ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2018 ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο. (2,5) Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μια C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της με καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ. Να αποδειχθεί οτι το ίχνος της γ βρίσκεται πάνω σε σφαίρα τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει μια C^1 συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f \cdot \tau = \left(\frac{1}{\kappa}\right)'$ και $f' = -\frac{\tau}{\kappa}$ στο I.

ΘΕΜΑ 2ο. (3) Εστω $\phi : (0, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με τύπο

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v \log u)$$

και $M = \phi((0, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2))$.
(α) Να αποδειχθεί οτι το M είναι λεία επιφάνεια.
(β) Να υπολογιστεί ο τελεστής σχήματος και η καμπυλότητα Gauss της M στο σημείο $p = (1, 0, 0)$.
(γ) Να ευρεθούν οι κύριες διευθύνσεις και οι κύριες καμπυλότητες της M στο σημείο p.
(δ) Τί είδους σημείο είναι το p και πως ερμηνεύεται αυτό γεωμετρικά;

ΘΕΜΑ 3ο. (2) Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μια λεία επιφάνεια και $\gamma : I \to M$ μια C^∞ καμπύλη παραμετρισμένη με το μήκος της με καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ, όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό διάστημα.
(α) Αν $s \in I$, να αποδειχθεί οτι $\gamma''(s) \in T_{\gamma(s)}M$ τότε και μόνον τότε όταν $II_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = 0$.
(β) Υποθέτουμε οτι $\gamma''(s) \in T_{\gamma(s)}M$ για κάθε $s \in I$. Εστω $[T, W, B]$ το πλαίσιο Frenét της γ. Να αποδειχθεί οτι ο πίνακας του τελεστή σχήματος της M στο σημείο $\gamma(s)$ ως προς την διατεταγμένη ορθοκανονική βάση $[T(s), W(s)]$ του $T_{\gamma(s)}M$ είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm\tau(s) \\ \pm\tau(s) & II_{\gamma(s)}(W(s)) \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 4ο. (2,5) Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $h,\ z : I \to \mathbb{R}$ δύο C^∞ συναρτήσεις με $h > 0$ και $(h')^2 + (z')^2 = 1$ στο I. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma(s) = (h(s), 0, z(s))$. Υποθέτουμε οτι η γ είναι 1-1 ή οτι $I = \mathbb{R}$ και η γ είναι περιοδική. Εστω M η επιφάνεια εκ περιστροφής της γ περί τον κάθετο άξονα.
(α) Αν το $s_0 \in I$ είναι τέτοιο ώστε $h'(s_0) = 0$, να αποδειχθεί οτι η C^∞ καμπύλη $\sigma : I \to M$ με

$$\sigma(t) = (h(s_0) \cos t, h(s_0) \sin t, z(s_0))$$

είναι γεωδαισιακή της M.
(β) Αν $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = R^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2\}$, όπου $a > R > 0$, να αποδειχθεί οτι η $\sigma : I \to M$ με

$$\sigma(t) = ((a + R) \cos t, (a + R) \sin t, 0)$$

είναι γεωδαισιακή της M.
(γ) Δείξτε με ένα παράδειγμα οτι το (α) δεν ισχύει γενικά όταν $h'(s_0) \neq 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ