ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2021 ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο. (2,5) Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μια C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της με καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ. Να αποδειχθεί οτι το ίχνος της γ βρίσκεται πάνω σε σφαίρα τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει μια C^1 συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f \cdot \tau = \left(\frac{1}{\kappa}\right)'$ και $f' = -\frac{\tau}{\kappa}$ στο I.

ΘΕΜΑ 2ο. (2) Έστω

$$M = \{(u \cos v, u \sin v, u + \tan v) : u > 0, \quad |v| < \frac{\pi}{2}\}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο M είναι λεία επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}^3$.
(β) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss της M σε κάθε σημείο της M.

ΘΕΜΑ 3ο. (2) Έστω M μία λεία επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}^3$ με τις παρακάτω ιδιότητες:
(I) Η M είναι κατά τόξα συνεκτικό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.
(II) Οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής ως προς οποιαδήποτε τοπική παραμέτριση της M μηδενίζονται.

Να αποδειχθεί οτι η M είναι ένα επίπεδο.

ΘΕΜΑ 4ο. (2) Δίνονται τα σύνολα

$$M = \{(\cosh u \cdot \cos v, \cosh u \cdot \sin v, u) : |u| < \log(1 + \sqrt{2}), \quad 0 < v < 2\pi\}$$

και

$$S = \{(u \cos v, u \sin v, v) : |u| < 1, \quad 0 < v < 2\pi\}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι τα M και S είναι λείες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$.
(β) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $F : M \to S$ με

$$F(\cosh u \cdot \cos v, \cosh u \cdot \sin v, u) = (\sinh u \cdot \cos v, \sinh u \cdot \sin v, v)$$

για $|u| < \log(1 + \sqrt{2})$, $0 < v < 2\pi$, είναι ισομετρία επιφανειών.

ΘΕΜΑ 5ο. (1,5) Έστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία προσανατολισμένη λεία επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to S^2$ και $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της, όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tau_g : I \to \mathbb{R}$ με

$$\tau_g(s) = -\langle N(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s), (N \circ \gamma)'(s) \rangle.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι $\tau_g(s) = 0$ τότε και μόνο τότε όταν το $\dot{\gamma}(s) \in T_{\gamma(s)}M$ είναι ιδιοδιάνυσμα του τελεστή σχήματος της M στο σημείο $\gamma(s)$.
(β) Αν η γ είναι γεωδαισιακή της M και έχει καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ, ως παραμετρισμένη καμπύλη στον χώρο $\mathbb{R}^3$, να αποδειχθεί οτι $\tau = \tau_g$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ