ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2017 ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(α) Να ευρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.
(β) Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;
(γ) Να αποδειχθεί οτι ο A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος είναι $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(3I_3 - A)$.

ΘΕΜΑ 2ο. (2) Εστω F ένα σώμα και V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο F με πεπερασμένη διάσταση. Αν $f : V \to V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, να αποδειχθεί οτι ο βαθμός του ελάχιστου πολυωνύμου της f είναι το πολύ $1 + \mathrm{rank}(f)$.

ΘΕΜΑ 3ο. (2) Εστω $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ μία γραμμική απεικόνιση με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\chi = (X+2)^4(X-i)^3$ και ελάχιστο το $p = (X+2)^3(X-i)^2$.
(α) Ποιά είναι η πρωταρχική ανάλυση του $\mathbb{C}^7$ ως προς f και ποιές είναι οι διαστάσεις των f-αναλλοίωτων ευθέων προσθετέων που εμφανίζονται;
(β) Ποιές είναι οι διαστάσεις των f-κυκλικών ευθέων προσθετέων καθενός από αυτούς;
(γ) Να ευρεθεί ο πίνακας της f στη μορφή Jordan.
(δ) Ποιές είναι οι διαστάσεις των ιδιοχώρων της f;

ΘΕΜΑ 4ο. (2) Εστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(α) Να κατασκευαστεί μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ από ιδιοδιανύσματα του A.
(β) Να ευρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας $R \in O(3, \mathbb{R})$ ώστε ο R^tAR να είναι διαγώνιος.
(γ) Να αποδειχθεί οτι ο A είναι θετικά ορισμένος.
(δ) Να υπολογιστεί η τετραγωνική ρίζα του A.

ΘΕΜΑ 5ο. (2) Εστω $(V, \langle , \rangle)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης n και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι η f είναι γραμμική ισομετρία τότε και μόνο τότε όταν η $(f^* \circ f)^{1/2}$ έχει μοναδική ιδιοτιμή το 1.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ