

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2019 ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο. (2,5) Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της. Αν η γ έχει παντού σταθερή καμπυλότητα $\kappa > 0$ και το ίχνος της $\gamma(I)$ περιέχεται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας $R > 0$, να αποδειχθεί ότι τότε το $\gamma(I)$ είναι τόξο επίπεδου κύκλου ακτίνας $\frac{1}{\kappa} \leq R$.

ΘΕΜΑ 2ο. (3) Εστω $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση και $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με τύπο

$$\phi(u, v) = (v \cos \psi(u), v \sin \psi(u), u).$$

- (α) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $M = \phi(\mathbb{R}^2)$ είναι λεία επιφάνεια.
(β) Να υπολογιστεί ο τελεστής σχήματος και η καμπυλότητα Gauss σε κάθε σημείο της M .
(γ) Αν $\psi'(1) \neq 0$, να ευρεθούν οι κύριες διευθύνσεις και οι κύριες καμπυλότητες της M στο σημείο $p = (0, 0, 1)$. Τί είδους σημείο είναι το p και πως ερμηνεύεται αυτό γεωμετρικά;

ΘΕΜΑ 3ο. (2,5) Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μια λεία επιφάνεια και $\gamma : I \rightarrow M$ μια C^∞ καμπύλη παραμετρισμένη με το μήκος της με καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ , όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό διάστημα.

- (α) Αν $s \in I$, να αποδειχθεί ότι $\gamma''(s) \in T_{\gamma(s)}M$ τότε και μόνον τότε όταν $II_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)) = 0$, όπου $II_{\gamma(s)}$ είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της M στο $\gamma(s)$.
(β) Υποθέτουμε ότι $\gamma''(s) \in T_{\gamma(s)}M$ για κάθε $s \in I$. Εστω $[T, W, B]$ το πλαίσιο Frenét της γ . Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας του τελεστή σχήματος της M στο σημείο $\gamma(s)$ ως προς την διατεταγμένη ορθοκανονική βάση $[T(s), W(s)]$ του $T_{\gamma(s)}M$ είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm\tau(s) \\ \pm\tau(s) & II_{\gamma(s)}(W(s)) \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 4ο. (3) (α) Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία λεία επιφάνεια και $\gamma : I \rightarrow M$ μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της, όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα. Να αποδειχθεί ότι

$$(\kappa(s))^2 = (II_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)))^2 + (\kappa_g(s))^2$$

για κάθε $s \in I$, όπου κ είναι η καμπυλότητα της γ , $II_{\gamma(s)}$ είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της M στο σημείο $\gamma(s)$ και κ_g είναι η γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ ως καμπύλη της M .
(β) Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $h, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ δύο C^∞ συναρτήσεις με $h > 0$ και $(h')^2 + (z')^2 = 1$ στο I . Εστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma(s) = (h(s), 0, z(s))$. Υποθέτουμε ότι η γ είναι τοπολογική εμφύτευση ή ότι $I = \mathbb{R}$ και η γ είναι απλή περιοδική. Εστω M η επιφάνεια εκ περιστροφής της γ περί τον κάθετο άξονα. Εστω $s_0 \in I$ και $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$ η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με

$$\sigma(s) = (h(s_0) \cos \frac{s}{h(s_0)}, h(s_0) \sin \frac{s}{h(s_0)}, z(s_0)).$$

Να υπολογιστεί τη γεωδαισιακή καμπυλότητα της σ και να αποδειχθεί ότι η σ είναι γεωδαισιακή της M τότε και μόνον τότε όταν $h'(s_0) = 0$.

(Υ) Αν $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = R^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2\}$, όπου $a > R > 0$, να αποδειχθεί ότι η $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$ με

$$\sigma(s) = ((a + R) \cos \frac{s}{a + R}, (a + R) \sin \frac{s}{a + R}, 0)$$

είναι γεωδαισιακή της M .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ