ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΜΒΟΛΙΜΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2025 ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μια C^3 καμπύλη παραμετρισμένη με το μήκος της με καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ. Υποθέτουμε οτι υπάρχουν $u \in \mathbb{R}^3$ με $\|u\| = 1$ και $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\langle \gamma'(s), u \rangle = c$ για κάθε $s \in I$. Να αποδειχθεί οτι

$$\tau(s) = \frac{c}{\pm\sqrt{1-c^2}} \cdot \kappa(s) \qquad \text{για κάθε } s \in I.$$

ΘΕΜΑ 2ο. (3) Έστω οτι

$$M = \{(u\cos v, u\sin v, u+v) : u > 0, \quad |v| < \frac{\pi}{2}\}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι το M είναι λεία επιφάνεια.
(β) Να υπολογιστεί ο τελεστής σχήματος και η καμπυλότητα Gauss της M σε κάθε σημείο της.
(γ) Να ευρεθούν οι κύριες διευθύνσεις και οι κύριες καμπυλότητες της M στο σημείο $p = (1, 0, 1)$.
(δ) Τί είδους σημείο είναι το p και πως ερμηνεύεται αυτό γεωμετρικά;

ΘΕΜΑ 3ο. (3) Έστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μια C^∞ επιφάνεια και $\gamma : I \to M$ μια C^∞ καμπύλη παραμετρισμένη με το μήκος της με καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ, όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό διάστημα.
(α) Αν $s \in I$, να αποδειχθεί οτι $\gamma''(s) \in T_{\gamma(s)}M$ τότε και μόνον τότε όταν $II_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = 0$.
(β) Υποθέτουμε οτι $\gamma''(s) \in T_{\gamma(s)}M$ για κάθε $s \in I$. Έστω $[T, W, B]$ το πλαίσιο Frenét της γ. Να αποδειχθεί οτι ο πίνακας του τελεστή σχήματος της M στο σημείο $\gamma(s)$ ως προς την διατεταγμένη ορθοκανονική βάση $[T(s), W(s)]$ του $T_{\gamma(s)}M$ είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm\tau(s) \\ \pm\tau(s) & II_{\gamma(s)}(W(s)) \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 4ο. (2) Έστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μια C^∞ επιφάνεια και $\phi : U \to M$ μια τοπική παραμέτριση, όπου το $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό. Αν E, F και G είναι οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής στο U, να αποδειχθούν οι ισότητες

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial u}[\log(EG - F^2)] \qquad \text{και} \qquad \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial v}[\log(EG - F^2)].$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ