ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2024 ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο. (2,5) Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μια C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της. Αν η γ έχει παντού σταθερή καμπυλότητα $\kappa > 0$ και το ίχνος της $\gamma(I)$ περιέχεται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας $R > 0$, να αποδειχθεί οτι τότε το $\gamma(I)$ είναι τόξο κύκλου ακτίνας $\dfrac{1}{\kappa} \leq R$.

ΘΕΜΑ 2ο. (3) Εστω $\phi : (-\pi/2, \pi/2) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με τύπο

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u \log v)$$

και $M = \phi((-\pi/2, \pi/2) \times (0, +\infty))$.
(α) Να αποδειχθεί οτι το M είναι λεία επιφάνεια.
(β) Να υπολογιστεί ο τελεστής σχήματος και η καμπυλότητα Gauss της M στο σημείο $p = (1, 0, 0)$.
(γ) Να ευρεθούν οι κύριες διευθύνσεις και οι κύριες καμπυλότητες της M στο σημείο p.

ΘΕΜΑ 3ο. (2) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ είναι επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα, της οποίας η καμπυλότητα Gauss στο οποιοδήποτε σημείο $(x, y, z) \in M$ είναι

$$K(x, y, z) = -\frac{1}{2z^2 + 1}.$$

(Υπενθύμιση: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ και $\cosh^2 t + \sinh^2 t = \cosh(2t)$, όπου $\cosh t = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ και $\sinh t = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.)

ΘΕΜΑ 4ο. (2,5) Έστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία προσανατολισμένη επιφάνεια με ολική απεικόνιση Gauss $N : M \to S^2$. Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to M$ μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της.
(α) Να αποδειχθεί οτι η ταχύτητα $\dot{\gamma}(s)$ τη χρονική στιγμή $s \in I$ παράγει κύρια διεύθυνση της M στο σημείο $\gamma(s)$ τότε και μόνο τότε όταν

$$\langle L_{\gamma(s)}(N(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle = 0,$$

όπου $L_{\gamma(s)} : T_{\gamma(s)}M \to T_{\gamma(s)}M$ είναι ο τελεστής σχήματος της M στο σημείο $\gamma(s)$.
(β) Αν η γ είναι γεωδαισιακή της M, να αποδειχθεί οτι η στρέψη της γ (ως παραμετρισμένη καμπύλη στον χώρο $\mathbb{R}^3$) είναι

$$\tau(s) = \pm \langle L_{\gamma(s)}(N(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ