

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2026 ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Διδάσκων: Κ. Αθανασόπουλος

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Να αποδειχθεί ότι η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με πίνακα (ως προς την κανονική βάση)

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

είναι ανάκλαση ως προς μία ευθεία. Ποιά είναι αυτή η ευθεία;

ΘΕΜΑ 2ο. (3) (α) Αν $\triangle ABC$ είναι ένα ορθογώνιο σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο στην S^2 με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες $\alpha, \beta, \gamma = \frac{\pi}{2}$ στις κορυφές A, B, C και μήκη απέναντι πλευρών $a = d_S(B, C), b = d_S(C, A), c = d_S(A, B)$, να αποδειχθεί ότι $\tan b = \sin a \cdot \tan \beta$.
(β) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί με τις ίδιες υποθέσεις ο ανάλογος τύπος στην περίπτωση που το $\triangle ABC$ είναι ένα ορθογώνιο υπερβολικό γεωδαισιακό τρίγωνο στο $\mathbb{H}^2$.

ΘΕΜΑ 3ο. (1,5) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία $Q = [1, 2, 1, 2], R = [2, -1, 2, -1], S = [3, 1, 3, 1]$ και $T = [-3, 4, -3, 4]$ του 3-διάστατου πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^3$ είναι προβολικά συνευθειακά και να υπολογιστεί ο διπλός λόγος $[Q, S, R, T]$.

ΘΕΜΑ 4ο. (2) Είναι ο προβολικός μετασχηματισμός $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ με τύπο

$$f([x_1, x_2, x_3]) = [2x_1 + x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 - 2x_2 + 2x_3]$$

προβολική ισομετρία;

ΘΕΜΑ 5ο. (2) Στο υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}^2$ θεωρούμε τις παράλληλες υπερβολικές ευθείες $\ell = \{ie^t : t \in \mathbb{R}\}$ και $\ell' = \{1 + ie^t : t \in \mathbb{R}\}$.

- (α) Ποιές είναι οι υπερβολικές ευθείες στο $\mathbb{H}^2$ που τέμνουν κάθετα την ℓ ;
(β) Υπάρχει υπερβολική ευθεία στο $\mathbb{H}^2$ η οποία είναι κοινή κάθετη των ℓ και ℓ' ;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ