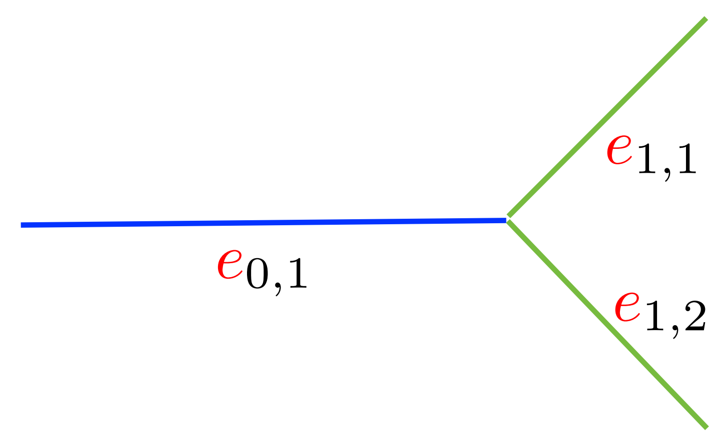
- Nous considérons Σ un segment générateur de longueur 1.

$$e_{0,1} \quad = \quad \Sigma$$

- Nous prenons aussi p similitudes strictement contractantes s_i de rapport respectif α_i<1.
- Nous définissons alors les branches du réseau infini de la manière suivante:

$$e_{1,k} = s_k(e_{0,1}), \quad 1 \leq k \leq p$$

Exemple pour p=2.



Passage à un réseau infini - géométrie

- Nous considérons Σ un segment générateur de longueur 1.

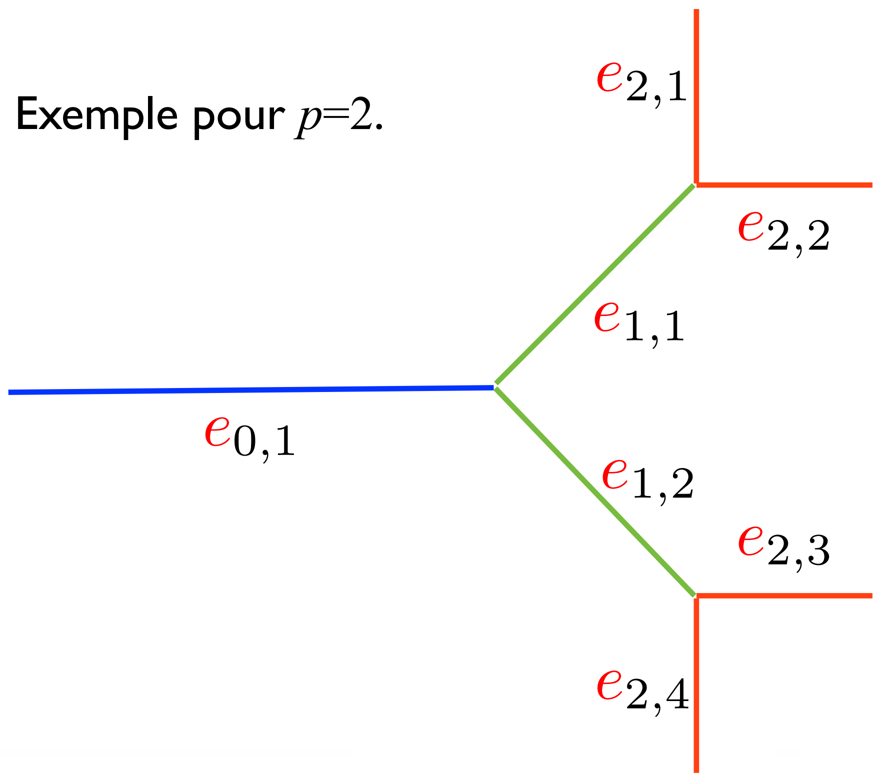
$$e_{0,1} = \Sigma$$

- Nous prenons aussi p similitudes strictement contractantes s_i de rapport respectif $\alpha_i<1$.
- Nous définissons alors les branches du réseau infini de la manière suivante:

$$e_{1,k} = s_k(e_{0,1}), \quad 1 \leq k \leq p$$

$$e_{n+1,p(j-1)+k} = s_k(e_{n,j}), \quad 1 \leq j \leq p^n, \; 1 \leq k \leq p$$

Exemple pour p=2.



- Nous considérons Σ un segment générateur de longueur 1.

$$e_{0,1} \quad = \quad \Sigma$$

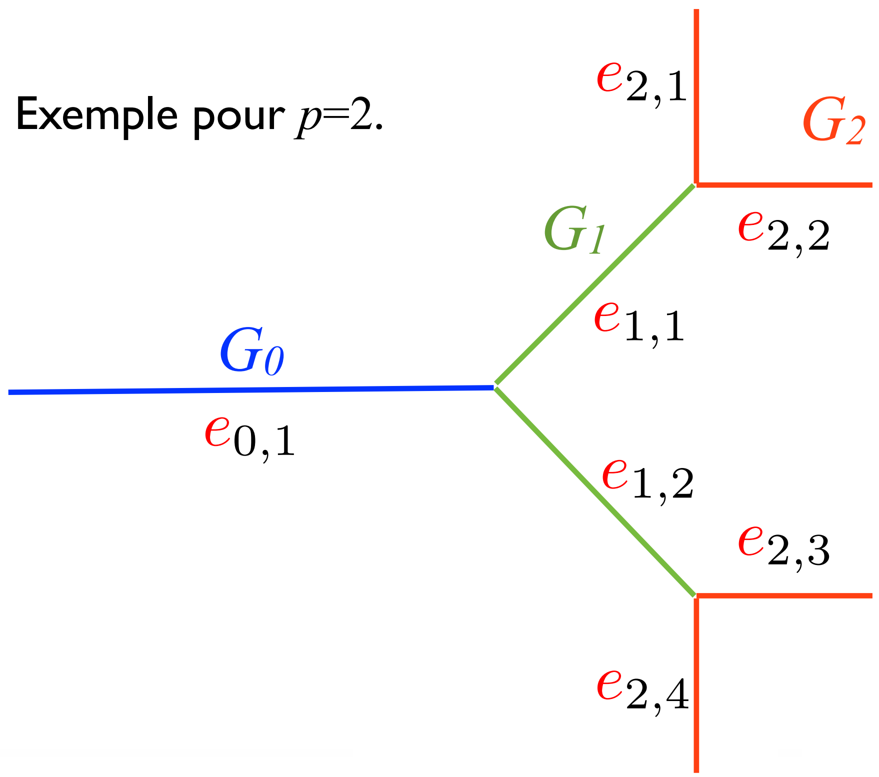
- Nous prenons aussi p similitudes strictement contractantes s_i de rapport respectif α_i<1.

- Nous définissons alors les branches du réseau infini de la manière suivante:

$$e_{1,k} = s_k(e_{0,1}), \quad 1 \leq k \leq p$$

$$e_{n+1,p(j-1)+k} = s_k(e_{n,j}), \quad 1 \leq j \leq p^n, \; 1 \leq k \leq p$$

Exemple pour p=2.



$$\boxed{G_n = \bigcup_{j=1}^{p^n} e_{n,j}}$$

Passage à un réseau infini - géométrie

- Nous considérons Σ un segment générateur de longueur 1.

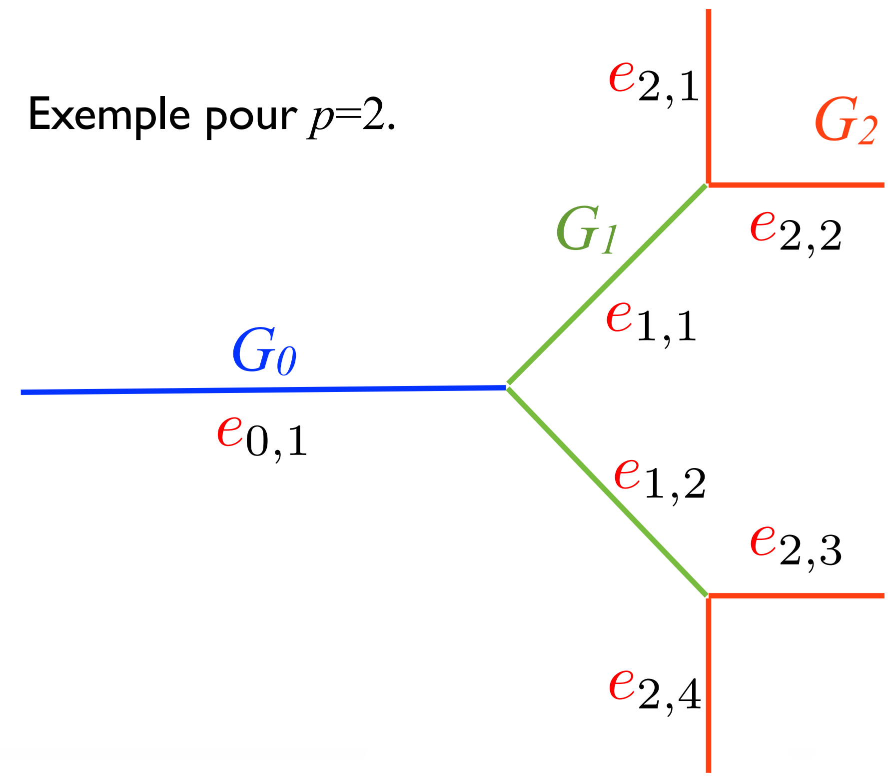
$$e_{0,1} \quad = \quad \Sigma$$

- Nous prenons aussi p similitudes strictement contractantes s_i de rapport respectif $\alpha_i<1$.
- Nous définissons alors les branches du réseau infini de la manière suivante:

$$e_{1,k} = s_k(e_{0,1}), \quad 1 \leq k \leq p$$

$$e_{n+1,p(j-1)+k} = s_k(e_{n,j}), \quad 1 \leq j \leq p^n,\ 1 \leq k \leq p$$

Exemple pour p=2.



$$\boxed{G_n = \bigcup_{j=1}^{p^n} e_{n,j}}$$

$$\boxed{\mathcal{T}_n = \bigcup_{m=0}^{n} G_m}$$

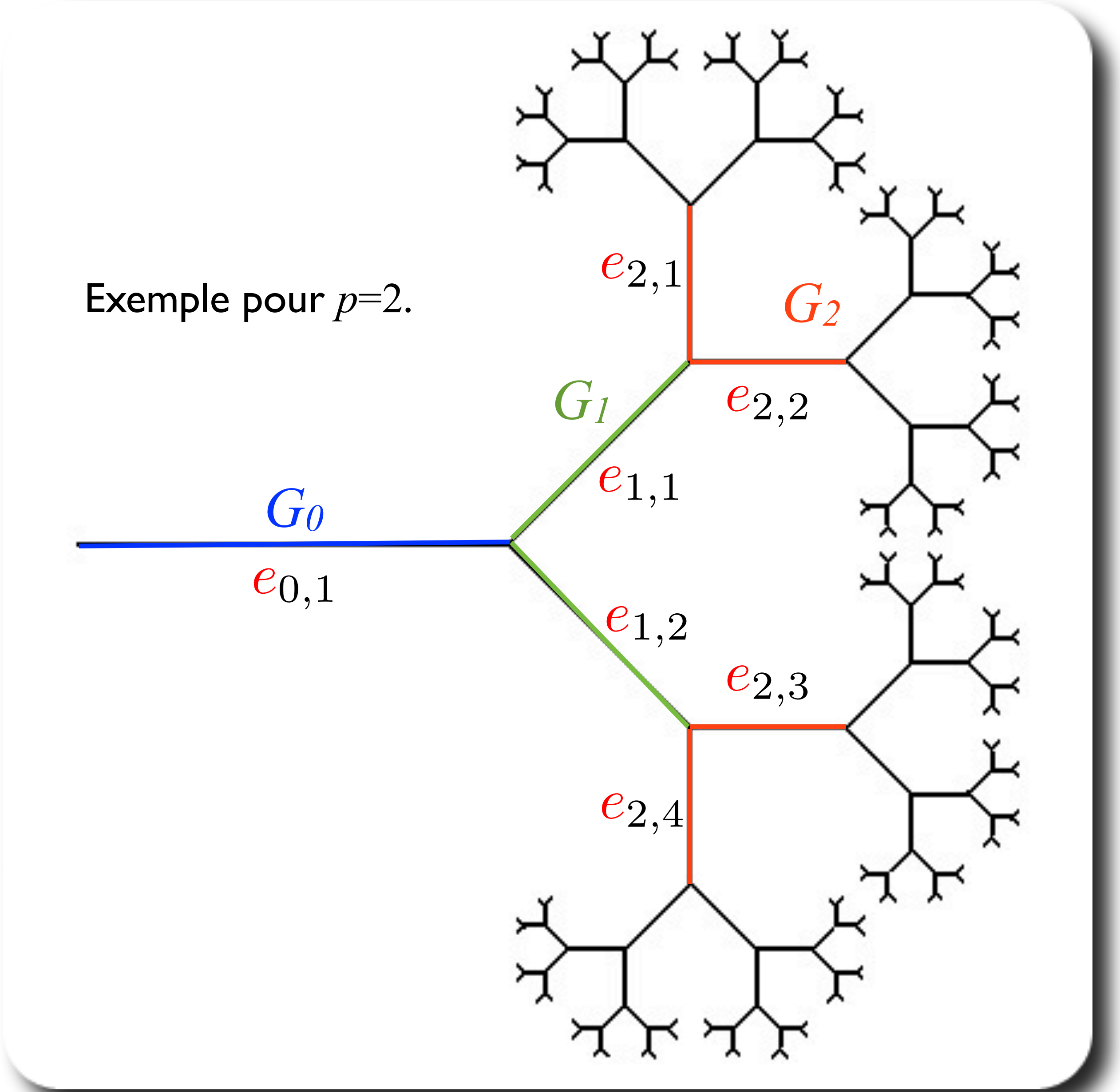
- Nous considérons Σ un segment générateur de longueur 1.

$$e_{0,1} = \Sigma$$

- Nous prenons aussi p similitudes strictement contractantes s_i de rapport respectif $\alpha_i<1$.
- Nous définissons alors les branches du réseau infini de la manière suivante:

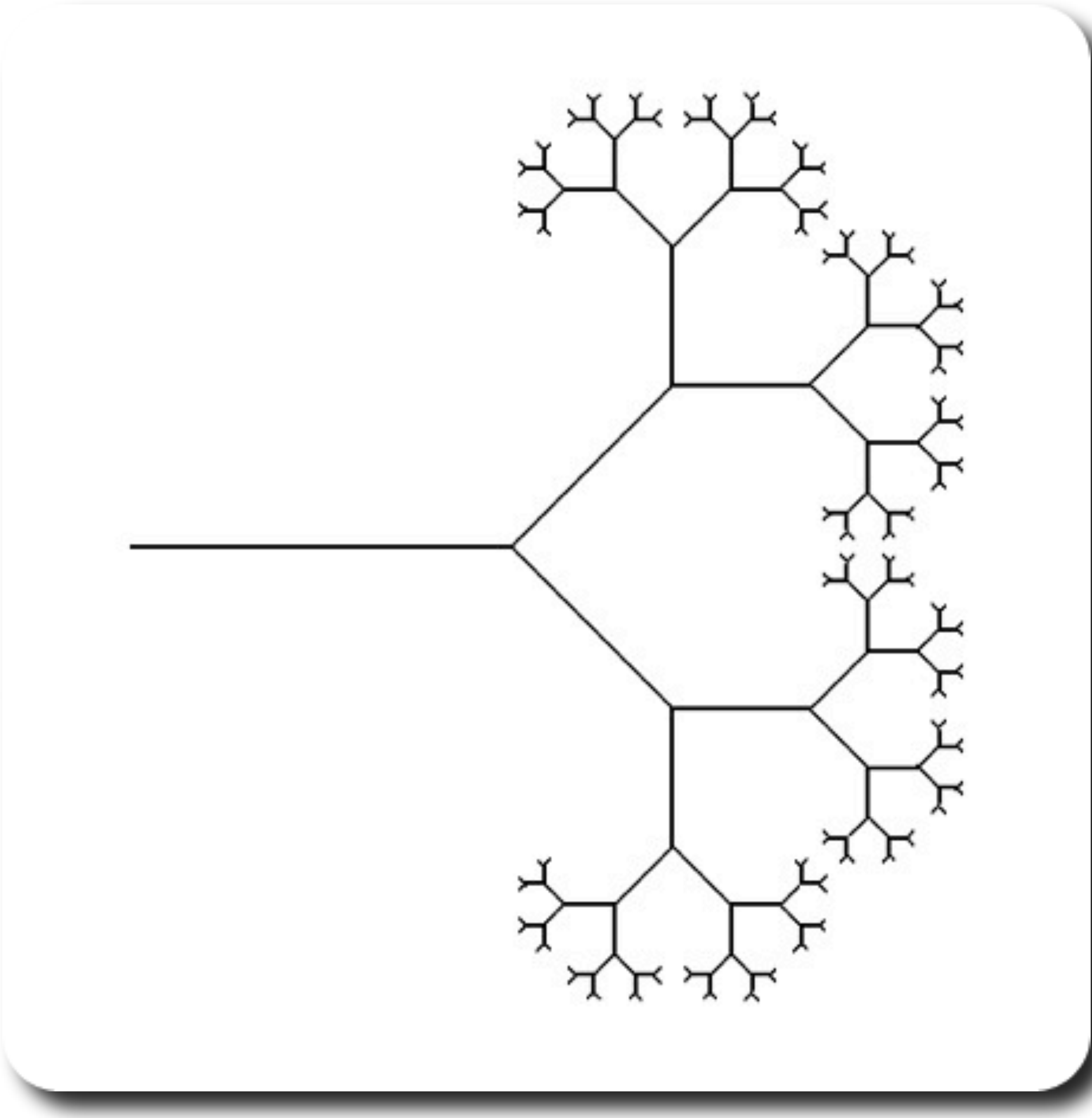
$$e_{1,k} = s_k(e_{0,1}), \quad 1 \leq k \leq p$$

$$e_{n+1,p(j-1)+k} = s_k(e_{n,j}), \quad 1 \leq j \leq p^n,\ 1 \leq k \leq p$$

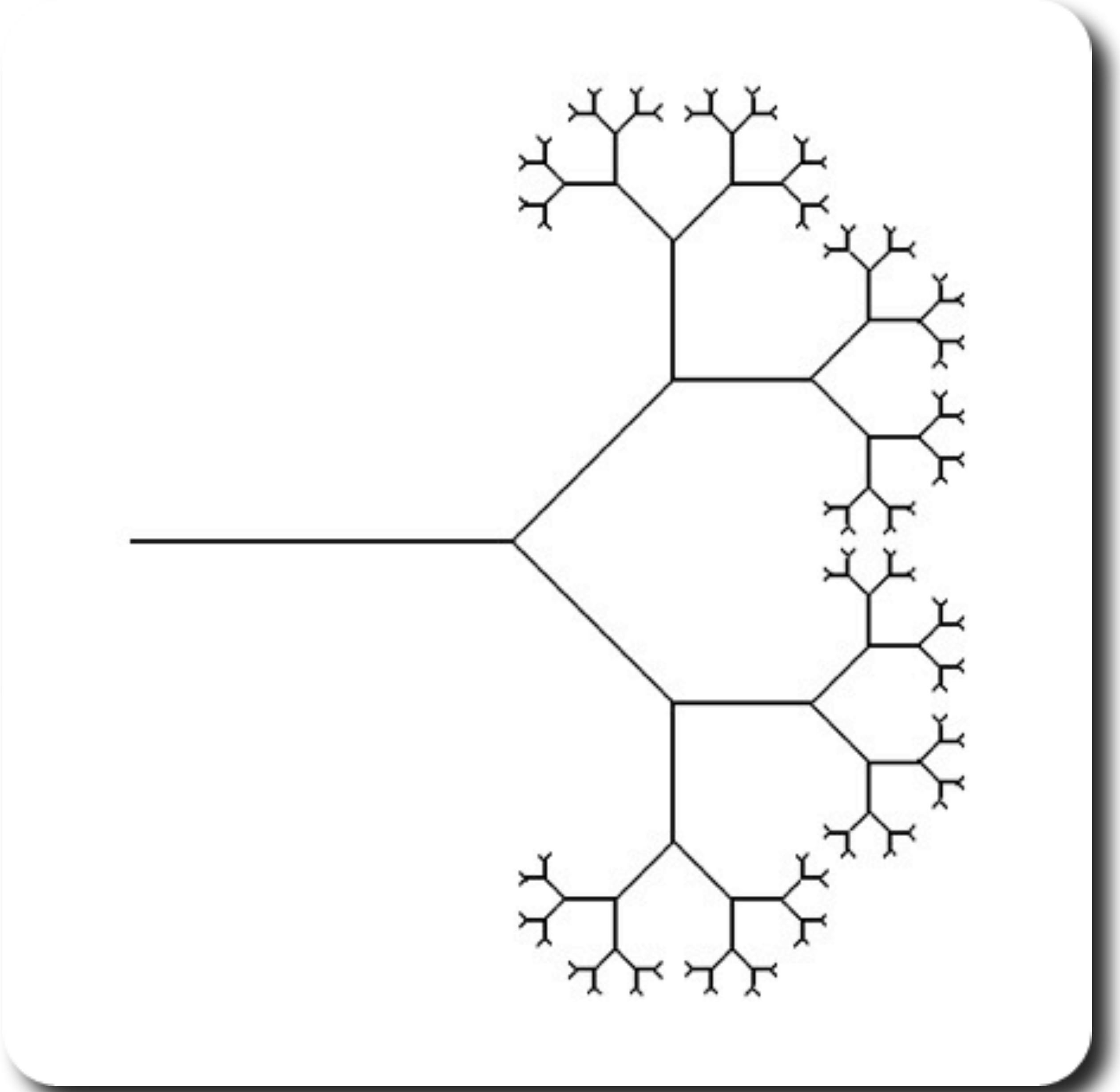


$$\boxed{G_n = \bigcup_{j=1}^{p^n} e_{n,j}} \qquad \boxed{\mathcal{T}_n = \bigcup_{m=0}^{n} G_m} \qquad \boxed{\mathcal{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n}$$

Passage à un réseau infini - buts

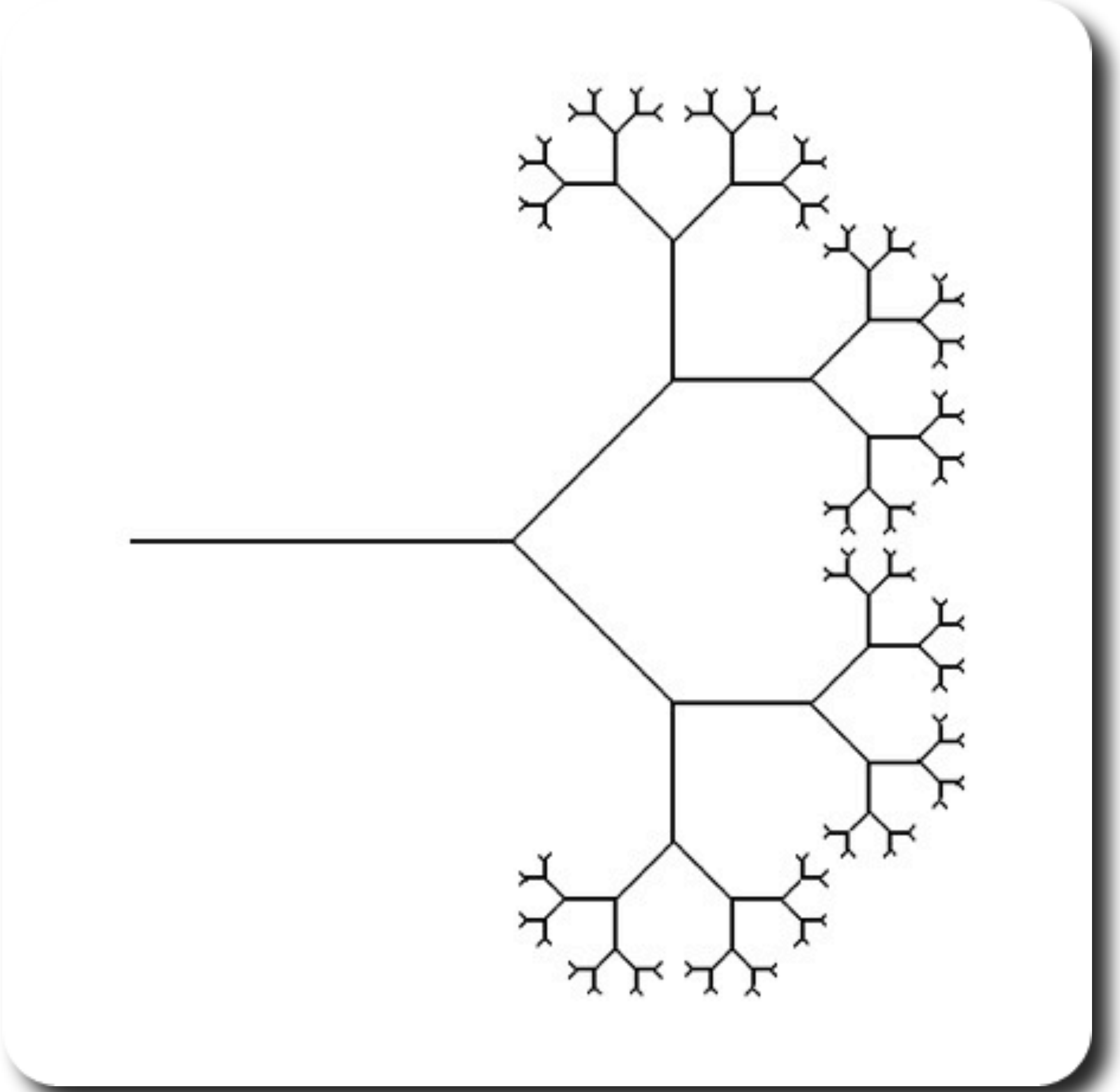


- Définir proprement l'équation d'onde sur cet arbre infini.



Passage à un réseau infini - buts

- Définir proprement l'équation d'onde sur cet arbre infini.
- Remplacer la résolution de l'équation sur cet arbre par un opérateur DtN vivant à l'entrée de l'arbre.



Passage à un réseau infini - préludes

- Nous reprenons le problème d'équation d'ondes, avec conditions de Kirchhoff standard:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbf{1D}} u_i^0 & = & 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times (CM_i) \\ \dfrac{\partial u_i^0}{\partial \vec{n}} & = & 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \{M_i\} \\ u_i^0(t,C) & = & u_j^0(t,C), \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ \displaystyle\sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \vec{n}}(t,C) & = & 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

- Nous reprenons le problème d'équation d'ondes, avec conditions de Kirchhoff standard:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbf{1D}} u_i^0 & = & 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times (CM_i) \\ \dfrac{\partial u_i^0}{\partial \vec{n}} & = & 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \{M_i\} \\ u_i^0(t,C) & = & u_j^0(t,C), \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ \displaystyle\sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \vec{n}}(t,C) & = & 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right.$$

- Nous pouvons réécrire cette équation au sens des distributions sous la forme

$$\mu\, \partial_{t^2} u^0 - \partial_s \left(\mu\, \partial_s u^0\right) = 0$$

où le poids μ est une fonction définie par $\mu = c_i$ sur (CM_i).

Passage à un réseau infini - préludes

- Nous reprenons le problème d'équation d'ondes, avec conditions de Kirchhoff standard:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbf{1D}} u_i^0 &= 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times (CM_i) \\ \frac{\partial u_i^0}{\partial \vec{n}} &= 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \{M_i\} \\ u_i^0(t, C) &= u_j^0(t, C), \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ \sum_{i=1}^{N} c_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \vec{n}}(t, C) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}\right.$$

- Nous pouvons réécrire cette équation au sens des distributions sous la forme

$$\mu\, \partial_{t^2} u^0 - \partial_s \left(\mu\, \partial_s u^0\right) = 0$$

où le poids μ est une fonction définie par $\mu = c_i$ sur (CM_i).

- Nous allons nous servir de cette formulation pour écrire un problème sur un arbre infini.

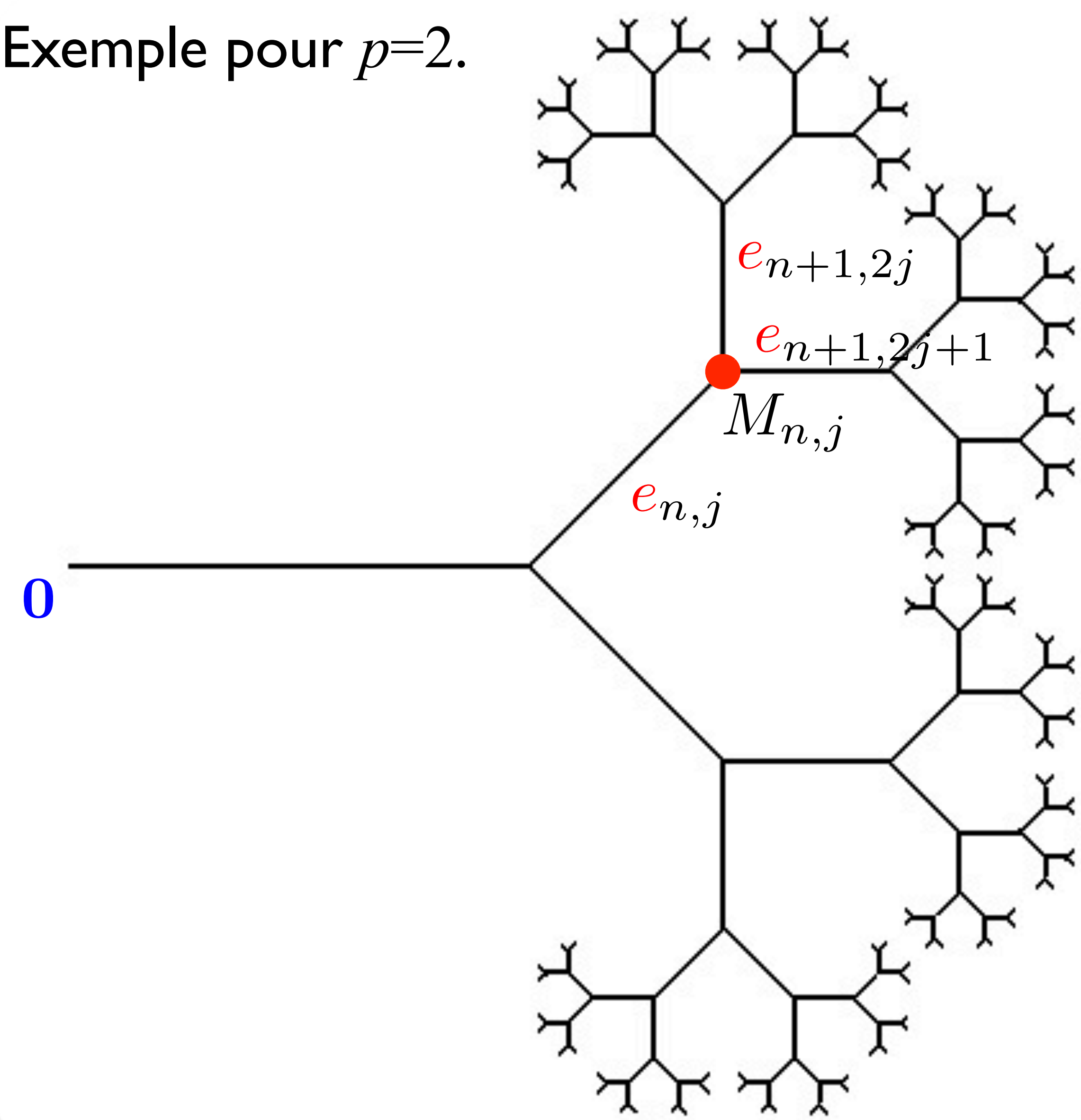
Passage à un réseau infini - poids

Soit $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \cdot \mu(\mathbf{x})$

Soit $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \cdot \mu(\mathbf{x})$

$$\mu(e_{0.1}) = 1,\ \mu(e_{1.k}) = \mu_k,\ \mu(e_{n+1.p(j-1)+k}) = \mu_k \cdot \mu(e_{n.j})$$

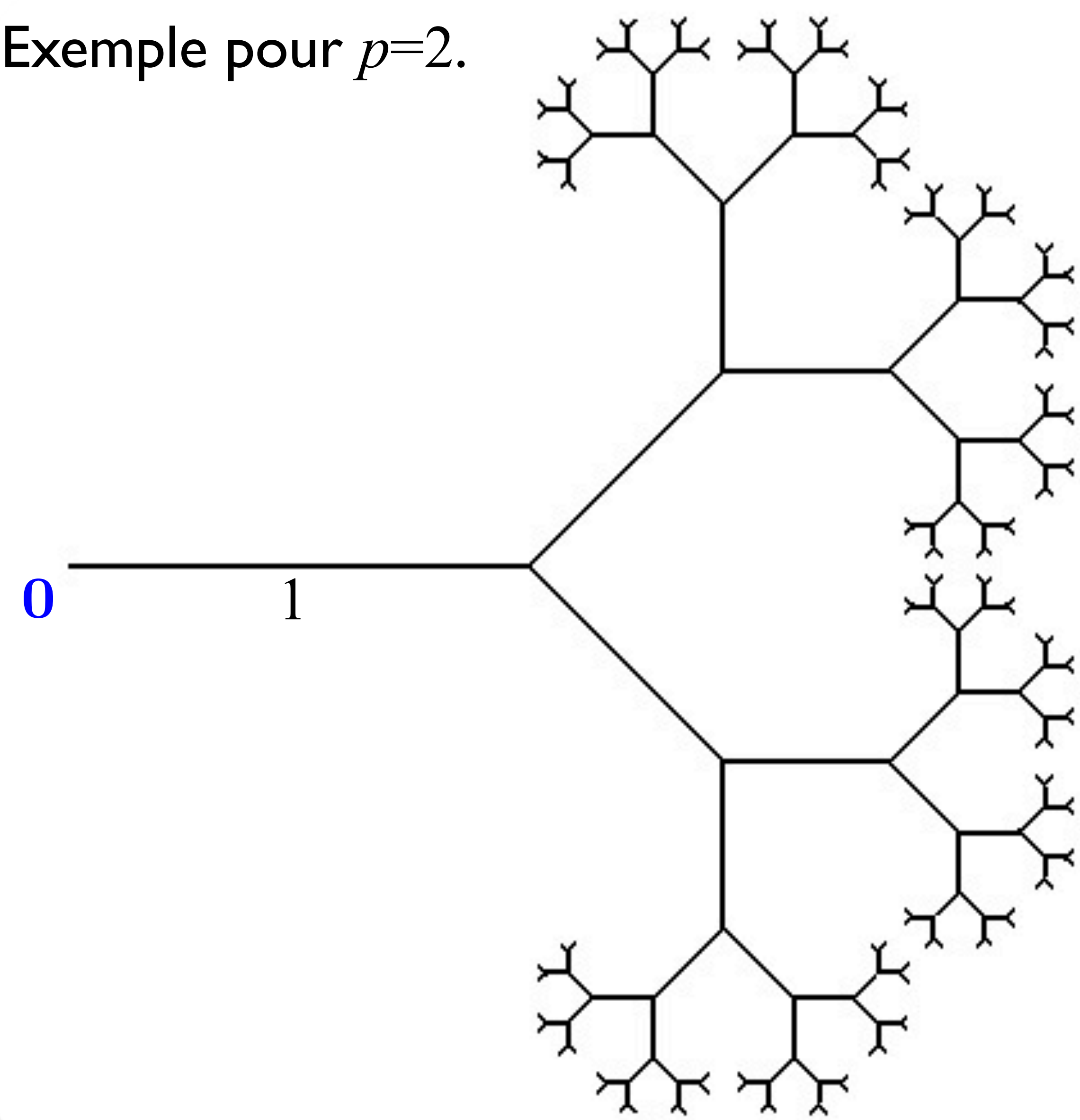
Exemple pour p=2.



Soit $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \cdot \mu(\mathbf{x})$

$$\mu(e_{0.1}) = 1, \ \mu(e_{1.k}) = \mu_k, \ \mu(e_{n+1.p(j-1)+k}) = \mu_k \cdot \mu(e_{n.j})$$

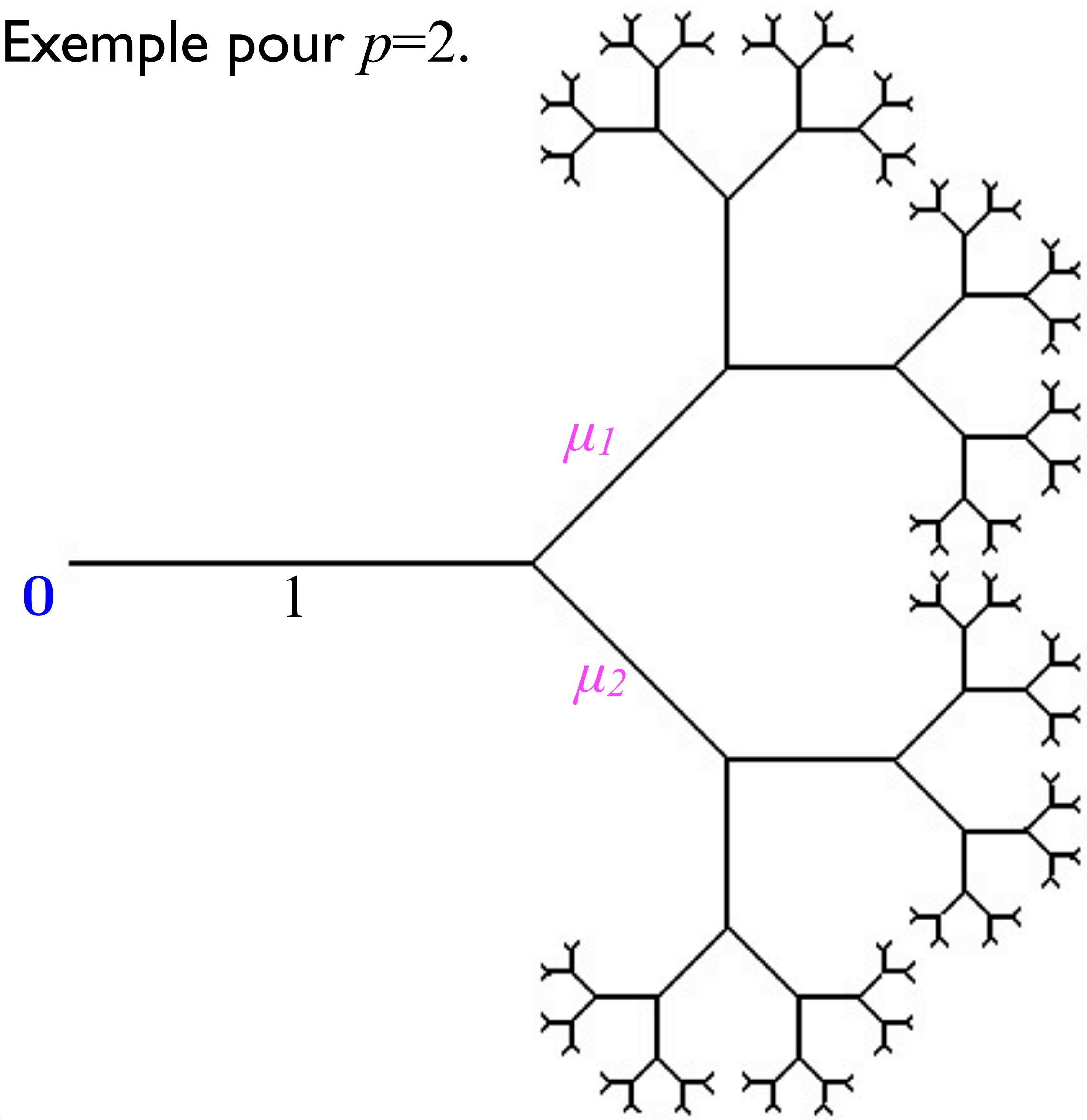
Exemple pour p=2.



Soit $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \cdot \mu(\mathbf{x})$

$$\mu(e_{0.1}) = 1, \ \mu(e_{1.k}) = \mu_k, \ \mu(e_{n+1.p(j-1)+k}) = \mu_k \cdot \mu(e_{n.j})$$

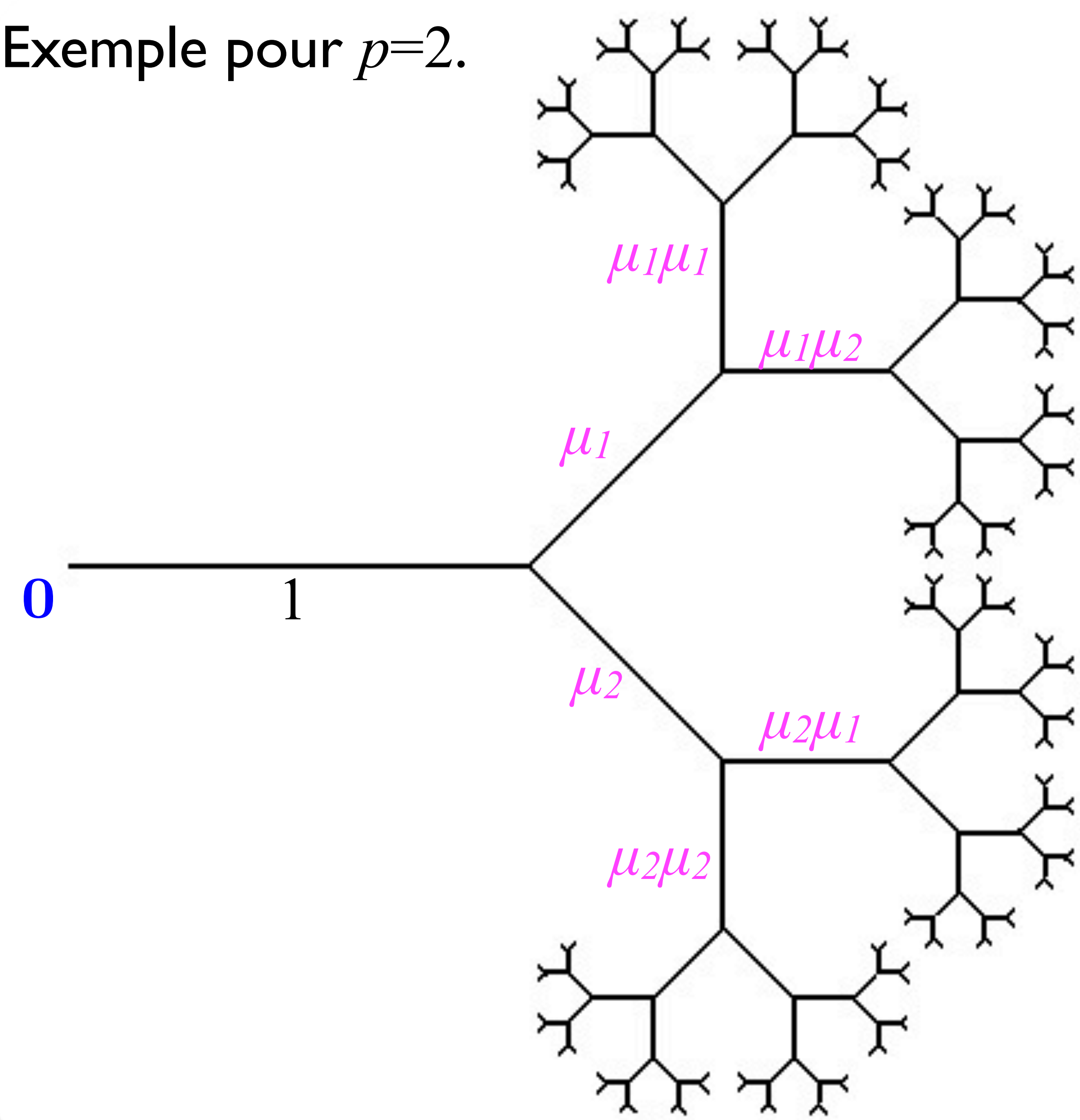
Exemple pour p=2.



Soit $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \cdot \mu(\mathbf{x})$

$$\mu(e_{0.1}) = 1, \;\; \mu(e_{1.k}) = \mu_k, \;\; \mu(e_{n+1.p(j-1)+k}) = \mu_k \cdot \mu(e_{n.j})$$

Exemple pour p=2.



Équation d'onde auto-similaire

Soit $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \cdot \mu(\mathbf{x})$

$$\mu(e_{0.1}) = 1,\ \mu(e_{1.k}) = \mu_k,\ \mu(e_{n+1.p(j-1)+k}) = \mu_k \cdot \mu(e_{n.j})$$

Équation d'onde auto-similaire

Soit $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \cdot \mu(\mathbf{x})$

$$\mu(e_{0.1}) = 1, \; \mu(e_{1.k}) = \mu_k, \; \mu(e_{n+1.p(j-1)+k}) = \mu_k \cdot \mu(e_{n.j})$$

Exemple : le poumon humain $p = 2,$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \simeq 0.85$$
$$\mu_k = \alpha_k^2 \simeq 0.72$$

Équation d'onde auto-similaire

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE — INRIA

Soit $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \cdot \mu(\mathbf{x})$

$$\mu(e_{0.1}) = 1, \;\; \mu(e_{1.k}) = \mu_k, \;\; \mu(e_{n+1.p(j-1)+k}) = \mu_k \cdot \mu(e_{n.j})$$

Exemple : le poumon humain $p = 2,$ $\alpha_1 = \alpha_2 \simeq 0.85$

$\mu_k = \alpha_k^2 \simeq 0.72$

Pour construire une condition DtN à l'entrée de l'arbre, nous devons résoudre

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu\partial_{t^2} u - \partial_s\left(\mu\partial_s u\right) & = & 0 \text{ dans } \mathcal{T} \\ u(t, \mathbf{0}) & = & u_0(t) \\ & + & \text{condition à l'infini de } \mathcal{T} \end{array} \right.$$

et calculer la dérivée normale de la solution à l'entrée.

Équation de Helmholtz auto-similaire

Nous utilisons la transformation de Fourier-Laplace

$$u(t, s) \to \mathbf{u}(\omega, s), \quad s \in \mathcal{T}$$

Équation de Helmholtz auto-similaire

Nous utilisons la transformation de Fourier-Laplace

$$u(t,s) \to \mathbf{u}(\omega, s), \quad s \in \mathcal{T}$$

Nous obtenons alors l'équation suivante:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mu\,\omega^2\,\mathbf{u} - \partial_s\left(\mu \partial_s \mathbf{u}\right) & = & 0 \text{ dans } \mathcal{T} \\ \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) & = & \mathbf{u}_0(\omega) := 1 \\ & + & \text{condition à l'infini de } \mathcal{T} \end{array} \right.$$

Équation de Helmholtz auto-similaire

Nous utilisons la transformation de Fourier-Laplace

$$u(t,s) \to \mathbf{u}(\omega,s), \quad s \in \mathcal{T}$$

Nous obtenons alors l'équation suivante:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mu\,\omega^2\,\mathbf{u} - \partial_s\left(\mu\partial_s\mathbf{u}\right) & = & 0 \text{ dans } \mathcal{T} \\ \mathbf{u}(\omega,\mathbf{0}) & = & \mathbf{u}_0(\omega) := 1 \\ & + & \text{condition à l'infini de } \mathcal{T} \end{array} \right.$$

Nous allons définir la notion de condition de Dirichlet ou de Neumann à l'infini en utilisant une approche variationnelle.

Équation de Helmholtz auto-similaire

Nous utilisons la transformation de Fourier-Laplace

$$u(t,s) \to \mathbf{u}(\omega,s), \quad s \in \mathcal{T}$$

Nous obtenons alors l'équation suivante:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mu\,\omega^2\,\mathbf{u} - \partial_s\left(\mu\partial_s\mathbf{u}\right) & = & 0 \text{ dans } \mathcal{T} \\ \mathbf{u}(\omega,\mathbf{0}) & = & \mathbf{u}_0(\omega) := 1 \\ & + & \text{condition à l'infini de } \mathcal{T} \end{array} \right.$$

Nous allons définir la notion de condition de Dirichlet ou de Neumann à l'infini en utilisant une approche variationnelle.

→ Définition des espaces $\mathrm{H}^1_\mu(\mathcal{T})$ (espace de Sobolev) et de $\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T})$ (espace de Beppo-Levi) pour le problème avec condition de Neumann à l'infini.

Nous utilisons la transformation de Fourier-Laplace

$$u(t,s) \to \mathbf{u}(\omega,s), \quad s \in \mathcal{T}$$

Nous obtenons alors l'équation suivante:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mu\,\omega^2\,\mathbf{u} - \partial_s\,(\mu\partial_s\mathbf{u}) & = & 0 \text{ dans } \mathcal{T} \\ \mathbf{u}(\omega,\mathbf{0}) & = & \mathbf{u}_0(\omega) := 1 \\ & + & \text{condition à l'infini de } \mathcal{T} \end{array} \right.$$

Nous allons définir la notion de condition de Dirichlet ou de Neumann à l'infini en utilisant une approche variationnelle.

→ Définition des espaces $\mathrm{H}^1_\mu(\mathcal{T})$ (espace de Sobolev) et de $\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T})$ (espace de Beppo-Levi) pour le problème avec condition de Neumann à l'infini.

→ Définition des espaces $\mathrm{H}^1_{\mu,0}(\mathcal{T})$ (espace de Sobolev) et de $\mathcal{H}^1_{\mu,0}(\mathcal{T})$ (espace de Beppo-Levi) pour le problème avec condition de Dirichlet à l'infini.

Nous utilisons la transformation de Fourier-Laplace

$$u(t,s) \to \mathbf{u}(\omega, s), \quad s \in \mathcal{T}$$

Nous obtenons alors l'équation suivante:

$$\begin{cases} -\mu\,\omega^2\,\mathbf{u} - \partial_s\left(\mu\partial_s\mathbf{u}\right) & = & 0 \text{ dans } \mathcal{T} \\ \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) & = & \mathbf{u}_0(\omega) := 1 \\ & + & \text{condition à l'infini de } \mathcal{T} \end{cases}$$

Nous allons définir la notion de condition de Dirichlet ou de Neumann à l'infini en utilisant une approche variationnelle.

→ Définition des espaces $\mathrm{H}^1_\mu(\mathcal{T})$ (espace de Sobolev) et de $\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T})$ (espace de Beppo-Levi) pour le problème avec condition de Neumann à l'infini.

→ Définition des espaces $\mathrm{H}^1_{\mu,0}(\mathcal{T})$ (espace de Sobolev) et de $\mathcal{H}^1_{\mu,0}(\mathcal{T})$ (espace de Beppo-Levi) pour le problème avec condition de Dirichlet à l'infini.

Théorème

$$\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T}) \neq \mathcal{H}^1_{\mu,0}(\mathcal{T}) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i} > 1$$

Nous utilisons la transformation de Fourier-Laplace

$$u(t,s) \to \mathbf{u}(\omega,s), \quad s \in \mathcal{T}$$

Nous obtenons alors l'équation suivante:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\mu\,\omega^2\,\mathbf{u} - \partial_s\left(\mu\partial_s\mathbf{u}\right) & = & 0 \text{ dans } \mathcal{T} \\ \mathbf{u}(\omega,\mathbf{0}) & = & \mathbf{u}_0(\omega) := 1 \\ & + & \text{condition à l'infini de } \mathcal{T} \end{array}\right.$$

Nous allons définir la notion de condition de Dirichlet ou de Neumann à l'infini en utilisant une approche variationnelle.

→ Définition des espaces $\mathrm{H}^1_\mu(\mathcal{T})$ (espace de Sobolev) et de $\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T})$ (espace de Beppo-Levi) pour le problème avec condition de Neumann à l'infini.

→ Définition des espaces $\mathrm{H}^1_{\mu,0}(\mathcal{T})$ (espace de Sobolev) et de $\mathcal{H}^1_{\mu,0}(\mathcal{T})$ (espace de Beppo-Levi) pour le problème avec condition de Dirichlet à l'infini.

Théorème

$$\mathcal{H}^1_\mu(\mathcal{T}) \neq \mathcal{H}^1_{\mu,0}(\mathcal{T}) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i} > 1}$$

Construction de la condition DtN

Définition (Λ)

$$\Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega) := \mathbf{u}'_{\mathfrak{d}}(\omega, \mathbf{0}) \qquad \Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega) := \mathbf{u}'_{\mathfrak{n}}(\omega, \mathbf{0})$$

Définition (Λ)

$$\Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega) := \mathbf{u}'_{\mathfrak{d}}(\omega, \mathbf{0}) \qquad \Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega) := \mathbf{u}'_{\mathfrak{n}}(\omega, \mathbf{0})$$

L'opérateur DtN correspondant à l'arbre $\mathcal{T}$ est

$$\partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) \quad \text{ou} \quad \partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0})$$

suivant que l'on prenne une condition de Dirichlet ou de Neumann à l'infini.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE — INRIA

Définition (Λ)

$$\Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega) := \mathbf{u}'_{\mathfrak{d}}(\omega, \mathbf{0}) \qquad \Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega) := \mathbf{u}'_{\mathfrak{n}}(\omega, \mathbf{0})$$

L'opérateur DtN correspondant à l'arbre $\mathcal{T}$ est

$$\partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) \quad \text{ou} \quad \partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0})$$

suivant que l'on prenne une condition de Dirichlet ou de Neumann à l'infini.

Si la longueur de la première branche de $\mathcal{T}$ is ℓ , en utilisant un argument de scalabilité, nous avons

$$\partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \ell^{-1}\Lambda_{\mathfrak{d}}(\ell\,\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) \quad \text{ou} \quad \partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \ell^{-1}\Lambda_{\mathfrak{n}}(\ell\,\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0})$$

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE INRIA

Définition (Λ)

$$\Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega) := \mathbf{u}'_{\mathfrak{d}}(\omega, \mathbf{0}) \qquad \Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega) := \mathbf{u}'_{\mathfrak{n}}(\omega, \mathbf{0})$$

L'opérateur DtN correspondant à l'arbre $\mathcal{T}$ est

$$\partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) \quad \text{ou} \quad \partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0})$$

suivant que l'on prenne une condition de Dirichlet ou de Neumann à l'infini.

Si la longueur de la première branche de $\mathcal{T}$ is ℓ , en utilisant un argument de scalabilité, nous avons

$$\partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \ell^{-1}\Lambda_{\mathfrak{d}}(\ell\,\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) \quad \text{ou} \quad \partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \ell^{-1}\Lambda_{\mathfrak{n}}(\ell\,\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0})$$

Si nous tronquons au bout de la génération n, nous obtenons une condition de la forme suivante sur chaque sous-arbre tronqué:

$$\partial_s \mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) = \ell_n^{-1}\Lambda_{\mathfrak{d},\mathfrak{n}}(\ell_n\,\omega)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{0}) \quad \text{avec} \quad \ell_n \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant p} \alpha_i\right)^n$$

Caractérisation de la fonction Λ

Caractérisation de la fonction Λ

Proposition

$$(E) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

Caractérisation de la fonction Λ

Proposition

$$(E) \qquad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\Lambda(\omega) = F_{\alpha,\mu}\left(\Lambda(\alpha_1\,\omega), \ldots, \Lambda(\alpha_p\,\omega)\right)$$

Caractérisation de la fonction Λ

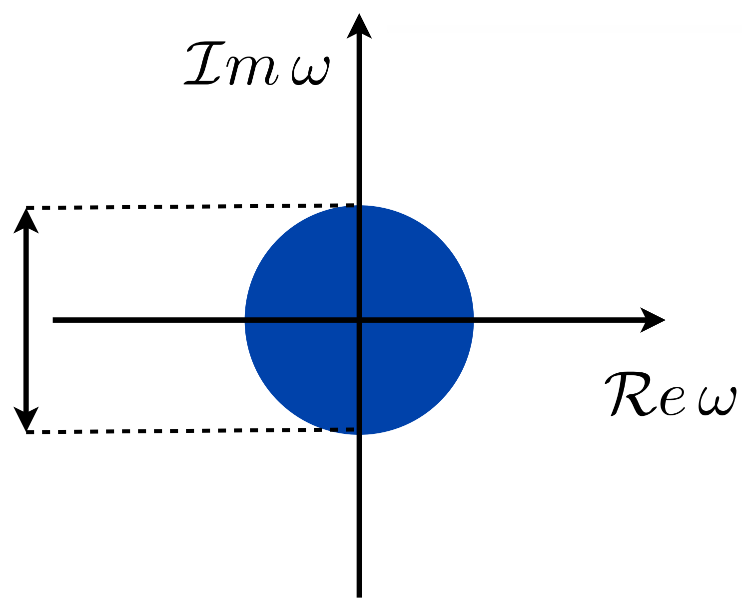
Proposition

$$(E) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\Lambda(\omega) = F_{\alpha,\mu}\left(\Lambda(\alpha_1\,\omega), \ldots, \Lambda(\alpha_p\,\omega)\right)$$

δ



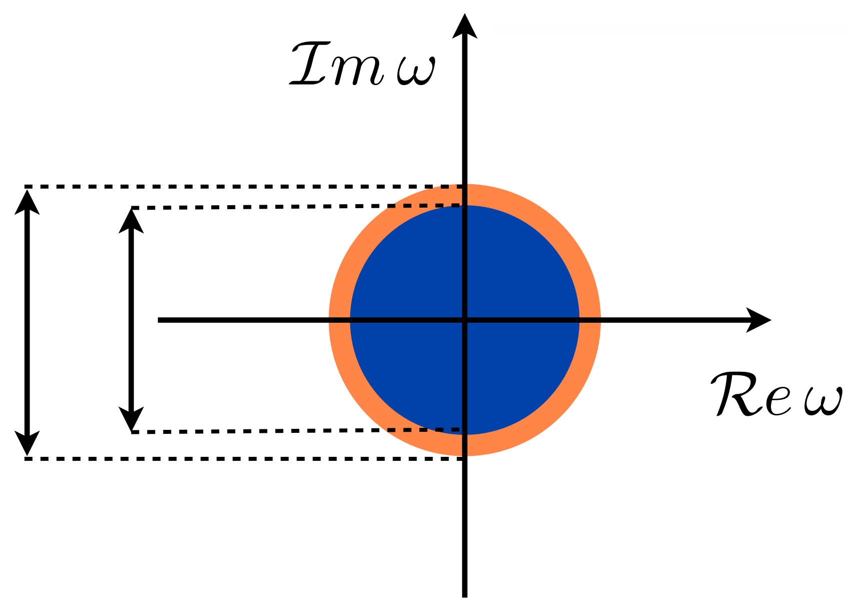
Proposition

$$(E) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\Lambda(\omega) = F_{\alpha,\mu}\left(\Lambda(\alpha_1\,\omega), \dots, \Lambda(\alpha_p\,\omega)\right)$$

$\gamma \quad \delta$



$$\boxed{\gamma := \left(\max_{1\leq i\leq p} \alpha_i\right)^{-1} > 1}$$

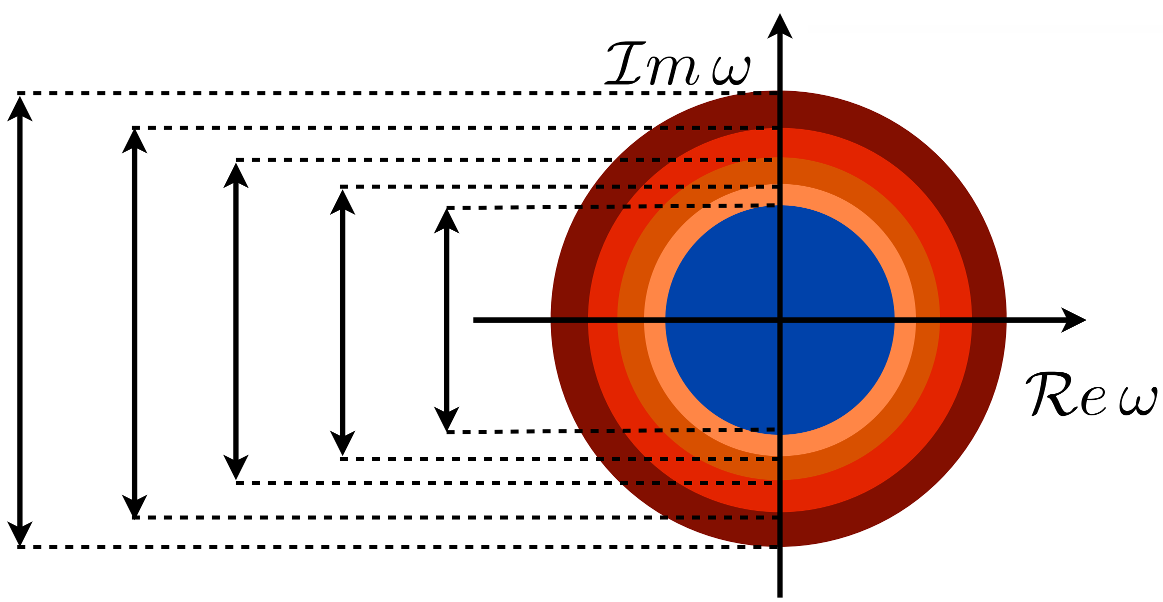
Proposition

$$(\mathrm{E}) \qquad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\Lambda(\omega) = F_{\alpha,\mu}\left(\Lambda(\alpha_1\,\omega),\ldots,\Lambda(\alpha_p\,\omega)\right)$$

$\gamma^4\,\delta$



$$\boxed{\gamma := \left(\max_{1\leq i\leq p}\ \alpha_i\right)^{-1} > 1}$$

Caractérisation de la fonction Λ

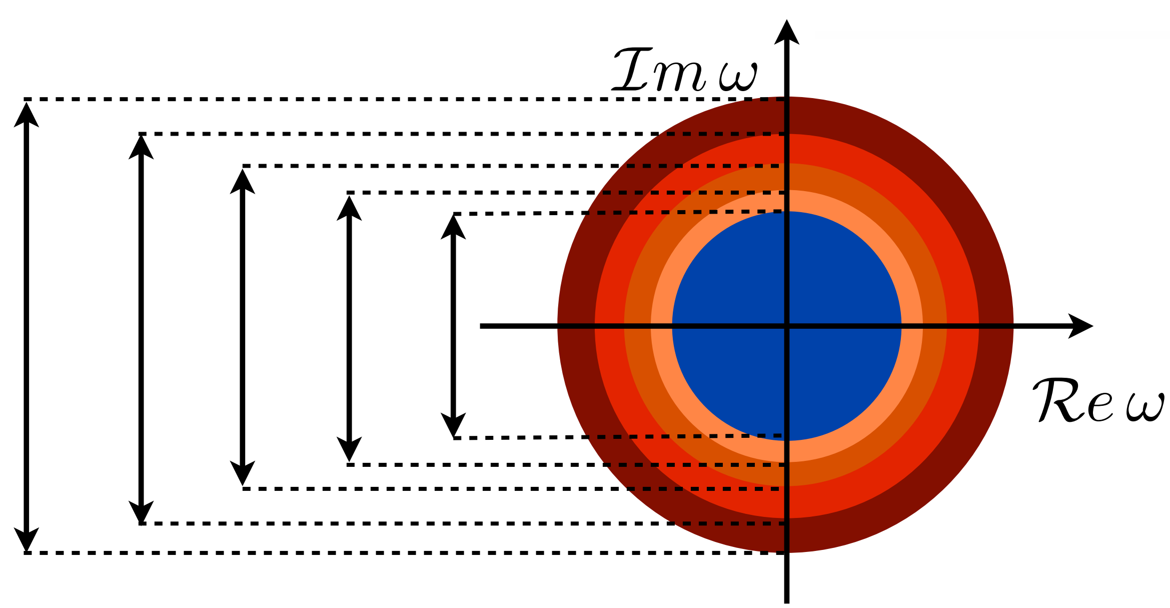
Proposition

$$(\mathrm{E}) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\Lambda(\omega) = F_{\alpha,\mu}\left(\Lambda(\alpha_1\,\omega), \ldots, \Lambda(\alpha_p\,\omega)\right)$$

$\gamma^4\,\delta$



$$\boxed{\gamma := \left(\max_{1\leq i\leq p} \alpha_i\right)^{-1} > 1}$$

La fréquence $\omega = 0$ joue un rôle particulier: $\omega = \alpha_i\,\omega$.

Caractérisation de la fonction Λ

Théorème

$$(E) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

Caractérisation de la fonction Λ

Théorème

$$(\mathrm{E}) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

La fonction $\Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega)$ est l'unique fonction méromorphe solution de (E) telle que

$$\Lambda_{\mathfrak{n}}(0) = \Lambda_{\mathfrak{n}} = 0$$

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE — INRIA

Théorème

$$(E) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

La fonction $\Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega)$ est l'unique fonction méromorphe solution de (E) telle que

$$\Lambda_{\mathfrak{n}}(0) = \Lambda_{\mathfrak{n}} = 0$$

La fonction $\Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega)$ est l'unique fonction méromorphe solution de (E) telle que

$$\Lambda_{\mathfrak{d}}(0) = \Lambda_{\mathfrak{d}} = \left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{\alpha_i}\right)^{-1}\left(1 - \sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{\alpha_i}\right)$$

Caractérisation de la fonction Λ

Théorème

$$(E) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

La fonction $\Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega)$ est l'unique fonction méromorphe solution de (E) telle que

$$\Lambda_{\mathfrak{n}}(0) = \Lambda_{\mathfrak{n}} = 0$$

La fonction $\Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega)$ est l'unique fonction méromorphe solution de (E) telle que

$$\Lambda_{\mathfrak{d}}(0) = \Lambda_{\mathfrak{d}} = \left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{\alpha_i}\right)^{-1}\left(1 - \sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{\alpha_i}\right)$$

Sans hypothèse de régularité, nous n'avons plus unicité de la fonction.

Calcul de Λ au voisinage de ω=0.

$$(\mathrm{E}) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

Calcul de Λ au voisinage de ω=0.

$$(\mathrm{E}) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

En effectuant des dérivations successives de (E) par rapport à ω, nous pouvons déterminer le développement de Taylor de $\Lambda(\omega)$, connaissant $\Lambda(0)$.

Calcul de Λ au voisinage de ω=0.

$$\text{(E)} \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

En effectuant des dérivations successives de (E) par rapport à ω, nous pouvons déterminer le développement de Taylor de $\Lambda(\omega)$, connaissant $\Lambda(0)$.

En particulier, nous obtenons

Calcul de Λ au voisinage de ω=0.

$$(\mathrm{E}) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

En effectuant des dérivations successives de (E) par rapport à ω, nous pouvons déterminer le développement de Taylor de $\Lambda(\omega)$, connaissant $\Lambda(0)$.

En particulier, nous obtenons

$$\Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega) = \Lambda_{\mathfrak{d}} + \omega^2\Lambda_{\mathfrak{d}}^{(2)} + O(\omega^4)$$

$$\Lambda_{\mathfrak{d}}^{(2)} = \frac{1}{3}\,\frac{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{\alpha_i} + \left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{\alpha_i}\right)^2}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{\alpha_i}\right)^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\mu_i\,\alpha_i}$$

Calcul de Λ au voisinage de ω=0.

$$(\mathrm{E}) \quad \Lambda(\omega)\cos(\omega) - \omega\sin(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\omega) + \Lambda(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)\Lambda(\alpha_i\,\omega)$$

En effectuant des dérivations successives de (E) par rapport à ω, nous pouvons déterminer le développement de Taylor de $\Lambda(\omega)$, connaissant $\Lambda(0)$.

En particulier, nous obtenons

$$\Lambda_{\mathfrak{d}}(\omega) = \Lambda_{\mathfrak{d}} + \omega^2\Lambda_{\mathfrak{d}}^{(2)} + O(\omega^4)$$

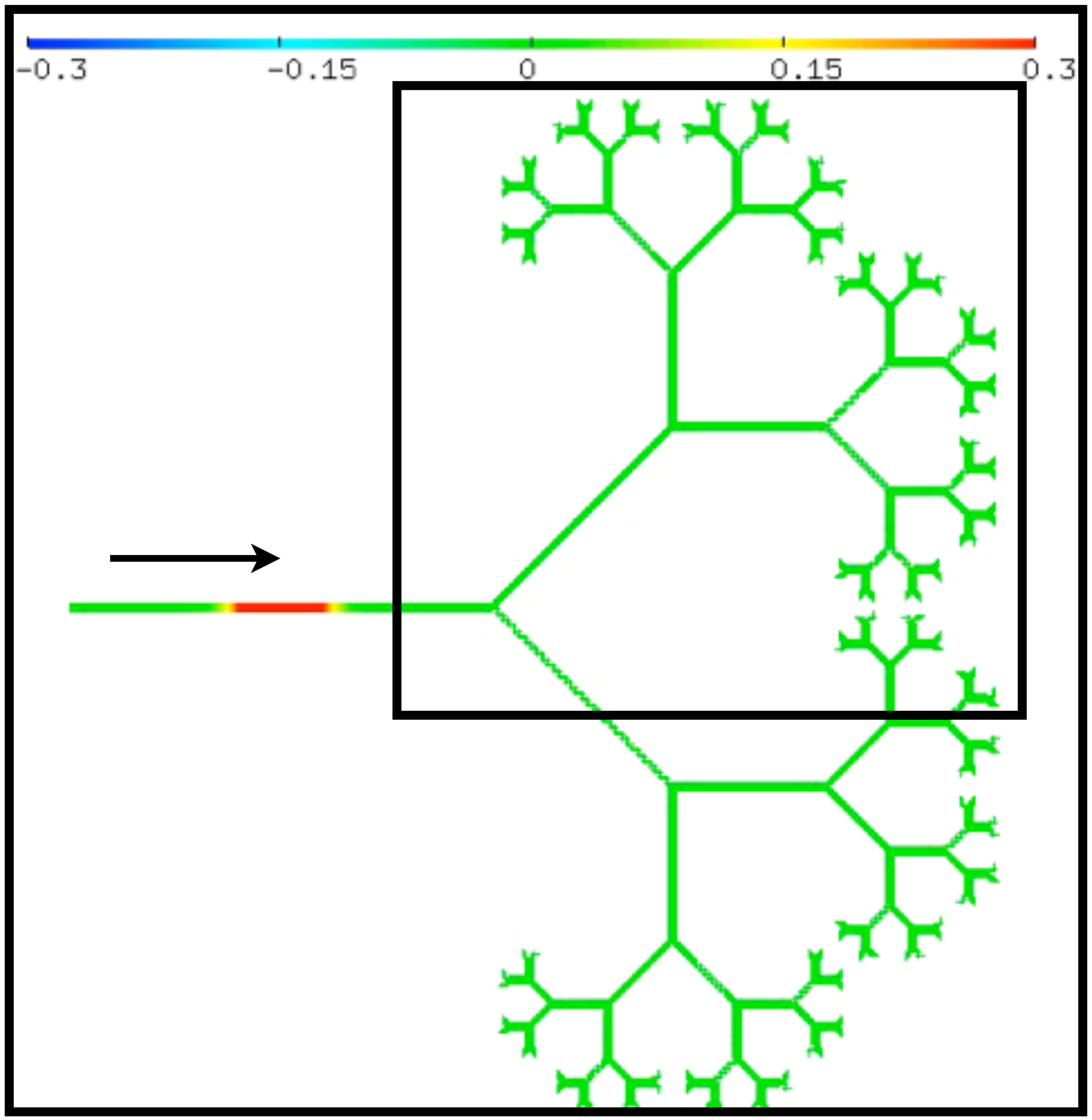
$$\Lambda_{\mathfrak{d}}^{(2)} = \frac{1}{3}\,\frac{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{\alpha_i} + \left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{\alpha_i}\right)^2}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{\alpha_i}\right)^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\mu_i\,\alpha_i}$$

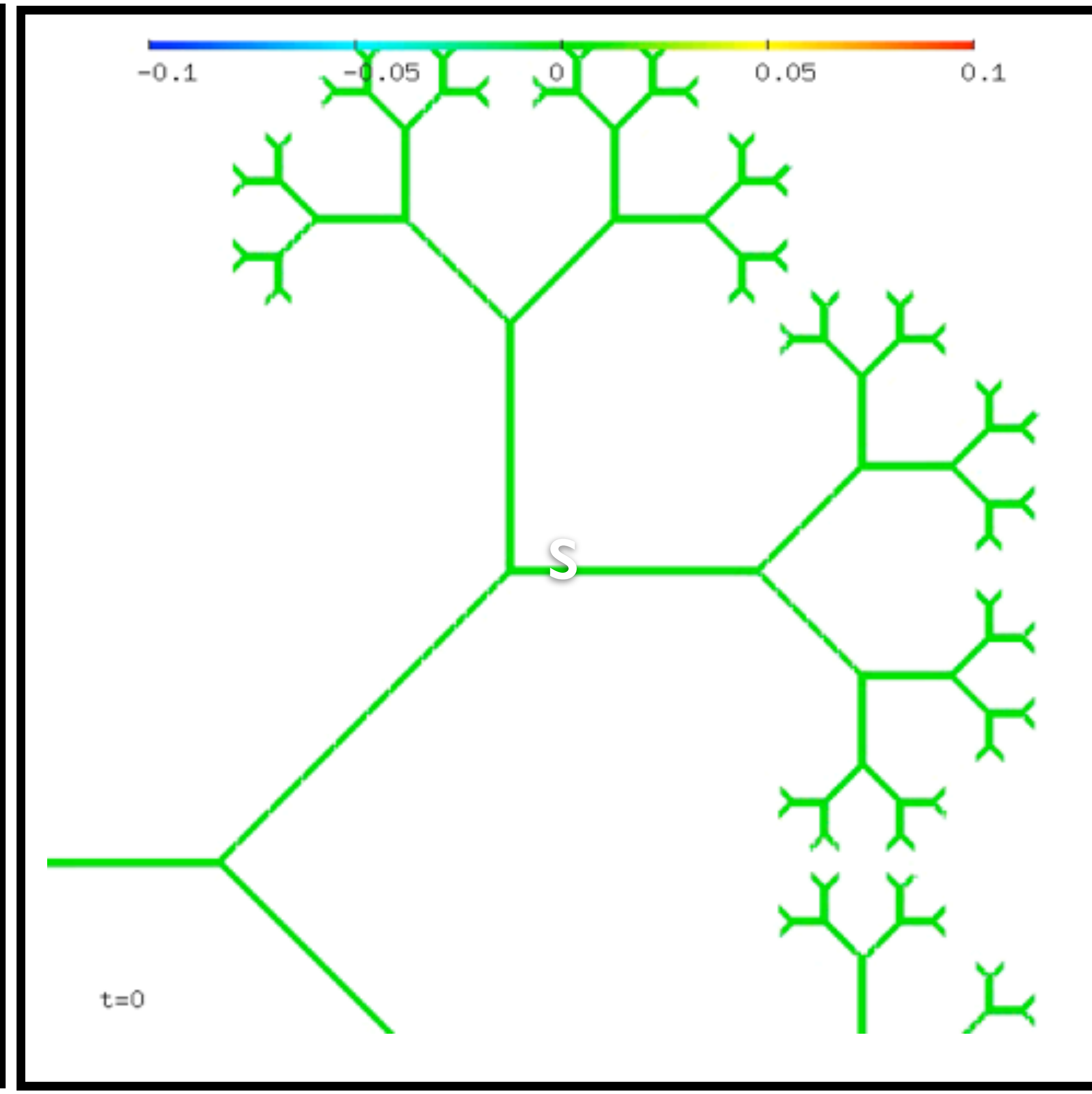
$$\Lambda_{\mathfrak{n}}(\omega) = \Lambda_{\mathfrak{n}} + \omega^2\Lambda_{\mathfrak{n}}^{(2)} + O(\omega^4)$$

$$\Lambda_{\mathfrak{n}}^{(2)} = \left(1 - \sum_{i=1}^{p}\mu_i\,\alpha_i\right)^{-1}$$

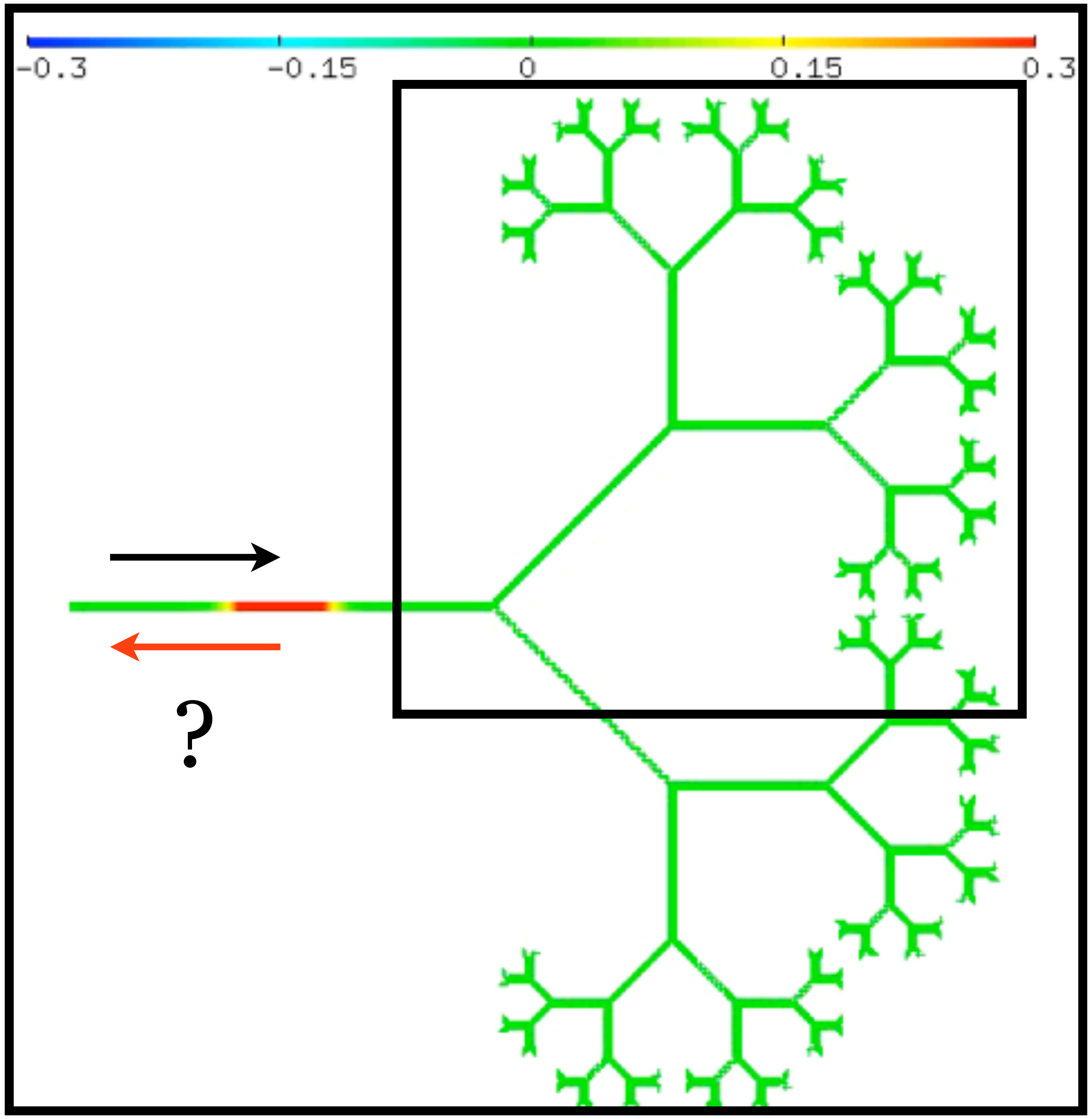
Simulations numériques

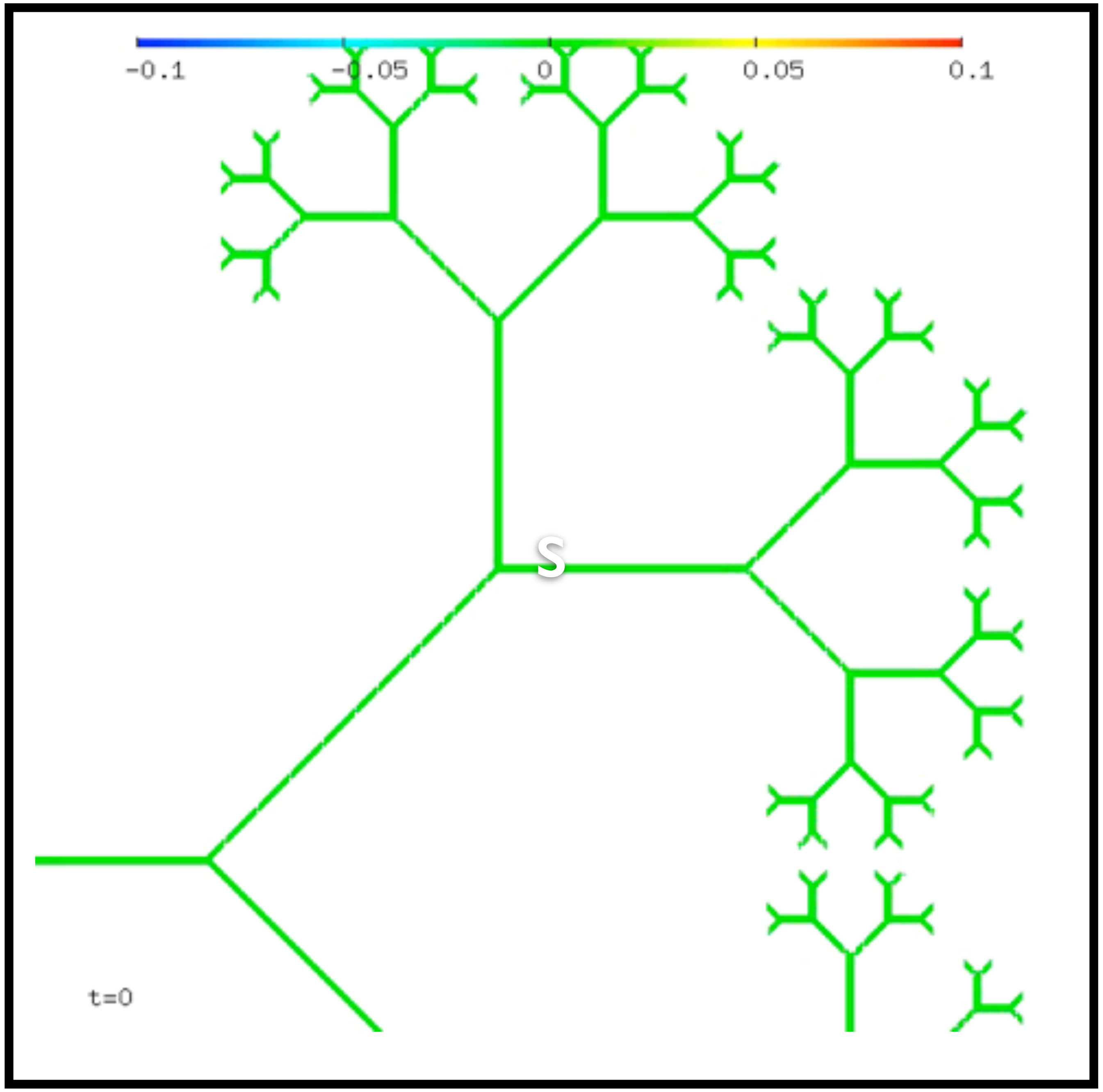
S



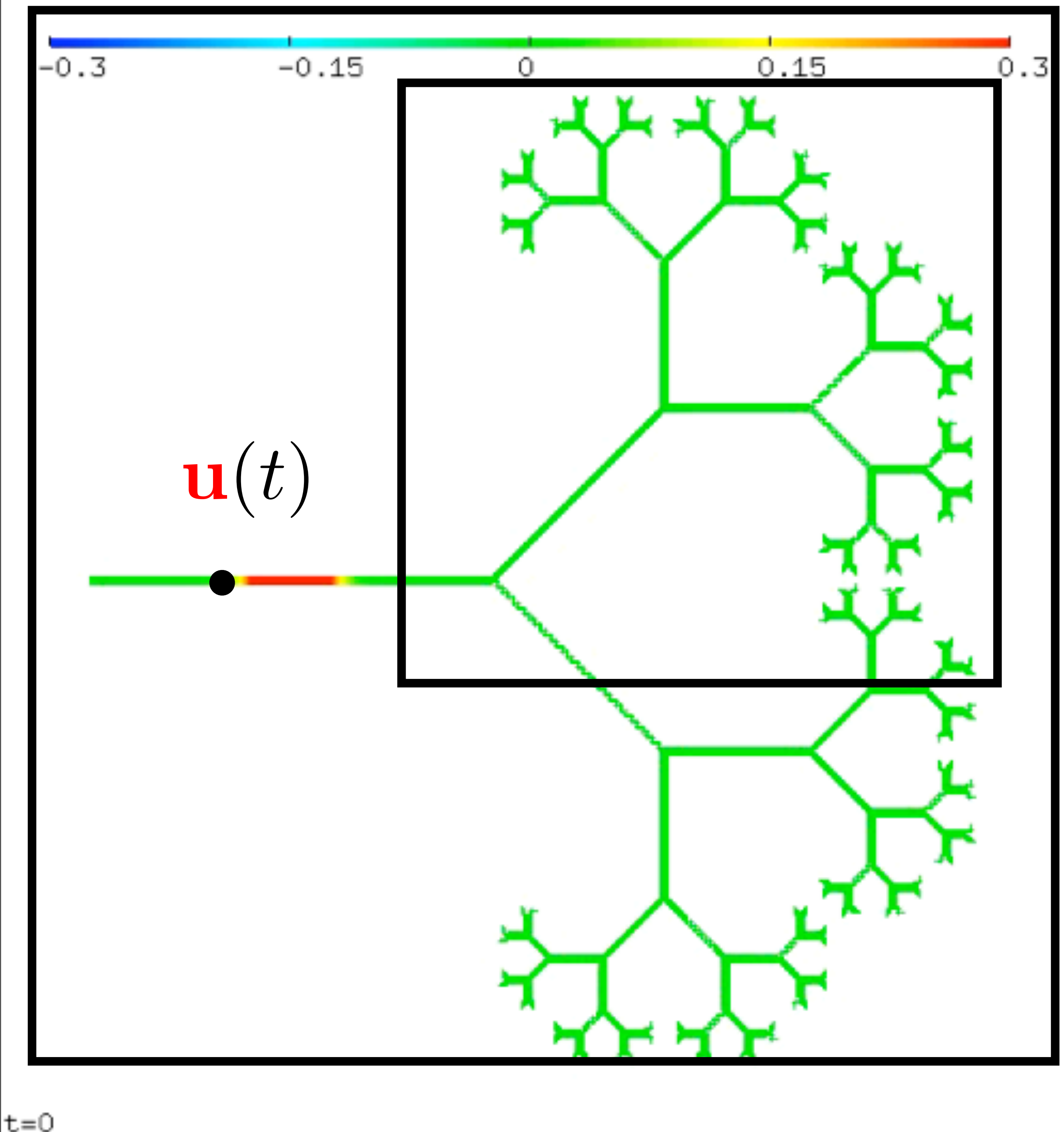


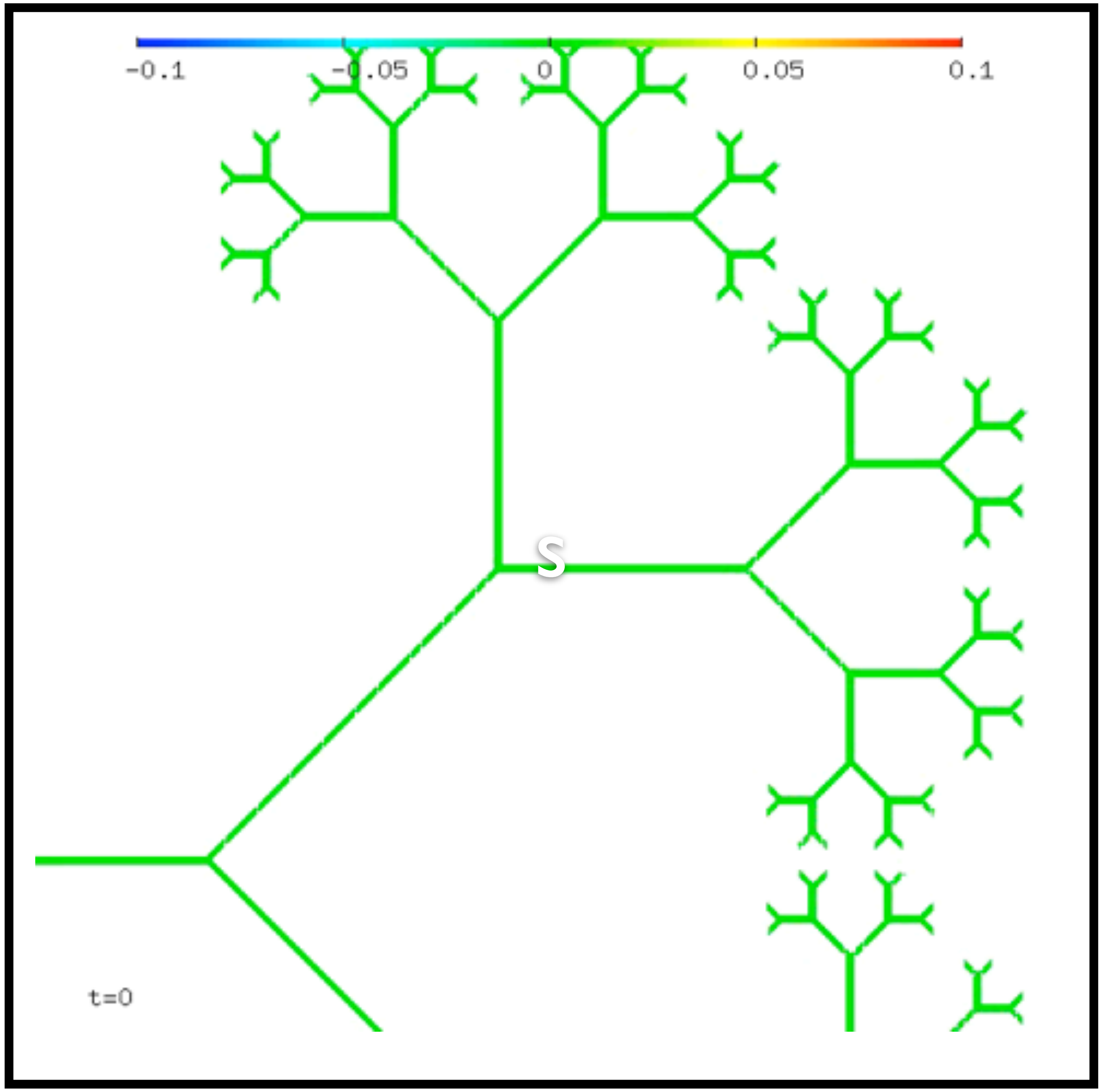
t=0

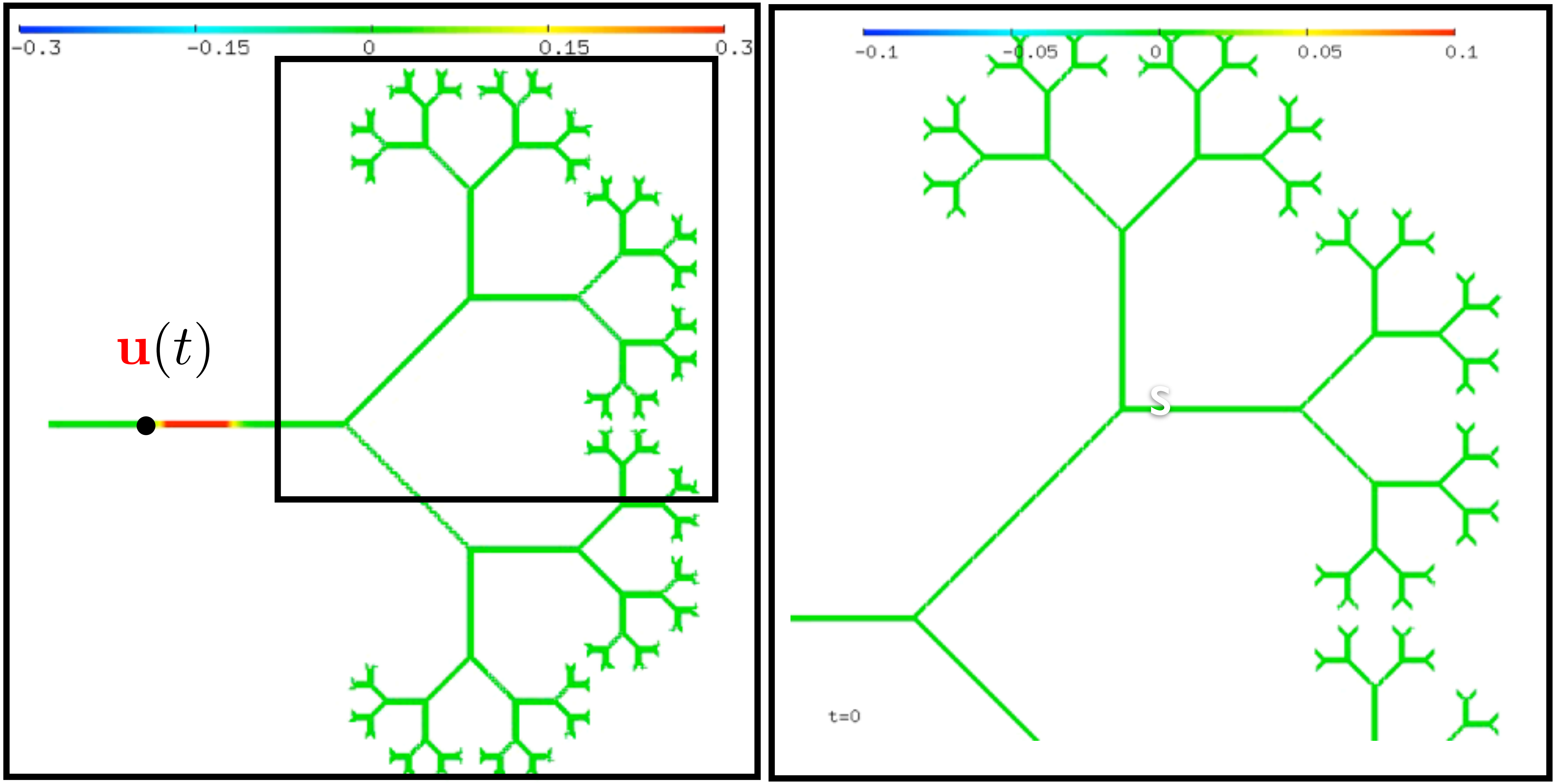




t=0

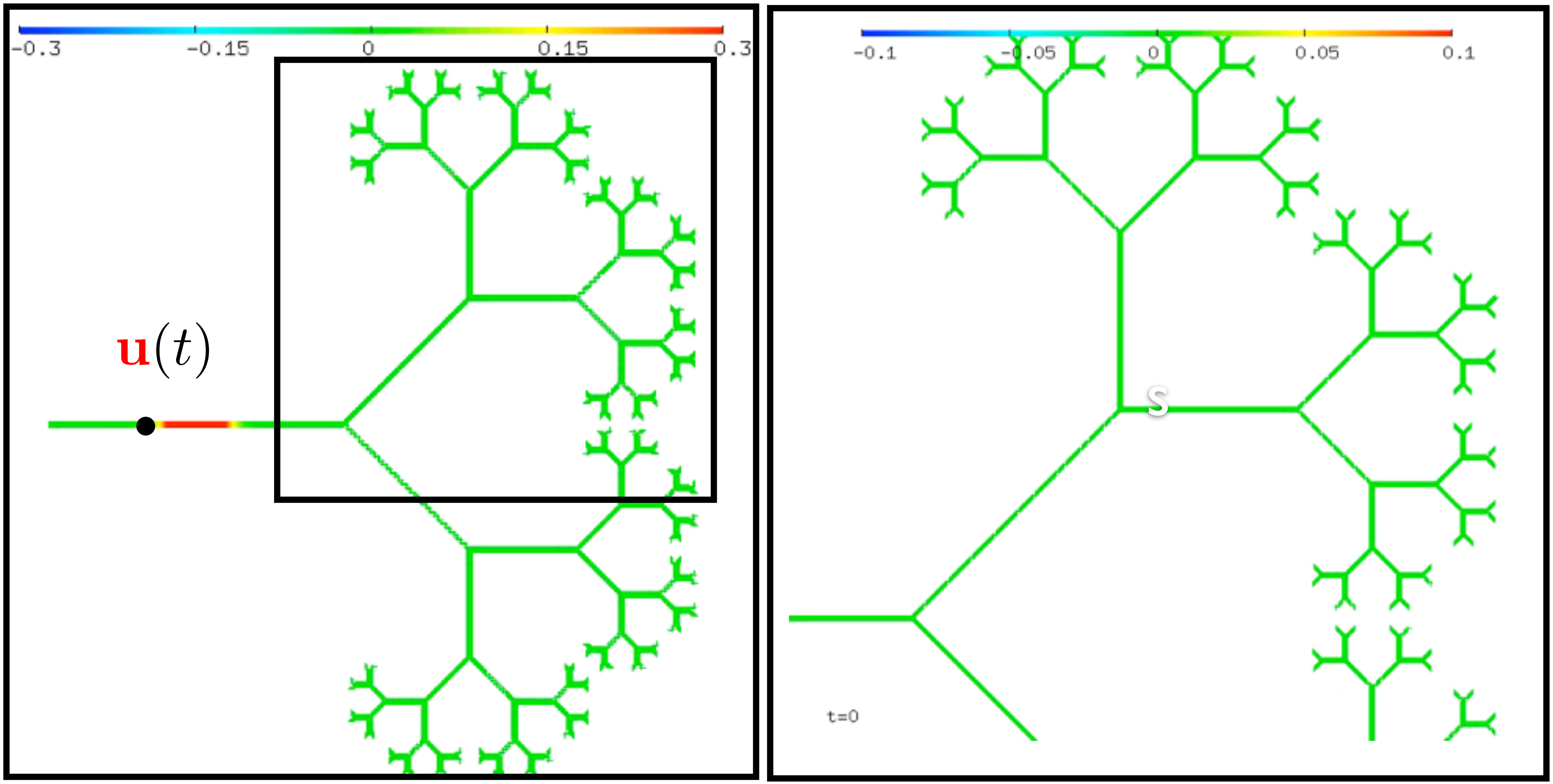

-0.3
-0.15
0
0.15
0.3
$\mathbf{u}(t)$
t=0


-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
S
t=0



t=0

Simulations numériques

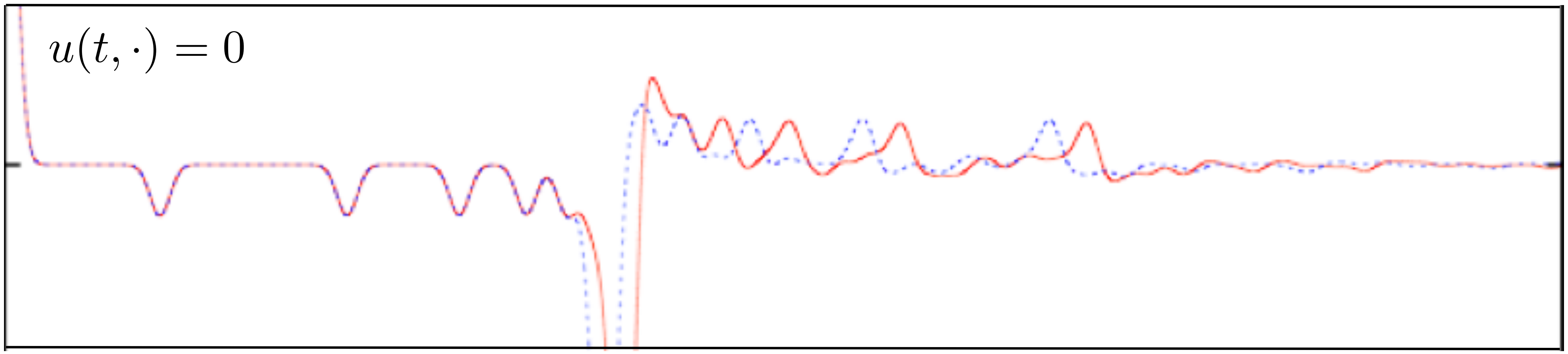


t=0

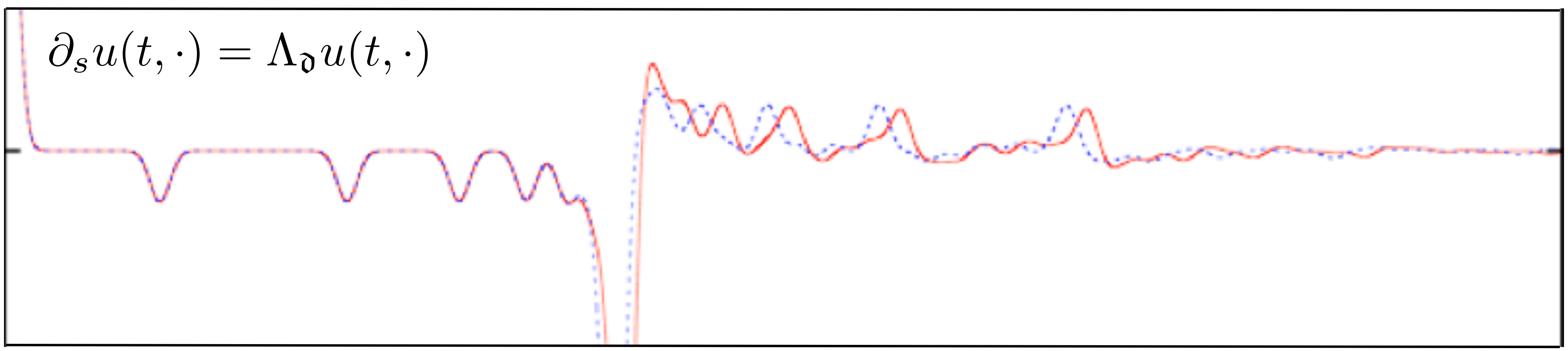
La solution de référence a été calculée sur 20 générations. (Une semaine !)

Sismogrammes

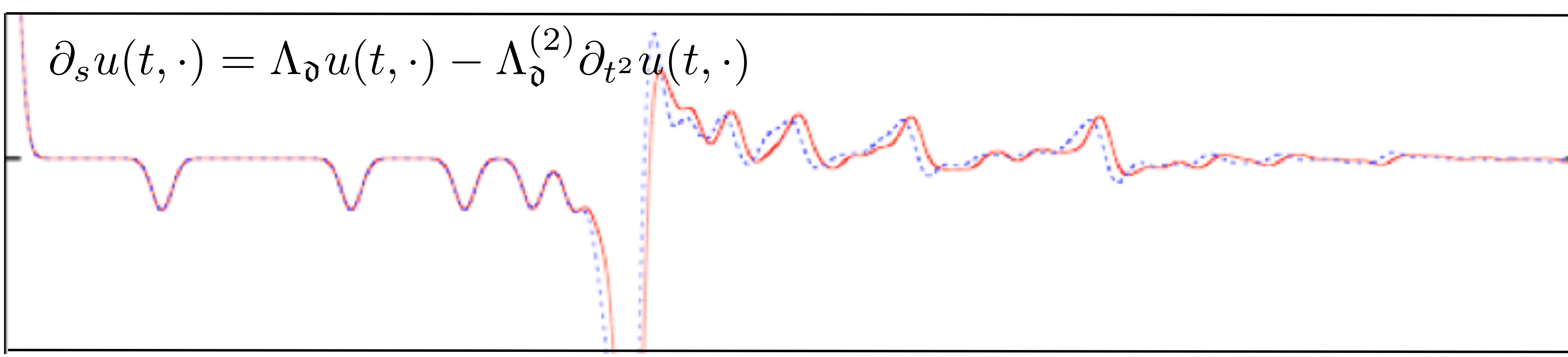
Ordre 0



Ordre 1



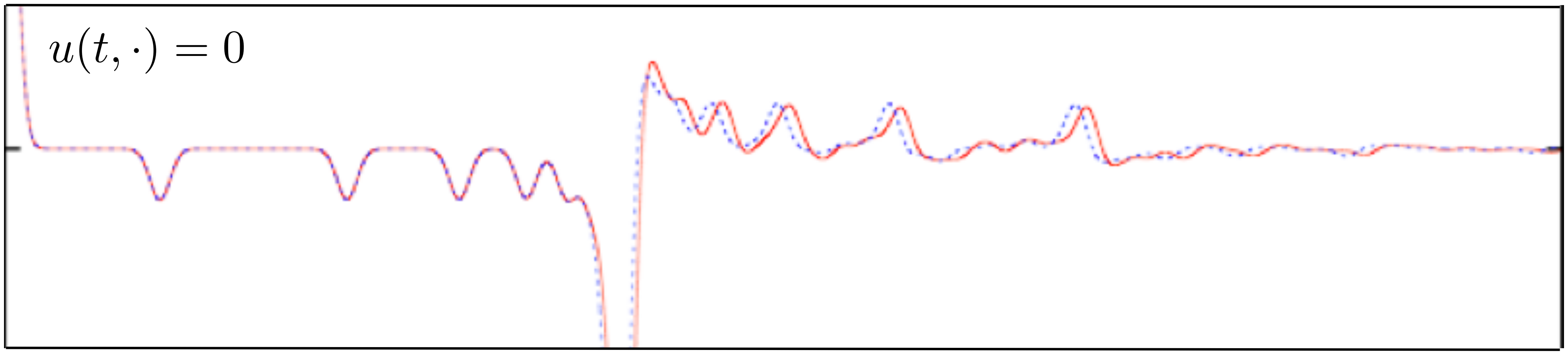
Ordre 2



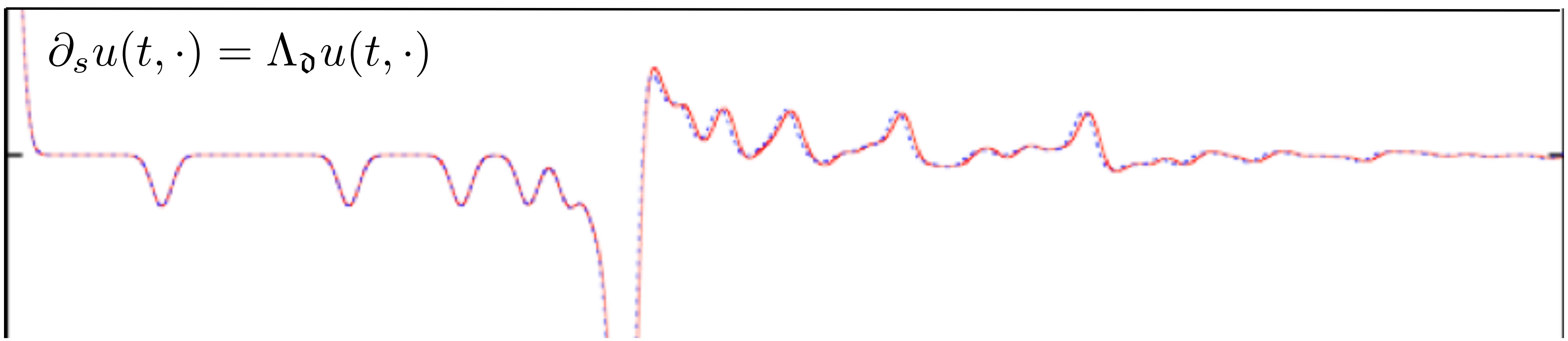
Troncature à la géneration 7

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE INRIA

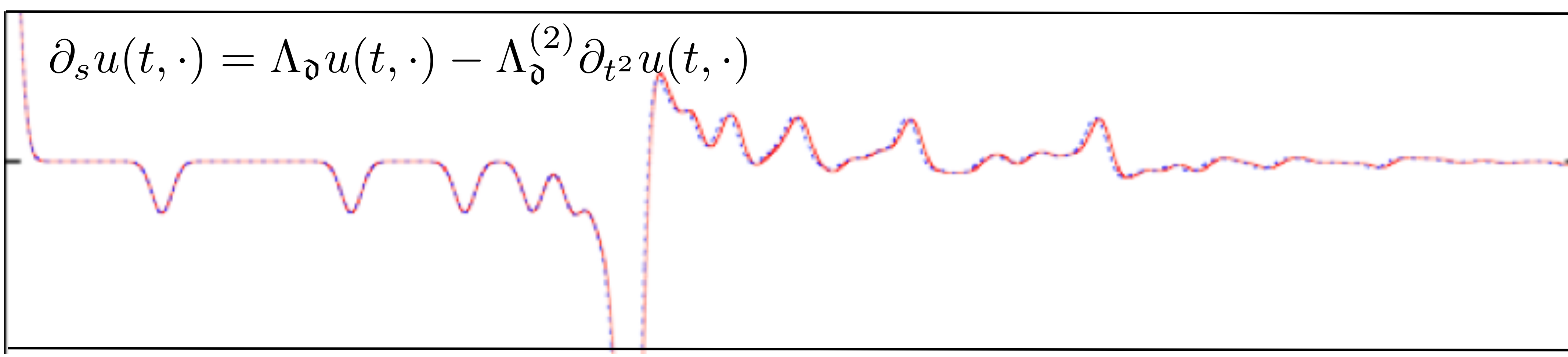
Ordre 0



Ordre 1



Ordre 2



Troncature à la géneration 9

Estimations d'erreurs

Nombre de générations	Dirichet	Condition d'ordre 1	Condition d'ordre 2	Gain ordre 1	Gain ordre 2	Nombre de d.d.l.
5	0.429	0.320	$1.23\text{x}10^{-1}$	1.34	3.05	198598
6	0.370	0.205	$5.01\text{x}10^{-2}$	1.80	7.35	258318
7	0.217	0.075	$1.37\text{x}10^{-2}$	2.89	15.83	329982
8	0.083	0.018	$2.72\text{x}10^{-3}$	4.53	30.5	415978
9	0.023	0.0031	$3.84\text{x}10^{-4}$	7.47	59.9	519174

Erreur L^2 relative entre le sismogramme de la solution exacte et le sismogramme de la solution approchée. Le nombre de degrés de liberté pour la solution exacte est de l'ordre de 10^8 points.

Estimations d'erreurs

Nombre de générations	Dirichet	Condition d'ordre 1	Condition d'ordre 2	Gain ordre 1	Gain ordre 2	Nombre de d.d.l.
5	0.429	0.320	1.23×10^{-1}	1.34	3.05	198598
6	0.370	0.205	5.01×10^{-2}	1.80	7.35	258318
7	0.217	0.075	1.37×10^{-2}	2.89	15.83	329982
8	0.083	0.018	2.72×10^{-3}	4.53	30.5	415978
9	0.023	0.0031	3.84×10^{-4}	7.47	59.9	519174

Erreur L^2 relative entre le sismogramme de la solution exacte et le sismogramme de la solution approchée. Le nombre de degrés de liberté pour la solution exacte est de l'ordre de 10^8 points.

Estimations d'erreurs

Nombre de générations	Dirichet	Condition d'ordre 1	Condition d'ordre 2	Gain ordre 1	Gain ordre 2	Nombre de d.d.l.
5	0.429	0.320	1.23×10^{-1}	1.34	3.05	198598
6	0.370	0.205	5.01×10^{-2}	1.80	7.35	258318
7	0.217	0.075	1.37×10^{-2}	2.89	15.83	329982
8	0.083	0.018	2.72×10^{-3}	4.53	30.5	415978
9	0.023	0.0031	3.84×10^{-4}	7.47	59.9	519174

Erreur L^2 relative entre le sismogramme de la solution exacte et le sismogramme de la solution approchée. Le nombre de degrés de liberté pour la solution exacte est de l'ordre de 10^8 points.

Estimations d'erreurs

Nombre de générations	Dirichet	Condition d'ordre 1	Condition d'ordre 2	Gain ordre 1	Gain ordre 2	Nombre de d.d.l.
5	0.429	0.320	1.23×10^{-1}	1.34	3.05	198598
6	0.370	0.205	5.01×10^{-2}	1.80	7.35	258318
7	0.217	0.075	1.37×10^{-2}	2.89	15.83	329982
8	0.083	0.018	2.72×10^{-3}	4.53	30.5	415978
9	0.023	0.0031	3.84×10^{-4}	7.47	59.9	519174

Erreur L^2 relative entre le sismogramme de la solution exacte et le sismogramme de la solution approchée. Le nombre de degrés de liberté pour la solution exacte est de l'ordre de 10^8 points.

Conclusions

- Cas d'une jonction de fentes minces (2D)

Conclusions

- Cas d'une jonction de fentes minces (2D)
  - La théorie a complètement été justifiée, aussi bien dans le cas harmonique que dans le cas temporel.

P. Joly and A. Semin, *Construction and Analysis of Improved Kirchhoff Conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots*. ESAIM Proceedings, 25(2008): pp 44-67.

P. Joly and A. Semin, *Study of propagation of acoustic waves in junction of thin slots*. INRIA Research Report, vol RR-7265, pp R1-R59, April 2010.

- Cas d'une jonction de fentes minces (2D)
  - La théorie a complètement été justifiée, aussi bien dans le cas harmonique que dans le cas temporel.

P. Joly and A. Semin, *Construction and Analysis of Improved Kirchhoff Conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots*. ESAIM Proceedings, 25(2008): pp 44-67.

P. Joly and A. Semin, *Study of propagation of acoustic waves in junction of thin slots*. INRIA Research Report, vol RR-7265, pp R1-R59, April 2010.

- Cas d'un arbre fractal mince:

- Cas d'une jonction de fentes minces (2D)
    - La théorie a complètement été justifiée, aussi bien dans le cas harmonique que dans le cas temporel.

P. Joly and A. Semin, *Construction and Analysis of Improved Kirchhoff Conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots*. ESAIM Proceedings, 25(2008): pp 44-67.

P. Joly and A. Semin, *Study of propagation of acoustic waves in junction of thin slots*. INRIA Research Report, vol RR-7265, pp R1-R59, April 2010.

- Cas d'un arbre fractal mince:
    - Arbre auto-similaire: la théorie a complètement été justifiée dans le cas de l'équation de Laplace, presque complètement justifiée dans le cas de l'équation de Helmholtz.

P. Joly and A. Semin, *Propagation d'ondes dans des jonctions de fentes minces*. Oberwolfach reports, 10(2010), pp 86-89. DOI: 10.4171/OWR/10/2010.

A. Semin, *Numerical resolution of the wave equation on a network of slots*. INRIA Technical Report, vol RT-0369, pp R1-R35, August 2009.

Conclusions

- Cas d'une jonction de fentes minces (2D)
  - La théorie a complètement été justifiée, aussi bien dans le cas harmonique que dans le cas temporel.

P. Joly and A. Semin, *Construction and Analysis of Improved Kirchhoff Conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots*. ESAIM Proceedings, 25(2008): pp 44-67.

P. Joly and A. Semin, *Study of propagation of acoustic waves in junction of thin slots*. INRIA Research Report, vol RR-7265, pp R1-R59, April 2010.

- Cas d'un arbre fractal mince:
  - Arbre auto-similaire: la théorie a complètement été justifiée dans le cas de l'équation de Laplace, presque complètement justifiée dans le cas de l'équation de Helmholtz.

P. Joly and A. Semin, *Propagation d'ondes dans des jonctions de fentes minces*. Oberwolfach reports, 10(2010), pp 86-89. DOI: 10.4171/OWR/10/2010.

A. Semin, *Numerical resolution of the wave equation on a network of slots*. INRIA Technical Report, vol RT-0369, pp R1-R35, August 2009.

  - Arbre quelconque: la théorie a complètement été justifiée dans le cas de l'équation de Laplace (article en cours en collaboration avec S. Nicaise).

Perspectives

Perspectives

- Cas d’une jonction de fentes minces:

Perspectives

- Cas d'une jonction de fentes minces:
  - Étudier ce qui se passe pour une jonction de fentes minces en 3D.

- Cas d'une jonction de fentes minces:
  - Étudier ce qui se passe pour une jonction de fentes minces en 3D.
  - Traiter le cas de l'équation de Maxwell.

Perspectives

- Cas d'une jonction de fentes minces:
  - Étudier ce qui se passe pour une jonction de fentes minces en 3D.
  - Traiter le cas de l'équation de Maxwell.
- Cas de l'arbre fractal:

Perspectives

- Cas d’une jonction de fentes minces:
  - Étudier ce qui se passe pour une jonction de fentes minces en 3D.
  - Traiter le cas de l’équation de Maxwell.
- Cas de l’arbre fractal:
  - Justifier complètement la théorique dans le cas de l’équation de Helmholtz.

Perspectives

- Cas d'une jonction de fentes minces:
  - Étudier ce qui se passe pour une jonction de fentes minces en 3D.
  - Traiter le cas de l'équation de Maxwell.
- Cas de l'arbre fractal:
  - Justifier complètement la théorique dans le cas de l'équation de Helmholtz.
  - Traiter le problème avec d'autres conditions à l'infini de l'arbre.