ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
1ο Φύλλο

1. Να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $x^2 = 3$.

2. Αν $n \in \mathbb{N}$ και δεν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $m^2 = n$, να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $x^2 = n$.

3. Αν τα σύνολα A, $B \subset \mathbb{R}$ είναι μη-κενά και φραγμένα και θέσουμε

$$A + B = \{a + b : a \in A, \quad b \in B\}$$

να αποδειχθεί οτι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ και $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

4. Αν τα σύνολα A, $B \subset (0, +\infty)$ είναι μη-κενά και φραγμένα και θέσουμε

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, \quad b \in B\}$$

να αποδειχθεί οτι $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$ και $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$.

5. Εστω $A \subset \mathbb{R}$ ένα μή-κενό σύνολο. Αν υπάρχει $s \in A$ τέτοιο ώστε $a \leq s$ για κάθε $a \in A$, να αποδειχθεί οτι $s = \sup A$.

6. Να ευρεθούν το supremum και το infimum, αν υπάρχουν, των συνόλων:

$$(i)\left\{\frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\right\}, \quad (ii)\left\{x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}, \quad x > \frac{1}{2}\right\}.$$

7. Να αποδειχθεί οτι $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

8. Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι υποσώμα του $\mathbb{R}$.

9. Εστω $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
(α) Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι υποσώμα του $\mathbb{R}$, που περιέχει το $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \neq \mathbb{Q}$.
(β) Να αποδειχθεί οτι $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ δεν είναι πλήρες ως διατεταγμένο σώμα.

10. Εστω K ένα γνήσιο υποσώμα του $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι $\mathbb{Q} \subset K$ και το K δεν είναι πλήρες ως διατεταγμένο σώμα.

11. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν m, $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $0 < |na - m| < \epsilon$.
(Υπόδειξη: Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{k} < \epsilon$. Θεωρούμε τη διαμέριση

$\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, ..., \frac{k-1}{k}, 1\}$ του διαστήματος $[0,1]$. Επειδή $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, οι πραγματικοί αριθμοί $ma - [ma]$, $m \in \mathbb{N}$, είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.)

12. Εστω $\mathbb{Q}(X) = \big\{\frac{f}{g} : f, g \in \mathbb{Q}[X], g \neq 0\big\}$. Το $\mathbb{Q}(X)$ γίνεται σώμα με τις συνηθισμένες πράξεις και λέγεται το σώμα των ρητών συναρτήσεων πάνω στο $\mathbb{Q}$. Εστω P το υποσύνολο του $\mathbb{Q}(X)$ που αποτελείται από όλες τις ρητές συναρτήσεις

$$\frac{a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0}{b_m X^m + \cdots + b_1 X + b_0} \quad \text{με} \quad a_n b_m > 0.$$

Αν r, $s \in \mathbb{Q}(X)$, ορίζουμε $r > s$ όταν $r - s \in P$.
(α) Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{Q}(X)$ γίνεται με αυτόν τον τρόπο διατεταγμένο σώμα.
(β) Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{Q}(X)$ δεν έχει την αρχιμήδεια ιδιότητα.
(Υπόδειξη: Αν $r(X) = X$, τότε $r > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
2ο Φύλλο

1. Εστω $p \in \mathbb{N}$ με $p > 1$.

(α) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{p^n} < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

(β) Εστω $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Υπάρχει ένας μέγιστος $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοιος ώστε $n_0 \leq x$. Επαγωγικά, αν έχουν οριστεί οι n_0, n_1,..., $n_{k-1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, υπάρχει ένας μέγιστος $n_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n_0 + \frac{n_1}{p} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{p^{k-1}} + \frac{n_k}{p^k} \leq x.$$

Να αποδειχθεί οτι

$$x = \sup\left\{ n_0 + \frac{n_1}{p} + \cdots + \frac{n_k}{p^k} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

2. Είναι το σύνολο των άρρητων πραγματικών αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ αριθμήσιμο;

3. Ενας $x \in \mathbb{R}$ λέγεται (πραγματικός) αλγεβρικός αριθμός αν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και a_0, a_1,..., $a_n \in \mathbb{Z}$ με $a_n \neq 0$ ώστε $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

4. Να αποδειχθεί οτι κάθε μη-κενό, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ισχύει αυτό για κλειστά σύνολα;

5. Ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι ανοιχτά σύνολα;
(α) $\mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (γ) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, (ε) $(0, 1) \cup \{2\}$.

6. Ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι κλειστά σύνολα;
(α) $\mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (γ) $\mathbb{Z}$, (δ) $[0, 1] \cup \{2\}$, (ε) $\{1 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, 1\}$.

7. Να αποδειχθεί οτι για κάθε A, $B \subset \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

8. Αν $\{A_i : i \in I\}$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι $\bigcup_{i \in I} \overline{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$. Να δειχθεί με ένα παράδειγμα οτι η ισότητα δεν ισχύει πάντα, όταν η οικογένεια δεν είναι πεπερασμένη.

9. Να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει μη-κενό, γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό.

10. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ το σύνολο των σημείων συσσώρευσης A' του A είναι κλειστό σύνολο.

11. Ποιό είναι το σύνολο $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$; Είναι ανοιχτό σύνολο; Είναι κλειστό σύνολο;

12. Να ευρεθούν όλα τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου $\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
3ο Φύλλο

1. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο των δυαδικών ρητών αριθμών

$$\left\{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

2. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, να αποδειχθεί οτι το σύνολο $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = \{m + an : m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την άσκηση 11 του 1ου φύλλου.)

3. Να αποδειχθεί οτι το ανοιχτό κάλυμα $\left\{(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ του ανοιχτού διαστήματος $(0, 1)$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμα του $(0, 1)$.

4. Να αποδειχθεί οτι το ανοιχτό κάλυμα $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ του $[1, +\infty)$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμα του $[1, +\infty)$.

5. Αν $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία μη-κενών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, δηλαδή $C_{n+1} \subset C_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \varnothing$.

6. Αν X, $Y \subset \mathbb{R}$ είναι δύο συμπαγή σύνολα με $X \cap Y = \varnothing$, να αποδειχθεί οτι υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U, $V \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $X \subset U$, $Y \subset V$ και $U \cap V = \varnothing$.

7. Εστω $X \subset \mathbb{R}$ ένα μη-κενό, συμπαγές σύνολο. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $F \subset X$ τέτοιο ώστε $\min\{|x - y| : y \in F\} < \epsilon$ για κάθε $x \in X$.

8. (*Λήμμα του Lebesgue*) Εστω $X \subset \mathbb{R}$ ένα συμπαγές σύνολο. Να αποδειχθεί οτι για κάθε ανοιχτό κάλυμα $\{A_i : i \in I\}$ του X υπάρχει ένας $\rho > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i \in I$ με $(x - \rho, x + \rho) \subset A_i$.
(Υπόδειξη: Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i(x) \in I$ ώστε $x \in A_{i(x)}$ και υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset A_{i(x)}$. Αφού το X είναι συμπαγές, υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και x_1, x_2,..., $x_k \in X$ ώστε

$$X \subset (x_1 - \frac{1}{2}\delta_{x_1}, x_1 + \frac{1}{2}\delta_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_k - \frac{1}{2}\delta_{x_k}, x_k + \frac{1}{2}\delta_{x_k}).$$

Θέτουμε $\rho = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_k}\}$.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
4ο Φύλλο

1. Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} \frac{[na]}{n} = a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

2. Αν $k \in \mathbb{N}$ και a_0,..., $a_k \in \mathbb{R}$ με $a_k > 0$, να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_k n^k + \cdots a_1 n + a_0} = 1.$$

3. Εστω $a > 0$, $b > 0$. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{(n+a)(n+b)} - n).$$

4. Εστω $a > 0$. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{a}{n^2}\right)^n$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ανισότητα του Bernoulli.)

5. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

6. Να αποδειχθεί οτι η ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με όρους

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό μεταξύ του 1 και του 2.

7. Εστω $\lambda > 0$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία που ορίζεται επαγωγικά με $a_1 > \lambda$ και

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\lambda^2}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda$.

8. Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

9. Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ για κάθε $a > 0$.

10. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k + \frac{1}{a_k}\right) \to +\infty.$$

11. Να αποδειχθεί οτι $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

12. (*Cesaro-Stolz*) Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε
(α) $b_n < b_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $b_n \to +\infty$,
(β) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = a$.
Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = a$.
(Υπόδειξη: Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(a-\epsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (a+\epsilon)(b_{n+1} - b_n)$$

για κάθε $n \geq n_0$. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει οτι

$$(a-\epsilon)(b_n - b_{n_0}) < a_n - a_{n_0} < (a+\epsilon)(b_n - b_{n_0})$$

για κάθε $n > n_0$.)

13. Να αποδειχθεί οτι
(α) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = 2$.
(β) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \cdots n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$, όπου $k \in \mathbb{N}$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 12.)

14. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$, $b_n > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε
(α) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \to +\infty$ και
(β) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = a$.
Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = a.$$

15. Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{k}}{1 + 2 + \cdots + n} = 1.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 14.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
5ο Φύλλο

1. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to+\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0$. Να αποδειχθεί οτι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο όριο $a \in \mathbb{R}$ και $a_{2n} \leq a \leq a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N},$$

να αποδειχθεί $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$.

3. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Αν $\inf\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} > -\infty$, να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

4. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n = 1$, όταν ο n είναι περιττός και $a_n = 2^n$, όταν ο n είναι άρτιος. Να υπολογιστούν τα
(α) $\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ και
(β) $\liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, $\quad \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

5. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

6. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει $0 < s < 1$ έτσι ώστε $|a_{n+1} - a_n| \leq s^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

7. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, να αποδειχθεί ότι το $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ υπάρχει και τα δύο όρια είναι ίσα. Να αποδειχθεί επίσης οτι δεν ισχύει το αντίστροφο.
(Υπόδειξη: Για το αντίστροφο θεωρείστε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ και $a_{2n} = \frac{1}{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.)

8. Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}} = \frac{1}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
6ο Φύλλο

1. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)} = \frac{7}{24}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} = 2.$$

2. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες.

(α) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{a^{n+1}} x^n = \frac{1}{a-bx}, \quad |x| < \left|\frac{a}{b}\right|, \quad ab \neq 0,$

(β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) x^{n-1} = \frac{5-2x}{6-5x+x^2}, \quad |x| < 2.$

3. (*Bernoulli*) Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(α) Αν p, $k \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=p}^{\infty} (a_n - a_{n+k}) = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{p+k-1}.$$

(β) Αν $p \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2p}\right).$$

4. Να εξεταστεί αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, όταν

(α) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (β) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$, (γ) $a_n = \dfrac{3^n}{n^{n/2}}$,

(δ) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, (ε) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, (στ) $a_n = \dfrac{2+\sqrt{n}}{n^2}$.

5. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Να αποδειχθεί οτι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^a}$ συγκλίνει για κάθε $a > \dfrac{1}{2}$.

6. (*Pringsheim*) Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(α) Να αποδειχθεί οτι $\liminf\limits_{n\to+\infty} (na_n) = 0$.

(β) Αν επιπλέον η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} (na_n) = 0$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

7. Εστω οτι $a_1 = 1$ και $a_n = \dfrac{1}{n \cdot m}$, όταν $2^m \leq n < 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} (na_n) = 0$ μονότονα, αλλά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

8. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Αν $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{s_n^2}$ συγκλίνει.

9. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(Υπόδειξη: Αν s_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι τα μερικά αθροίσματα της $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, τότε

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \frac{s_n}{n} - \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n(n+1)}.)$$

10. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$, $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Αν η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, να αποδειχθεί οτι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

(β) Αν η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει και υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{για κάθε } n \geq n_0,$$

να αποδειχθεί οτι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(γ) Να αποδειχθεί οτι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n (n+1)!}$ συγκλίνει.

(Υπόδειξη: Για το (γ) θεωρείστε τη βοηθητική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2n+1}}$.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
7ο Φύλλο

1. Να εξεταστεί αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και αν συγκλίνει απολύτως, όταν
(α) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)$, (β) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$
(γ) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$, (δ) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n+a}$, $a \geq 0$.

2. Να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^p} = (1-2^{1-p})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

για κάθε $p > 1$.

3. Να αποδειχθεί οτι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ συγκλίνει τότε

$$\frac{a_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_{n+1}-a_n}{2} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n.$$

4. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ ώστε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ συγκλίνουν.
(α) Να αποδειχθεί οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει απολύτως.
(β) Να αποδειχθεί οτι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n a_{n+1}|} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n a_{n+1}|}{|a_n|+|a_{n+1}|}$$

συγκλίνουν.

5. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε να αποδειχθεί οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}$ συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό $p > 0$.

6. Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$.

7. Να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Mertens.)

8. Εστω οτι $a_0 = 1$, $a_n = 2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$b_n = \frac{1}{5}\left((-1)^n \cdot 8 - \frac{3}{4^n}\right)$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 0$.

(α) Να υπολογιστούν οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

(β) Ποιά είναι η ακτίνα σύγκλισης του γινομένου Cauchy των δύο δυναμοσειρών;

9. Εστω $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η ένα προς ένα και επί απεικόνιση με

$$\phi(n) = \begin{cases} 4k-3, & \text{όταν } n = 3k-2, \\ 4k-1, & \text{όταν } n = 3k-1, \\ 2k, & \text{όταν } n = 3k. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί οτι αν $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αλλά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = +\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
8ο Φύλλο

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν.
(α) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$, $n, m \in \mathbb{N}$, (β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^{1/3} - 1}{x}$,
(γ) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/[x]}$, (δ) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

2. Εστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{όταν } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & \text{όταν } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{x\to 1/2} f(x) = \dfrac{1}{2}$, αλλά το $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ δεν υπάρχει όταν $a \in [0,1]$ και $a \neq \dfrac{1}{2}$.

3. (*Cauchy*) Εστω $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X και $f : X \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι το $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ για κάθε x, $y \in X$ με $0 < |x - a| < \delta$ και $0 < |y - a| < \delta$.

4. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται περιοδική περιόδου $T > 0$, αν $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι κάθε περιοδική συνάρτηση για την οποία το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ είναι σταθερή.

5. Εστω $E \subset \mathbb{R}$ ένα μη-κενό σύνολο και $f_E : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ η συνάρτηση με

$$f_E(x) = \inf\{|x - y| : y \in E\}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι $f_E(x) = 0$ τότε και μόνο τότε όταν $x \in \overline{E}$.
(β) Να αποδειχθεί οτι $|f_E(x_1) - f_E(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ για κάθε x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ και συνεπώς η f_E είναι συνεχής.

6. Εστω A, $B \subset \mathbb{R}$ δύο μη-κενά, κλειστά και ξένα μεταξύ τους σύνολα. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x) + f_B(x)},$$

όπου οι συναρτήσεις f_A, f_B ορίζονται όπως στην προηγούμενη άσκηση 5. Να αποδειχθεί οτι η f είναι συνεχής και $A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$.

7. Εστω a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sup f([a, x])$ είναι συνεχής, αύξουσα και $g \geq f$.

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, που έχει την ιδιότητα

$$f(x + y) \leq f(x)f(y)$$

για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο 0, να αποδειχθεί οτι η f είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

9. Εστω f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις. Αν υπάρχει ένα πυκνό σύνολο $D \subset \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(d) = g(d)$ για κάθε $d \in D$, να αποδειχθεί οτι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε τα σύνολα $f^{-1}(-\infty, r)$ και $f^{-1}(r, +\infty)$ είναι ανοιχτά για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Να αποδειχθεί οτι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

11. Να αποδειχθεί οτι οι τύποι

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ορίζουν καλά δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
9ο Φύλλο

1. Να αποδειχθεί οτι για κάθε a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $a < \xi < b$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\xi^2+1}{\xi-a} + \frac{\xi^4+1}{\xi-b} = 0.$$

2. Να αποδειχθεί οτι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

3. Εστω $a < b$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και x_1, x_2,..., $x_n \in (a,b)$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

4. Εστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $0 \leq \xi \leq 1 - \dfrac{1}{n}$ τέτοιο ώστε

$$f\left(\xi + \frac{1}{n}\right) = f(\xi).$$

(Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής διαδοχικά στα διαστήματα $\left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$, $k = 1, ..., n-1$.)

5. Εστω A, $B \subset \mathbb{R}$ δύο μη-κενά, ξένα μεταξύ τους, συμπαγή σύνολα. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε

$$|a - b| = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}.$$

6. Να ευρεθεί το είδος των ασυνεχειών της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όταν
(α) $f(x) = [x]$, (β) $f(x) = x - [x]$.

7. Εστω $a < b$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο των σημείων του διαστήματος (a,b) στα οποία η f έχει απλή ασυνέχεια είναι το πολύ αριθμήσιμο.
(Υπόδειξη: Εστω E το σύνολο των σημείων του (a,b) στα οποία η f έχει απλή ασυνέχεια. Τότε $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$, όπου $E_1 = \{x \in E : f(x-) = f(x+) < f(x)\}$, $E_2 = \{x \in E : f(x-) = f(x+) > f(x)\}$, $E_3 = \{x \in E : f(x-) < f(x+)\}$, $E_4 = \{x \in E : f(x-) > f(x+)\}$. Για κάθε $x \in E_1$ επιλέγουμε $(p(x), q(x), r(x)) \in \mathbb{Q}^3$ ώστε $f(x-) < p(x) < f(x)$ και $q(x) < x < r(x)$ τέτοια ώστε $f(t) < p(x)$ για κάθε $q(x) < t < r(x)$ με $t \neq x$. Η απεικόνιση $F_1 : E_1 \to \mathbb{Q}^3$ με $F_1(x) = (p(x), q(x), r(x))$ είναι ένα προς ένα. Επίσης, για κάθε $x \in E_1$ επιλέγουμε $(p(x), q(x), r(x)) \in \mathbb{Q}^3$ ώστε $f(x-) < p(x) < f(x+)$ και $q(x) < x < r(x)$ τέτοια

ώστε $f(q(x), x) \subset (-\infty, p(x))$ και $f(x, r(x)) \subset (p(x), +\infty)$. Η $F_3 : E_3 \to \mathbb{Q}^3$ με $F_3(x) = (p(x), q(x), r(x))$ είναι ένα προς ένα. Ανάλογα ορίζονται ένα προς ένα απεικονίσεις $F_i : E_i \to \mathbb{Q}^3$ για $i = 2, 4$.)

8. Εστω $X \subset \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Η f λέγεται κάτω ημισυνεχής στο σημείο $x_0 \in X$ όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x_0) - \epsilon < f(x)$ για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$. Αν το X είναι συμπαγές σύνολο και η f είναι κάτω ημισυνεχής σε κάθε σημείο του X, να αποδειχθεί οτι η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο X, δηλαδή υπάρχει $a \in X$ ώστε $f(a) \leq f(x)$ για κάθε $x \in X$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Heine-Borel.)

9. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες για κάθε $a > 0$.
(α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log a$, (β) $\lim\limits_{n \to +\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a$.

10. Εστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$.
(α) Αν $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x.$$

(β) Αν $x_n \to +\infty$, να αποδειχθεί οτι $\left(1 + \dfrac{x_n}{n}\right)^n \to +\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
10ο Φύλλο

1. Είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x = 0, \\ \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}, & \text{όταν } x \neq 0 \end{cases}$$

διαφορίσιμη στο 0;

2. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ για κάθε $x,\, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι η f είναι σταθερή.

3. Εστω $a,\, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη στο (a, b) τέτοια ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει $a < \xi < b$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την $g \cdot f$, όπου g είναι κατάλληλη συνάρτηση που εξαρτάται από το λ.)

4. Εστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση για την οποία υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $0 \leq |t| < \dfrac{1}{M}$ η συνάρτηση $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_t(x) = x + tg(x)$ είναι γνήσια αύξουσα.

5. Εστω $a,\, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f,\, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις που είναι διαφορίσιμες στο (a, b). Αν $f(a) \leq g(a)$ και $f'(x) < g'(x)$ για κάθε $a < x < b$, να αποδειχθεί οτι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $a \leq x \leq b$.

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, με $a \neq 0$, η συνάρτηση $f : [|a|, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \left(1 - \frac{a}{x}\right)^x$$

είναι γνήσια αύξουσα και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^{-a}$.

7. Για κάθε $x > 0$ να αποδειχθεί οτι

$$\frac{2x}{x + 2} < \log(1 + x) < \frac{x}{\sqrt{1 + x}}.$$

8. Εστω $a,\, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to [a, b]$ μία συνεχής συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη στο (a, b). Αν υπάρχει $0 < M < 1$ ώστε $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $a < x < b$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

9. Εστω $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $|f'(x)| < 1$ για κάθε $0 < x < 1$, να αποδειχθεί οτι η ακολουθία $\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

10. Εστω $a > 0$ και $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη στο $(0, a)$. Αν $f(0) = 0$ και η $f' : (0, a) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα, να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $g : (0, a] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

είναι αύξουσα.

11. Εστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Να αποδειχθεί οτι το $\lim_{x \to b^-} f'(x)$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

12. Εστω $a > 0$ και $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Αν το $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ υπάρχει, να αποδειχθεί οτι κατ΄ ανάγκη $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

13. Εστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη στο $(a, +\infty)$. Αν $\inf\{f'(x) : x > a\} > 0$, να αποδειχθεί οτι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

14. Εστω $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $a < c < b$ και το $\lim_{x \to c} f'(x)$ υπάρχει, να αποδειχθεί οτι κατ΄ ανάγκη $\lim_{x \to c} f'(x) = f'(c)$.

15. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ το σύνολο $E_r = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = r\}$ είναι κλειστό, να αποδειχθεί οτι η f είναι C^1.
(Υπόδειξη: Αν η f' δεν είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχουν ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = x$ και $x_n < y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\liminf_{n \to +\infty} f'(x_n) < \limsup_{n \to +\infty} f'(y_n)$. Τότε για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r \neq f'(x)$ ώστε $\liminf_{n \to +\infty} f'(x_n) < r < \limsup_{n \to +\infty} f'(y_n)$ το E_r δεν είναι κλειστό σύνολο.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
11ο Φύλλο

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.
(α) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x+x^2)-x}{x^2}$, (β) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-xe^{x/2}}{x^3}$,
(γ) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$, (δ) $\lim_{x\to+\infty} x[\log(1+\sqrt{1+x^2})-\log x]$,
(ε) $\lim_{x\to+\infty} x^k\log\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$, όπου $k\in\mathbb{Z}$ και $a\in\mathbb{R}$.

2. Αν $a>0$ και $n\in\mathbb{N}$ να αποδειχθεί οτι $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{ax}}{x^n}=+\infty$.

3. Αν f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις με $f(x)=3x^4-2x^3-x^2+1$ και $g(x)=4x^3-3x^2-2x$, να αποδειχθεί οτι

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}\neq\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

για κάθε $0<\xi<1$. Πώς εξηγείται αυτό;

4. Εστω $A\subset\mathbb{R}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $x\in A$ και η $f''(x)$ υπάρχει, να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

5. Εστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία δύο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, για την οποία υπάρχει $M>0$ ώστε $|f''(x)|\leq M$ για κάθε $x>0$. Να αποδειχθεί οτι $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

6. Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{όταν } x\leq 0,\\ e^{-1/x}, & \text{όταν } x>0\end{cases}$$

είναι C^∞. Συνεπώς, για κάθε a, $b\in\mathbb{R}$ με $a<b$ η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x-a)\cdot f(b-x)$ είναι C^∞ τέτοια ώστε $g(x)\neq 0$ ακριβώς τότε όταν $a<x<b$.
(Υπόδειξη: Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει μία πολυωνυμική συνάρτηση P_n βαθμού $2n$ τέτοια ώστε $f^{(n)}(x)=P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)f(x)$ για κάθε $x>0$.)

7. Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα, $f : I \to \mathbb{R}$ μία C^n συνάρτηση και $c \in I$. Αν υπάρχουν μία πολυωνυμική συνάρτηση P βαθμού το πολύ n και $M > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(x) - P(x)| \leq M|x - c|^{n+1}$$

για κάθε $x \in I$, να αποδειχθεί οτι

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k$$

για κάθε $x \in I$.

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση για την οποία υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f^{(n)}(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \geq 0$, τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι $f = 0$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας επαγωγικά το Θεώρημα του Rolle προκύπτει οτι $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \geq 0$.)

9. Για κάθε $0 \leq x < 1$ να αποδειχθεί οτι
(α) $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$,
(β) $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

10. (α) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $|\theta_n| \leq 2$ έτσι ώστε

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}.$$

(β) Να αποδειχθεί οτι το όριο

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$$

υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Ο πραγματικός αριθμός γ λέγεται σταθερά του Euler και είναι άγνωστο αν είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.
(γ) Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \log 2.$$