ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2025 ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ
Διδάσκων: Κ. Αθανασόπουλος

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Να αποδειχθεί οτι οι χώροι $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και $\mathbb{R} \times S^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, με τις συνηθισμένες τους τοπολογίες, είναι ομοιομορφικοί.

ΘΕΜΑ 2ο. (2) Έστω $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ η μοναδιαία κλειστή n-μπάλλα και $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ η n-σφαίρα, $n \geq 1$. Έστω ακόμα $f : D^n \to S^n$ η συνεχής απεικόνιση με

$$f(x) = (2\sqrt{1 - \|x\|^2} \cdot x, 2\|x\|^2 - 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η τοπολογία πηλίκο στην S^n ως προς την f ταυτίζεται με την συνηθισμένη τοπολογία της.
(β) Να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $F : D^n/S^{n-1} \to S^n$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & S^n \\
D^n/S^{n-1} \arrow[ur, dashed, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $F \circ p = f$, όπου D^n/S^{n-1} είναι ο χώρος πηλίκο της σχέσης ισοδυναμίας $\sim$ στην D^n με $x \sim y$ τότε και μόνο τότε όταν $x = y$ ή $\|x\| = \|y\| = 1$ και η $p : D^n \to D^n/S^{n-1}$ είναι η αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο.

ΘΕΜΑ 3ο. (2) Εστω (X, d) ένας μετρικός χώρος.
(α) Αν ο X είναι συνεκτικός, να αποδειχθεί οτι για κάθε x, $y \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και σημεία $x = x_0$, x_1,..., $x_n = y$ στον X τέτοια ώστε $d(x_k, x_{k+1}) < \epsilon$ για κάθε $0 \leq k < n$.
(β) Αν ο X είναι συμπαγής, να αποδειχθεί οτι ισχύει και το αντίστροφο του (α).
(γ) Να δειχθεί με ένα παράδειγμα οτι δεν ισχύει το αντίστροφο του (α) όταν ο X δεν είναι συμπαγής.

ΘΕΜΑ 4ο. (2) Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και $A \subset X$ ένα συμπαγές σύνολο. Να αποδειχθεί οτι για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subset X$ με $A \subset V$ υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ με τις παρακάτω ιδιότητες:
(α) $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.
(β) $f(x) = 1$ για κάθε $x \in X \setminus V$.
(γ) Το σύνολο $f^{-1}([0, c])$ είναι συμπαγές για κάθε $0 \leq c < 1$.

ΘΕΜΑ 5ο. (3) Έστω οτι $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ και $x_0 \in D^2$.
(α) Αν $x_0 \in S^1 = \partial D^2$, να αποδειχθεί οτι ο χώρος $D^2 \setminus \{x_0\}$ είναι συσταλτός.
(β) Αν $x_0 \in \mathrm{int} D^2$, να αποδειχθεί οτι ο χώρος $D^2 \setminus \{x_0\}$ δεν είναι απλά συνεκτικός. Αν $x \in D^2 \setminus \{x_0\}$, ποιά είναι η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(D^2 \setminus \{x_0\}, x)$;
(γ) Αν $h : D^2 \to D^2$ είναι ένας οποιοσδήποτε ομοιομορφισμός, να αποδειχθεί οτι $h(S^1) = S^1$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ