ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

(ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ)

Διδάσκων: Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2004

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Η έννοια της Συνήθους Διαφορικής εξίσωσης
2. Ύπαρξη και μονοσήμαντο των λύσεων

II. ΑΠΛΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. Διαφορικές Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών και εφαρμογές
2. Πλήρεις Διαφορικές Εξισώσεις και πολλαπλασιαστές του Euler
3. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης
4. Εισαγωγή νέων μεταβλητών

III. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Ορισμοί και ύπαρξη λύσεων
2. Ομογενείς Γραμμικές Διαφορικες Εξισώσεις
3. Μη-ομογενεις Γραμμικες Διαφορικες Εξισώσεις και η μεθοδος Lagrange.
4. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις ανώτερης τάξης.

IV. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

1. Γραμμικες Διαφορικες Εξισώσεις με πραγματικες διακεκριμενες ιδιοτιμές.
2. Δισδιάστατες Γραμμικες Διαφορικες Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.
3. Ταλαντώσεις

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

I. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Η έννοια της Συνήθους Διαφορικής εξίσωσης
2. Ύπαρξη και μονοσήμαντο των λύσεων

II. ΑΠΛΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. Διαφορικές Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών και εφαρμογές
2. Πλήρεις Διαφορικές Εξισώσεις και πολλαπλασιαστές του Euler
3. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης
4. Εισαγωγή νέων μεταβλητών

III. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Ορισμοί και ύπαρξη λύσεων
2. Ομογενείς Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις
3. Μη-ομογενείς Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις και η μέθοδος Lagrange.
4. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις ανώτερης τάξης.

IV. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

1. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με πραγματικές διακεκριμένες ιδιοτιμές.
2. Διδιάστατες Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.
3. Ταλαντώσεις

V. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

1. Αυτόνομες Διαφορικές Εξισώσεις και Διανυσματικά Πεδία
2. Συντηρητικά Πεδία και επικαμπύλια ολοκληρώματα
3. Το Θεώρημα του Green
4. Ο στροβιλιστής ενός C^1 διαφορίσιμου Διανυσματικού Πεδίου
5. Αστρόβιλα Διανυσματικά Πεδία σε απλά συνεκτικούς τόπους

VI. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ STOKES

1. Υπερεπιφάνειες
2. Ο εφαπτόμενος χώρος
3. Προσανατολισμένες επιφάνειες
4. Ολοκλήρωση σε επιφάνειες

5. Το Θεώρημα του Stokes
6. Το Θεώρημα της απόκλισης του Gauss

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α. Διαφορίσεις της μονάδας
Β. Ο τύπος αλλαγής της μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. T. Apostol, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Τόμος 2ος, CALTECH 1962
2. M. Braun, Differential Equations and their applications, Springer 1975
3. Π. Γεωργίου, Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδ. Πολ/μίου Αθηνών 1982
4. M. Hirsch - S. Smale, Differential Equations, Dynamical systems and Linear Algebra, Academic Press 1974
5. Δ. Κάππος, Διαφορικαί Εξισώσεις, Αθήναι 1966
6. Χ. Στράντζαλος - Α. Κατάβολος, Εισαγωγή στη Θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων, Εκδ. Καρδαμίτσα, Αθήνα 1986
7. Σ. Τραχανάς, Διαφορικές Εξισώσεις, Τόμος 1ος, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1989
8. K. Blatter, Analysis III, Springer 1982
9. J. Marsden - E. Tromba, Vector Analysis, Springer 1981

I. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Η έννοια της συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης

Έστω $U \subset \mathbb{R}^{nk+n+1}$ (όπου $n, k \in \mathbb{N}$) και $F=(F_1,\dots,F_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση. Η F ορίζει μια διανυσματική <u>συνήθη Διαφορική Εξίσωση</u> (Δ.Ε.) k-τάξης ή ισοδύναμα ένα σύστημα n-συνηθών Δ.Ε. k-τάξης που είναι το:

$$F_i(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0 \quad , \quad i=1,2,\dots,n$$

ή ισοδύναμα σε διανυσματική μορφή

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0 \qquad (1)$$

και συμπυκνώνει το πρόβλημα: Να βρεθούν ή να μελετηθούν συγκεκριμένες ιδιότητες όλων των συναρτήσεων $x(t)$ που ορίζονται για κατάλληλα $t \in \mathbb{R}$ και παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, για τις οποίες $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k)}(t)) \in U$, που ικανοποιούν την (1).

Στην (1) τα $t, x, x', \dots, x^{(k)}$ παίζουν το ρόλο των μεταβλητών της συνάρτησης F και αυτό περιορίζει κάπως τις δυνατές μορφές της (1). Παραδείγματος χάριν η εξίσωση

$$x'' + a^2 x = 0$$

είναι μια συνήθης Δ.Ε. 2ης-τάξης (εδώ $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ με $F(t,x,y,z) = z + a^2 x$) ενώ η εξίσωση

$$x' + x \circ x = 0$$

δεν είναι συνήθης Δ.Ε., γιατί το $x \circ x$ δηλώνει σύνθετη συνάρτηση του x και έτσι το x δεν υπεισέρχεται σαν μεταβλητή καμμιάς συνάρτησης $F : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subset \mathbb{R}^3$.

Το επίθετο «συνήθης» αντιδιαστέλλει επίσης την (1) στην οποία η ζητούμενη συνάρτηση είναι μιας μεταβλητής προς την έννοια «Δ.Ε. με μερικές παραγώγους» στην οποία η ζητούμενη συνάρτηση είναι πολλών μεταβλητών και παρουσιάζονται οι μερικές της παράγωγοι.

Υπό ορισμένες προϋποθέσεις (Πρβλ. το Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων) η εξίσωση (1) μπορεί να λυθεί <u>τοπικά</u> ως προς $x^{(k)}$ και προκύπτει η εξίσωση (σε διανυσματική μορφή)

$$x^{(k)} = G(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}) \qquad (2)$$

που λέγεται (διανυσματική) <u>συνήθης</u> <u>Δ.Ε.</u> <u>κ-τάξης</u> <u>λυμένης μορφής</u>.

Πολύ συχνά σε προβλήματα της Φυσικής και της Τεχνικής οι Δ.Ε. που παρουσιάζονται είναι λυμένης μορφής.

Προκειμένου να διευκολυνθούμε στην θεωρητική κυρίως μελέτη των συνήθων Δ.Ε. μετασχηματίζουμε την (2) σε μία Δ.Ε. 1ης-τάξης ως εξής: Θέτουμε $y_1 = x$, $y_2 = x', \dots, y_k = x^{(k-1)}$ οπότε η (2) γράφεται

$$y_k' = G(t, y_1, \dots, y_k) .$$

Θεωρούμε σαν καινούργια ζητούμενη συνάρτηση την

$$y = (y_1, \dots, y_k) = \left((x_1, \dots, x_n), (x_1', \dots, x_n'), \dots, (x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})\right)$$

που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}^{nk}$. Επιπλέον η (2) γράφεται τώρα

$$y' = (y_1', \dots, y_k') = (y_2, y_3, \dots, y_k, G(t, y_1, \dots, y_k)) = f(t, y)$$

όπου $f = (f_1, \dots, f_k)$ και $f_1(t,y) = y_2, \dots, f_{k-1}(t,y) = y_k$, $f_k(t,y) = G(t,y)$.

Επομένως για να μελετήσουμε γενικά όλες τις συνήθεις Δ.Ε. λυμένης μορφής, αρκεί να μελετήσουμε τις (διανυσματικές) συνήθεις Δ.Ε 1ης-τάξης της μορφής

$$x' = f(t, x) \qquad (E)$$

όπου $f : U \to \mathbb{R}^m$ και $U \subset \mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Από δω και στο εξής αναφερόμενοι σε Δ.Ε. θα εννοούμε συνήθη Δ.Ε. λυμένης μορφής, εκτός αν κάτι άλλο δηλώνεται.

<u>2. Ύπαρξη και μονοσήμαντο των λύσεων</u>

Το πιο απλό παράδειγμα συνήθους Δ.Ε. είναι η Δ.Ε. 1ης-τάξης

$$x' = ax \quad , \quad a \in \mathbb{R} . \qquad (1)$$

Για κάθε $c \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(t) = ce^{at}$ ικανοποιεί την (1) αφού $\varphi'(t) = ace^{at} = a\varphi(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επιπλέον δεν υπάρχουν άλλες λύσεις γιατί αν $\psi(t)$ είναι μία λύση της (1) έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\psi(t)e^{-at}\right) = \psi'(t)e^{-at} + \psi(t)(-ae^{-at}) = a\psi(t)e^{-at} - a\psi(t)e^{-at} = 0 .$$

Υπάρχει λοιπόν $c\in\mathbb{R}$ ώστε $\psi(t)e^{-at}=c$, δηλαδή $\psi(t)=ce^{at}$.

Η σταθερά c που εμφανίζεται στη λύση της (1) καθορίζεται πλήρως από μια τιμή της φ. Αν η λύση $\varphi(t)$ ικανοποιεί την συνθήκη $\varphi(t_0)=x_0$, τότε $ce^{at_0}=x_0$ και κατά συνέπεια έχουμε $\varphi(t)=x_0e^{a(t-t_0)}$.

Έχοντας τα προηγούμενα υπ' όψιν δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

<u>2.1. Ορισμός</u> Έστω $U\subset\mathbb{R}^{m+1}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ και $f:U\to\mathbb{R}^m$. Μία <u>λύση</u> της Δ.Ε

$$x'=f(t,x) \qquad \text{(E)}$$

<u>με αρχική συνθήκη</u> $(t_0,x_0)\in U$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi: I\to\mathbb{R}^m$, όπου το I είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ που περιέχει το t_0 στο εσωτερικό του ώστε $\varphi(t_0)=x_0$, $(t,\varphi(t))\in U$ και $\varphi'(t)=f(t,\varphi(t))$ για κάθε $t\in I$.

Δύο κρίσιμα ερωτήματα που συνδέονται άμεσα με το πρόβλημα της εύρεσης όλων των λύσεων της (E) είναι τα επόμενα:

— Πότε για μια αρχική συνθήκη υπάρχει τουλάχιστο μία λύση της (E) που την ικανοποιεί;

— Κάτω από ποιές συνθήκες υπάρχει ακριβώς μία λύση με την δεδομένη αρχική συνθήκη;

Η Δ.Ε. (1) έχει για κάθε αρχική συνθήκη ακριβώς μία λύση που την ικανοποιεί. Όμως αυτό δεν ισχύει παραδειγματος χάριν για την Δ.Ε. $1^{η}$-τάξης

$$x'=x^{2/3} \qquad (2)$$

η οποία έχει δύο λύσεις $\varphi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $\varphi(t)=0$ και $\psi(t)=\left(\frac{t}{3}\right)^3$ με την ίδια αρχική συνθήκη $(0,0)$.

Η βασική συνθήκη η οποία όταν ικανοποιείται εξασφαλίζει την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων μιας συνήθους Δ.Ε. ως προς τις αρχικές συνθήκες, είναι η συνθήκη του Lipschitz.

<u>2.2. Ορισμός</u> Μια συνάρτηση $f:U\to\mathbb{R}^m$, όπου $U\subset\mathbb{R}^{m+1}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$

λέμε ότι ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz (ως προς την δεύτερη μεταβλητή) στο V, αν υπάρχει $M>0$ ώστε:

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| \leq M\|x-y\| \quad \text{για κάθε } (t,x),(t,y)\in V.$$

<u>2.3. Πρόταση</u> Αν το V είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{m+1}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ και η συνεχής $f:V\to\mathbb{R}^m$ έχει συνεχή μερική παράγωγο ως προς την δεύτερη μεταβλητή, τότε η f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz (ως προς τη δεύτερη μεταβλητή) σε κάθε ορθογώνιο $A\times B\subset V$, όπου το A είναι ένα κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$ και το B ένα κλειστό ορθογώνιο στο $\mathbb{R}^m$.

<u>Απόδειξη</u>. Επειδή η μερική παράγωγος $\partial f/\partial x$ είναι συνεχής στο $A\times B$ είναι φραγμένη. Έστω $M=\sup\{\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\| : (t,x)\in A\times B\}$. Για κάθε $t\in A$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_t: B\to\mathbb{R}^m$ με τύπο $f_t(x)=f(t,x)$. Η f_t είναι διαφορίσιμη στο B και $Df_t(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$. Επειδή το B είναι κυρτό, για κάθε $(t,x),(t,y)\in A\times B$ έχουμε:

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| = \|f_t(x)-f_t(y)\|\leq M\|x-y\|$$

(Πρβλ. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1953, σελ. 218, Θεώρημα 9.19).

<u>2.4. Θεώρημα Picard-Lindelöf.</u> Έστω $V\subset\mathbb{R}^{m+1}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ ένα ανοιχτό σύνολο, $f:V\to\mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση και $(t_0,x_0)\in V$. Αν υπάρχει ένα ορθογώνιο $A\times B\subset V$ που περιέχει το (t_0,x_0) στο εσωτερικό του ώστε η f να ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο $A\times B$, τότε υπάρχει $r>0$ ώστε η Δ.Ε.

$$x'=f(t,x) \qquad \text{(E)}$$

να έχει μια και μοναδική λύση $\varphi:[t_0-r,t_0+r]\to B\subset\mathbb{R}^m$ με αρχική συνθήκη (t_0,x_0).

Το «μοναδική» στο συμπέρασμα σημαίνει ότι αν $\psi: I\to\mathbb{R}^m$ είναι μια άλλη λύση με αρχική συνθήκη (t_0,x_0), τότε $\varphi(t)=\psi(t)$ για κάθε $t\in I\cap[t_0-r,t_0+r]$. Για την απόδειξη του 2.4 παραπέμπουμε στο βιβλίο T. Apostol, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Τόμος 2ος, Κεφάλαιο 9.

<u>2.5. Ορισμός.</u> Έστω $V \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ ένα ανοιχτό σύνολο. Μιά συνεχής συνάρτηση $f: V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ πληροί <u>τοπικά</u> <u>μία</u> <u>συνθήκη</u> <u>Lipschitz</u> ως προς τη δεύτερη μεταβλητή αν για κάθε $(t_0,x_0)\in V$ υπάρχει ένα ορθογώνιο $A\times B\subset V$ που περιέχει το (t_0,x_0) στο εσωτερικό του ώστε η f να ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο $A\times B$.

Από το Θεώρημα 2.4 προκύπτει ότι αν το V είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{m+1}$ και η f πληροί τοπικά μία συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, τότε για κάθε $(t_0,x_0)\in V$ υπάρχει μία και μοναδική λύση της (Ε) ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[t_0-r, t_0+r]$ για κατάλληλο $r>0$. Ειδικά όταν η $\partial f/\partial x$ υπάρχει και είναι συνεχής στο V αυτό συμβαίνει πάντα.

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι κατά πόσο μπορεί να επεκταθεί το διάστημα $[t_0-r, t_0+r]$ σ' ένα «μέγιστο» διάστημα στο οποίο ορίζεται η λύση με αρχική συνθήκη (t_0,x_0).

<u>2.6. Πρόταση.</u> Έστω $V\subset\mathbb{R}^{m+1}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: V\longrightarrow\mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση που πληροί τοπικά μια συνθήκη Lipschitz ως πρός την δεύτερη μεταβλητή. Για κάθε $(t_0,x_0)\in V$ υπάρχει ένα μέγιστο ανοιχτό διάστημα (α,b) στο οποίο ορίζεται η μέγιστη λύση $\varphi_{max}: (\alpha,b)\longrightarrow\mathbb{R}^m$ της Δ.Ε. (Ε) με αρχική συνθήκη (t_0,x_0).

<u>Απόδειξη.</u> Από το Θεώρημα 2.4 υπάρχει $r>0$ και μία μοναδική λύση $\varphi: [t_0-r, t_0+r]\longrightarrow\mathbb{R}^m$ της (Ε) με αρχική συνθήκη (t_0,x_0). Πρώτα θα δείξουμε ότι η φ επεκτείνεται σε μία λύση μεγαλύτερου πεδίου ορισμού ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το $[t_0-r, t_0+r]$.

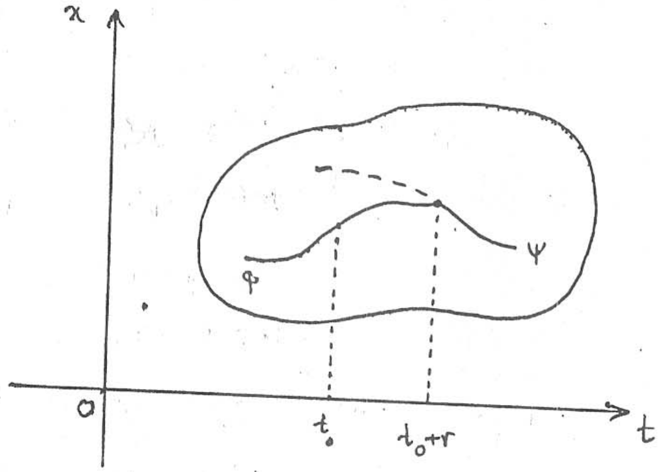
Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4 υπάρχει $s>0$ και μία μοναδική λύση

$$\psi: [t_0+r-s, t_0+r+s]\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

της (Ε) με αρχική συνθήκη $(t_0+r, \varphi(t_0+r))$, δηλαδή $\psi(t_0+r)=\varphi(t_0+r)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$\bar{\varphi}: [t_0-r, t_0+r+s) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ με τύπο



$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{όταν } t \in [t_0 - r, t_0 + r] \\ \psi(t), & \text{όταν } t \in [t_0 + r, t_0 + r + s) \end{cases}$$

Η $\bar{\varphi}$ είναι λύση της (E) με αρχική συνθήκη (t_0, x_0) και επεκτείνει προς τα δεξιά την φ σ' ένα ανοιχτό δεξιά διάστημα που περιέχει το $[t_0 - r, t_0 + r]$. (Σημείωση: Λόγω του μονοσημάντου $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) = \psi(t)$ για $t \in [t_0 + r - s, t_0 + r + s]$), Ανάλογα η $\bar{\varphi}$ επεκτείνεται σ' ένα ανοιχτό αριστερά διάστημα που περιέχει το $[t_0 - r, t_0 + r + s)$. Κατά συνέπεια υπάρχει λύση της (E) με αρχική συνθήκη (t_0, x_0) με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το $[t_0 - r, t_0 + r]$. Αν τώρα $\varphi_i : I_i \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$ είναι δύο λύσεις της (E) με αρχική συνθήκη (t_0, x_0), όπου τα I_1, I_2 είναι ανοιχτά διαστήματα που περιέχουν το $[t_0 - r, t_0 + r]$, τότε $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ για κάθε $t \in I_1 \cap I_2$, λόγω του μονοσημάντου των λύσεων. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{E}$ όλων των ζευγών (I, φ_I), όπου το I είναι ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το $[t_0 - r, t_0 + r]$ και η $\varphi_I : I \to \mathbb{R}^m$ λύση της (E) με αρχική συνθήκη (t_0, x_0). Το σύνολο $\bigcup_{(I, \varphi_I) \in \mathcal{E}} I$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα (α, b) στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση $\varphi_{max} : (\alpha, b) \to \mathbb{R}^m$ με τύπο

$$\varphi_{max}(t) = \varphi_I(t), \quad \text{όταν } t \in I.$$

Η φ_{max} είναι προφανώς λύση της (E) με αρχική συνθήκη (t_0, x_0). Είναι φανερό πως για κάθε άλλη λύση $X : J \to \mathbb{R}^m$ της (E) με αρχική συνθήκη (t_0, x_0) έχουμε $J \subset (a, b)$ και $X = \varphi_{max} | J$.

<u>2.7. Παραδείγματα.</u> Η Δ.Ε $1^{ης}$-τάξης

$$x' = x^2 \qquad (3)$$

ορίζεται στο $U = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Picard-Lindelöf: για κάθε αρχική συνθήκη (t_0, x_0). Μία προφανής λύση είναι η $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\varphi(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Η φ ικανοποιεί κάθε αρχική συνθήκη $(t, 0)$. Αν λοιπόν $\psi : I \to \mathbb{R}$ είναι μια λύση της (3) διαφορετική από την φ, τότε η ψ δεν παίρνει την τιμή 0 σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Έτσι υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $x \neq 0$, οπότε η (3) γράφεται:

$$\frac{x'}{x^2} = 1 \implies \int \frac{x'(t)}{(x(t))^2}\,dt = \int dt \implies \int \frac{1}{x^2}\,dx = t + c$$

$$\implies -\frac{1}{x} = t + c \implies x(t) = \frac{-1}{t+c}, \quad t \neq -c$$

που ορίζει δύο λύσεις $\varphi_1 : (-\infty, -c) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_2 : (-c, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με τον ίδιο τύπο $\varphi_i(t) = -\frac{1}{t+c}$, $i = 1,2$. Η σταθερά c καθορίζεται όπως είναι γνωστό από την αρχική συνθήκη (t_0, x_0) και έχουμε:

$$x_0 = -\frac{1}{t_0 + c} \implies c = -\frac{1 + t_0 x_0}{x_0}.$$

Το t_0 θα πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της λύσης με αρχική συνθήκη (t_0, x_0). Αυτό ελέγχεται από το αν $-c - t_0 > 0$ ή < 0, δηλαδή από το πρόσημο της διαφοράς $\frac{1 + t_0 x_0}{x_0} - t_0 = \frac{1}{x_0}$. Έτσι αν $x_0 > 0$ τότε η (μοναδική) λύση με αρχική συνθήκη (t_0, x_0) είναι η φ_1, ενώ αν $x_0 < 0$ τότε η λύση είναι η φ_2. Οι λύσεις $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ είναι μέγιστες (Περβλ. Πρόταση 2.6) γιατί: $\lim_{t \to -c} \varphi_i(t) = \pm\infty$, $i = 1,2$.

(β) Η $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(t,x) = 1 + x^2$ ορίζει την Δ.Ε. $1^{ης}$-τάξης

$$x' = 1 + x^2 \tag{4}$$

στο $U = \mathbb{R}^2$, που επιλύεται ως εξής:

$$\frac{x'}{1+x^2} = 1 \implies \int \frac{x'(t)}{1 + (x(t))^2}\,dt = \int dt \implies \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = t + c \implies$$

$\arctan x = t + c$. Ο τύπος λοιπόν των λύσεων της (4) είναι $\varphi(t) = \tan(t + c)$. Το μέγιστο διάστημα στο οποίο ορίζεται η $\varphi(t)$ είναι το $\left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right)$ και όπως πάντα το c καθορίζεται ανάλογα με την αρχική συνθήκη που θέλουμε να ικανοποιεί η φ.

Για να περιορισθεί κάπως η έκταση του κειμένου που ακολουθεί δεν θα ασχοληθούμε στα επόμενα παραδείγματα και εφαρμογές με τα πεδία ορισμού των λύσεων παρά μόνο εκεί που χρειάζεται.

II. ΑΠΛΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΩΝ Δ.Ε. 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών και εφαρμογές.

Μια μονοδιάστατη Δ.Ε 1ης τάξης είναι χωριζομένων μεταβλητών αν έχει τη μορφή

$$x' = h(t)g(x) \qquad (1)$$

με $h: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις, όπου τα A, B είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε δηλαδή $f: A\times B \to \mathbb{R}$ με $f(t,x) = h(t)g(x)$ σύμφωνα με τους συμβολισμούς της παραγράφου I.2. Για τη λύση της (1) διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

(i) Το σύνολο $T = \{x \in B : g(x) \neq 0\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του B (και του $\mathbb{R}$) και, όταν δεν είναι κενό, είναι ένωση ξένων μεταξύ τους ανοιχτών διαστημάτων. Επίσης, και το A είναι ένωση ξένων μεταξύ τους ανοιχτών διαστημάτων, αφού είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έτσι το $A\times T$ είναι ένωση ξένων μεταξύ τους ανοιχτών ορθογωνίων της μορφής $(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$. Στο $(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ η (1) γράφεται:

$$\frac{x'}{g(x)} = h(t) \qquad (2)$$

Έστω $(t_0, x_0) \in (\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$. Επειδή η g είναι συνεχής, ορίζεται η διαφορίσιμη συνάρτηση $G: (\gamma,\delta) \to \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(s)}\, ds$$

Η G είναι γνήσια μονότονη, αφού η $\frac{1}{g}$ δεν μηδενίζεται στο (γ,δ). Υπάρχει λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση $G^{-1}: (\Gamma,\Delta) \to \mathbb{R}$, που είναι διαφορίσιμη, όπου $(\Gamma,\Delta) = G((\gamma,\delta))$. Επίσης ορίζεται η διαφορίσιμη συνάρτηση $H: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ με

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds$$

Από την (2) προκύπτει ότι $G(x) = H(t)$ για κάθε $t \in (\alpha,\beta)$, $x \in (\gamma,\delta)$.

Κατά συνέπεια ορίζεται η διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(t) = G^{-1}(H(t))$ που είναι προφανώς λύση της (1) με αρχική συνθήκη (t_0, x_0).

Αν $\psi : (\alpha^*, \beta^*) \to \mathbb{R}$ είναι μια άλλη λύση με αρχική συνθήκη (t_0, x_0), τότε για κάθε $t \in (\alpha, \beta) \cap (\alpha^*, \beta^*)$ έχουμε:

$$G(\varphi(t)) = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{g(s)}\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(s)}{g(\varphi(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)}{g(\psi(s))}\, ds =$$

$$= \int_{x_0}^{\psi(t)} \frac{1}{g(s)}\, ds = G(\psi(t)) \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t), \text{ αφού η } G \text{ είναι}$$

γνήσια μονότονη. Ισχύει λοιπόν το μονοσήμαντο των λύσεων για αρχικές συνθήκες $(t_0, x_0) \in A \times T$.

(ii) Έστω τώρα $x_0 \in B$ με $g(x_0) = 0$. Για κάθε $t_0 \in A$ η σταθερή συνάρτηση $\varphi_0 : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(t) = x_0$ είναι λύση της (1) με αρχική συνθήκη (t_0, x_0). Το (α, β) είναι το μέγιστο διάστημα στο A που περιέχει το t_0. Για αρχικές συνθήκες αυτού του τύπου ενδεχομένως να μην ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων (Πρβλ. παράδειγμα 1.2 παρακάτω).

__1.1. Παράδειγμα.__ Η Δ.Ε.

$$x' = \frac{x}{t}(1 + x^2) \qquad (3)$$

που ορίζεται στο $(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ είναι χωριζομένων μεταβλητών. Εδώ έχουμε $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $h(t) = \frac{1}{t}$ και $B = \mathbb{R}$, $g(x) = x(1 + x^2)$. Η g μηδενίζεται μόνο για $x = 0$. Επομένως οι σταθερές συναρτήσεις $\varphi_1 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $\varphi_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $\varphi_i(t) = 0$, $i = 1, 2$ είναι λύσεις. Για $x \neq 0$ η Δ.Ε γράφεται:

$$\frac{x'}{x(1+x^2)} = \frac{1}{t} \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{1}{t}\, dt \Rightarrow \log \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \log|ct|$$

$$\Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = |ct| \Rightarrow x(t) = \frac{ct}{\sqrt{1 - c^2 t^2}}, \quad ct \neq 0, \quad c^2 t^2 < 1, \quad c \in \mathbb{R} \text{ σταθ.}$$

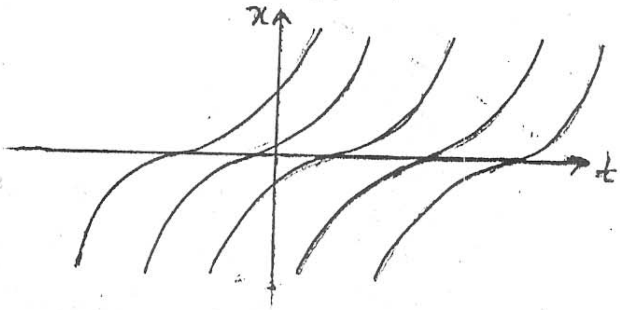
__1.2. Παράδειγμα__ Η Δ.Ε.

$$x' = x^{2/3} \qquad (4)$$

είναι χωριζομένων μεταβλητών με $h(t)=1$, $g(x)=x^{2/3}$, $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$, και έχει τη σταθερή λύση $\varphi(t)=0$, $t\in\mathbb{R}$ που αντιστοιχεί στο μοναδικό σημείο μηδενισμού της g. Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$x^{-2/3}\cdot x'=1 \Rightarrow \int x^{-2/3}\,dx=\int dt \Rightarrow x(t)=\left(\frac{t+c}{3}\right)^3 \quad \text{για}$$

$t\neq -c$, αφού υποθέτουμε ότι $x\neq 0$, και $c\in\mathbb{R}$ σταθερά. Η συνάρτηση $\varphi_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\varphi_c(t)=\left(\frac{t+c}{3}\right)^3$ είναι διαφορίσιμη και είναι λύση της (4) που περιέχει την $x(t)$. Η φ_c ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $(-c,0)$ όπως και η φ, που σημαίνει ότι δεν ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων για την αρχική συνθήκη $(-c,0)$. Επιπλέον για κάθε αρχική συνθήκη της μορφής $(t_0,0)$ υπάρχουν άπειρες το πλήθος λύσεις που την ικανοποιούν. Πράγματι:

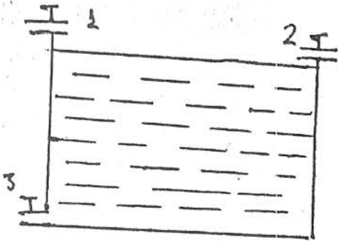


αν $c_1<\min\{-c,t_0\}$, $c_2>\max\{-c,t_0\}$ τότε η συνάρτηση $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$\psi(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{t+c_1}{3}\right)^3, & t\in(-\infty,-c_1)\\ 0, & t\in[-c_1,-c_2]\\ \left(\dfrac{t+c_2}{3}\right)^3, & t\in[-c_2,+\infty)\end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη και λύση της (4) με αρχική συνθήκη $(t_0,0)$.

1.3. Εφαρμογή Ένα δοχείο όγκου V cm³ είναι γεμάτο καθαρό νερό και οι στρόφιγγες 1, 2, 3 είναι κλειστές. Οι παροχές των 1, 2 είναι β cm³/sec και της 3 2β cm³/sec. Η στρόφιγγα 1 παρέχει καθαρό νερό ενώ η 2 διάλυμα άλατος με συγκέντρωση α/β gr/cm³. Ανοίγουμε ταυτόχρονα τις στρόφιγγες και, υποθέτοντας ότι η ανάμιξη είναι τέλεια και η ροή ομοιόμορφη, ζητάμε την ποσότητα του άλατος που περιέχεται σε διάλυση στο δοχείο μετά από χρόνο t.



Έστω $x(t)$ η ποσότητα του άλατος τη χρονική στιγμή t. Η συγκέντρωση του άλατος τη στιγμή t είναι $\frac{x(t)}{V}$, αφού ο όγκος του διαλύματος παραμένει σταθερός. Επειδή η ροή είναι ομοιόμορφη ο ρυθμός της μεταβολής της ποσότητας του άλατος είναι

$$x'(t) = \alpha - 2\beta \frac{x(t)}{V} \qquad (5)$$

Η (5) είναι μία Δ.Ε χωριζομένων μεταβλητών και έχει την προφανή σταθερή λύση $x(t) = \alpha V/2\beta$. Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, με ολοκλήρωση βρίσκουμε $x(t) = \frac{1}{2\beta}\left(\alpha V - c e^{-(2\beta/V)t}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Έτσι όλες οι λύσεις περιέχονται στον τύπο

$$x(t) = \frac{1}{2\beta}\left(aV - c e^{-(2\beta/V)t}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος πρέπει για $t=0$ να έχουμε $x(t)=0$. Δηλαδή αναζητάμε τη λύση με αρχική συνθήκη $(0,0)$. Γι αυτή την αρχική συνθήκη βρίσκουμε $c = aV$ και κατά συνέπεια, η λύση του προβλήματος παρέχεται από τον τύπο

$$x(t) = \frac{aV}{2\beta}\left(1 - e^{-(2\beta/V)t}\right)$$

<u>1.4. Εφαρμογή.</u> Έστω ότι μέσα σε μία κοινωνία $\alpha > 0$ ανθρώπων συμβαίνει ένα γεγονός το οποίο τη χρονική στιγμή t_0 γνωρίζουν $0 < x_0$ άνθρωποι. Έστω $x(t)$ το πλήθος των ανθρώπων που γνωρίζουν το συμβάν την χρονική στιγμή t. Υποθέτουμε ότι οι ειδήσεις διαδίδονται από "στόμα σε στόμα" καθώς και από τα μέσα μαζικής ενημέρωσης, κυρίως δε την τηλεόραση. Ο ρυθμός μεταβολής του πλήθους των ανθρώπων που μαθαίνουν την είδηση με την "από στόμα σε στόμα" διαδικασία είναι ανάλογος με το γινόμενο του πλήθους αυτών που τη γνωρίζουν με όσους δεν τη γνωρίζουν, δηλαδή είναι $\lambda x(t)(\alpha - x(t))$, $\lambda > 0$ σταθερά. Επίσης υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής αυτών που μαθαίνουν την είδηση από την τηλεόραση είναι ανάλογος του πλήθους των ανθρώπων που δεν γνωρίζουν το συμβάν, δηλαδή είναι $\mu(\alpha - x(t))$, όπου η σταθερά $\mu > 0$ εξαρτάται από την τηλεόραση. Έτσι συνολικά ο ρυθμός μεταβολής των ανθρώπων που γνωρίζουν το γεγονός δίνεται από την εξίσωση

$$x'(t) = \lambda x(t)(\alpha - x(t)) + \mu(\alpha - x(t)), \quad \text{δηλαδή}$$

$$x' = -\lambda(x - \alpha)\left(x + \frac{\mu}{\lambda}\right) \qquad (6)$$

που είναι μία Δ.Ε χωριζομένων μεταβλητών.

Η (6) έχει τις σταθερές λύσεις $\varphi(t)=\alpha$ και $\psi(t)=-\frac{\mu}{\lambda}$. Η ψ δεν έχει νόημα γιατί υποθέτουμε ότι $\mu,\lambda>0$. Η φ γίνεται δεκτή μόνο στην περίπτωση που $x_0=\alpha$, δηλαδή μαθαίνουν το γεγονός όλοι ταυτόχρονα. Για $x\neq 0$ η (6) γίνεται

$$\frac{x'}{-\lambda(x-\alpha)(x+\frac{\mu}{\lambda})}=1 \Rightarrow -\frac{1}{\lambda}\int\frac{1}{(x-\alpha)(x+\frac{\mu}{\lambda})}dx=\int dt \Rightarrow$$

$$\log\left|\frac{x+\frac{\mu}{\lambda}}{x-\alpha}\right|=(\mu+\alpha\lambda)t+c \Rightarrow \frac{x+\frac{\mu}{\lambda}}{x-\alpha}=ce^{(\mu+\alpha\lambda)t},\ c\in\mathbb{R}$$

από όπου παίρνουμε $x(t)=\dfrac{\frac{\mu}{\lambda}+\alpha ce^{(\mu+\alpha\lambda)t}}{ce^{(\mu+\alpha\lambda)t}-1}$ και η σταθερά c βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες $x(t_0)=x_0$.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι Δ.Ε.:

(α) $x'=1+t+x^2+x^2t$ (β) $x'=tx(x-2)$

(γ) $x'=\dfrac{3x^2+4x+2}{2(x-1)}$ (γ) $x'=x-x^2$

2. Να βρεθούν οι λύσεις των Δ.Ε. με αρχικές συνθήκες:

(α) $x'=\dfrac{x\log x}{\sin t}$, $(\frac{\pi}{2},1)$ (β) $x'=\dfrac{e^t}{x(1+e^t)}$, $(1,1)$

(γ) $x'=\dfrac{-t\cdot\tan x}{1+t^2}$, $(1,\pi/4)$ (δ) $x'=\dfrac{(t^2+1)(x^2-1)}{tx}$, $(1,1)$

3. Να επιλυθεί η Δ.Ε. $x'=\sqrt{|x|}$

4. Σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει στο έδαφος. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου της ταχύτητας με σταθερά $a>0$, να βρεθεί η ταχύτητα v του σώματος την χρονική στιγμή t. Να αποδειχθεί επιπλέον ότι υπάρχει η οριακή ταχύτητα $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)$ και να υπολογιστεί.

2. Πλήρεις Δ.Ε. και πολλαπλασιαστές του Euler.

Η Δ.Ε. της (όχι γραμμικής) μορφής

$$P(t,x)\,x' + Q(t,x) = 0 \qquad (1)$$

όπου οι $P,Q : V \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και το V ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ λέγεται <u>πλήρης</u> όταν υπάρχει μία C^1 διαφορίσιμη συνάρτηση $G : V \to \mathbb{R}$ ώστε

$$P = \frac{\partial G}{\partial x} \quad \text{και} \quad Q = \frac{\partial G}{\partial t}$$

Η G λέγεται <u>παράγουσα</u> της (1). Είναι φανερό πως αν η G είναι παράγουσα της (1) τότε και η συνάρτηση $G+c$ είναι παράγουσα της (1) για κάθε σταθερά $c\in\mathbb{R}$.

Αν η Δ.Ε (1) είναι πλήρης και G είναι μια παράγουσά της τότε το σύνολο των λύσεών της είναι ακριβώς το σύνολο όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων $\varphi : I \to \mathbb{R}$, όπου το I είναι κατάλληλο ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$, ώστε $(t,\varphi(t)) \in V$ και $\frac{d}{dt} G(t,\varphi(t)) = 0$ για κάθε $t\in I$. Πράγματι, η φ είναι λύση ακριβώς τότε όταν

$$P\varphi' + Q = 0 \iff \frac{\partial G}{\partial x}\varphi' + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \iff \frac{d}{dt} G(t,\varphi(t)) = 0$$

Έτσι η λύση μιας πλήρους Δ.Ε. ανάγεται στη λύση μιας εξίσωσης $G(t,x) = c$, όπου $c\in\mathbb{R}$ σταθερά, ως προς x, υπό την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή μία παράγουσα G. Έστω τώρα $(t_0,x_0)\in V$ και $F : V \to \mathbb{R}$ με $F(t,x) = G(t,x) - G(t_0,x_0)$. Τότε έχουμε $F(t_0,x_0) = 0$ και η $P = \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$ είναι συνεχής. Αν επιπλέον $P(t_0,x_0) \neq 0$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα των Πεπλεγμένων συναρτήσεων η εξίσωση $F(t,x) = 0$ λύνεται <u>τοπικά</u> ως προς x, σε μια περιοχή του (t_0,x_0). Δηλαδή, υπάρχει $r>0$ και μια διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi : (t_0-r, t_0+r) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(t_0) = x_0$ και $F(t,\varphi(t)) = 0$ για κάθε $t\in(t_0-r,t_0+r)$. Άρα η φ είναι λύση της (1), αφού η F είναι παράγουσα.

Είναι φανερό στο σημείο αυτό πως χρειαζόμαστε κάποιο κριτήριο πληρότητας της (1). Στην περίπτωση που η (1) είναι πλήρης και οι P, Q C^1 διαφορίσιμες τότε η παράγουσα G είναι C^2 διαφορίσιμη και

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

που είναι μια αναγκαία συνθήκη για την πληρότητα της (1)

2.1. Πρόταση. Αν $U = A \times B$, όπου τα A, B είναι ανοικτά διαστήματα στο $\mathbb{R}$, και οι P, Q είναι C^1 διαφορίσιμες τότε η (1) είναι είναι πλήρης ακριβώς τότε όταν

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{στο } A \times B \qquad (2)$$

Απόδειξη Πρέπει να βρούμε μια παράγουσα της (1) υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η (2). Έστω $(t_0, x_0) \in A \times B$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : A \times B \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} Q(s,x)\, ds$$

και αναζητούμε παράγουσα G της μορφής $G(t,x) = F(t,x) + H(x)$, όπου η H είναι προς εύρεση. Κατ' αρχήν θα έχουμε $\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = Q$.
Από την άλλη μεριά

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + H' = \frac{\partial}{\partial x}\int_{t_0}^{t} Q(s,x)\, ds + H' = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x} Q(s,x)\, ds + H'$$

(Πβλ. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Mc. Graw-Hill 1953, Θεώρημα 9.42)
Οπότε για να έχουμε $P = \frac{\partial G}{\partial x}$, αρκεί να διαλέξουμε την $H : B \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$H'(x) = P(t,x) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x} Q(s,x)\, ds \quad , \text{δηλαδή}$$

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} \left(P(t,z) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x} Q(s,z)\, ds \right) dz$$

Έτσι μια παράγουσα της (1) είναι η $G : A \times B \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(t,x) = \int_{t_0}^{t} Q(s,x)\, ds + \int_{x_0}^{x} \left(P(t,z) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x} Q(s,z)\, ds \right) dz$$

2.2. Παράδειγμα Η Δ.Ε. $\quad 2t\,(1 - x e^{t^2}) - e^{t^2} x' = 0 \qquad (3)$

είναι πλήρης στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, γιατί $P(t,x)=-e^{t^2}$, $Q(t,x)=2t(1-xe^{t^2})$ και $\frac{\partial P}{\partial t}(t,x)=-2te^{t^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}(t,x)$. Μία παράγουσα της (3) είναι η

$$G(t,x)=\int 2t(1-xe^{t^2})\,dt+\int\left(-e^{t^2}-\int -2te^{t^2}dt\right)dx=$$

$$=t^2-xe^{t^2}+\int(-e^{t^2}+e^{t^2})\,dx=t^2-xe^{t^2}$$

Άρα οι λύσεις της (3) δίνονται από την εξίσωση $t^2-xe^{t^2}=c$ $\Rightarrow$ $x(t)=(c+t^2)e^{-t^2}$, $t\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$.

Μερικές φορές όταν η (1) δεν είναι πλήρης, επιτυγχάνεται η αναγωγή της σε μία πλήρη Δ.Ε με πολλαπλασιασμό των μελών της με έναν κατάλληλο παράγοντα $E(t,x)\neq 0$. Μέθοδο για την εύρεση τέτοιου παράγοντα έδωσε πρώτος ο Euler, γι' αυτό ο παράγοντας λέγεται πολλαπλασιαστής του Euler.

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι $U=A\times B$, όπου τα A, B είναι ανοιχτά διαστήματα στο $\mathbb{R}$ και οι $P,Q:U\longrightarrow\mathbb{R}$ C^2 διαφορίσιμες. Μία C^1 διαφορίσιμη συνάρτηση $E: A\times B\longrightarrow\mathbb{R}-\{0\}$ είναι ακριβώς τότε πολλαπλασιαστής του Euler για την (1) όταν η Δ.Ε

$$E(t,x)\,P(t,x)\,x'+E(t,x)\,Q(t,x)=0 \qquad (4)$$

είναι πλήρης. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1 αυτό ισοδυναμεί με

$$\frac{\partial}{\partial t}(E\cdot P)=\frac{\partial}{\partial x}(E\cdot Q)\iff$$

$$P\frac{\partial E}{\partial t}+E\frac{\partial P}{\partial t}=Q\frac{\partial E}{\partial x}+E\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (5)$$

Επομένως η εύρεση ενός πολλαπλασιαστή Euler ανάγεται στην επίλυση της (5) ως προς E, που είναι μία Δ.Ε με μερικές παραγώγους. Αυτό είναι συνήθως δύσκολο εγχείρημα εκτός από ειδικές περιπτώσεις.

<u>2.3. Πρόταση</u> (α) Έστω ότι $P(t,x)\neq 0$ για κάθε $(t,x)\in A\times B$ και

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}\right)\right)=0 \quad \text{στο } A\times B.$$

Αν $g = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right)$, τότε η συνάρτηση $E: A\times B \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$E(t,x) = e^{\int g(t)dt}$ είναι πολλαπλασιαστής Euler για την (1)

(β) Έστω ότι $Q(t,x) \neq 0$ για κάθε $(t,x) \in A\times B$ και $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right) = 0$

Αν $h = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, τότε η συνάρτηση $E: A\times B \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$E(t,x) = e^{\int h(x)dx}$ είναι πολλαπλασιαστής Euler για την (1).

<u>Απόδειξη</u> Και στις δύο περιπτώσεις εύκολα διαπιστώνουμε ότι η E είναι λύση της (5).

<u>2.4. Παράδειγμα</u> Η Δ.Ε.

$$(2e^t + x)x' + \left(\frac{x^2}{2} - 2xe^t\right) = 0 \qquad (6)$$

δεν είναι πλήρης στο $V = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, γιατί $P(t,x) = 2e^t + x$ και $Q(t,x) = \frac{x^2}{2} - 2xe^t$, ενώ $\frac{\partial P}{\partial t} = 2e^t$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = x - 2e^t$. Η (6) έχει τη σταθερή λύση $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Για $x \neq 0$, η συνάρτηση $E(t,x) = \frac{1}{x^2}$ ικανοποιεί την εξίσωση (5) και κατά συνέπεια είναι πολλαπλασιαστής του Euler για την (6) (Βλ. Πρόταση 2.3 (β)). Αυτό σημαίνει ότι η Δ.Ε.

$$\frac{1}{x^2}(2e^t + x)x' + \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} - 2xe^t\right) = 0 \qquad (7)$$

είναι πλήρης. Μία παράγουσα της (7) είναι η

$$G(t,x) = \int \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} - 2xe^t\right)dt + \int\left(\frac{1}{x^2}(2e^t + x) - \int \frac{2e^t}{x^2}dt\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{2}{x}e^t + 2e^t\left(-\frac{1}{x}\right) + \log|x| - 2e^t\left(-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \log|x| + \frac{t}{2} - \frac{2e^t}{x}$$

Οι υπόλοιπες λύσεις της (6) περιέχονται λοιπόν (σε πεπλεγμένη μορφή) στην εξίσωση: $\log|x| + \frac{t}{2} - \frac{2e^t}{x} = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι Δ.Ε.

(α) $(te^x + 2x)x' + e^x = 0$

(β) $(x^3 + t)x' + (x - t^3) = 0$

(γ) $(x - t^2 + te^x)x' + (t - 2xt + e^x) = 0$

(δ) $(3t^2x^2 + \sin t)x' + (2tx^3 + x\cos t) = 0$

2. Να λυθούν οι Δ.Ε.

(α) $(t^2x - t)x' + x = 0$

(β) $x' = e^{2t} + x - 1$

(γ) $\left(\frac{t}{x} - \sin x\right)x' + 1 = 0$

(δ) $(3t^2 - x^2)x' - 2xt = 0$

3. Να βρεθούν όλες οι C^1 συναρτήσεις $\gamma : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ για τις οποίες η Δ.Ε.
$$\gamma(t) \cdot x' + x + t^2 = 0$$
(α) είναι πλήρης

(β) έχει πολλαπλασιαστή Euler την συνάρτηση $E(t,x) = t$.

(γ) Να επιλυθεί η Δ.Ε. για τις συναρτήσεις γ που προκύπτουν στα (α), (β)

4. Να βρεθεί $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $E(t,x) = e^{-\alpha t}\cos x$ να είναι πολλαπλασιαστής Euler της Δ.Ε.
$$x' + \frac{e^t + \sin x}{\cos x} = 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \, , \, x \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right)$$
και να λυθεί η Δ.Ε.

3. Γραμμικές Δ.Ε. 1ης τάξης

Μια Δ.Ε της μορφής
$$x' + f(t)x + g(t) = 0 \qquad (1)$$
όπου οι $f, g : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και το I ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$, λέγεται γραμμική Δ.Ε 1ης τάξης. Η (1) είναι της μορφής $P(t,x)x' + Q(t,x) = 0$, όπου $P(t,x) = 1$ και $Q(t,x) = f(t)x + g(t)$, αλλά εν γένει δεν είναι πλήρης αφού $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = f$. Όμως παρατηρούμε

ότι η $f = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right)$ είναι συνάρτηση μόνο του t. Σύμφωνα λοιπόν με την Πρόταση 2.3 (α) η συνάρτηση $E: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$E(t,x) = e^{\int f(t)dt}$$

είναι πολλαπλασιαστής του Euler για την (1). Η (1) τώρα γράφεται:

$$e^{\int f(t)dt} x'(t) + e^{\int f(t)dt} f(t)\, x(t) = -g(t)\, e^{\int f(t)dt} \iff$$

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)\, e^{\int f(t)dt}\right) = -g(t)\, e^{\int f(t)dt} \implies$$

$$x(t)\, e^{\int f(t)dt} = -\int g(t)\, e^{\int f(t)dt} + c \iff$$

$$x(t) = c\, e^{-\int f(t)dt} - e^{-\int f(t)dt}\int g(t)\, e^{\int f(t)dt}\, dt \quad , c \in \mathbb{R}.$$

3.1. Παρατήρηση Απ' το Θεώρημα Picard-Lindelöf I.2.4 προκύπτει ότι για την (1) ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων για τις αρχικές συνθήκες.

3.2. Παράδειγμα Η γραμμική Δ.Ε $x' + ax + g(t) = 0$, $a \in \mathbb{R}$ έχει πολλαπλασιαστή Euler $E(t,x) = e^{at}$ και η γενική λύση της είναι

$$x(t) = ce^{-at} - e^{-at}\int e^{at} g(t)\, dt, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3.3. Παράδειγμα Η γραμμική Δ.Ε $x' - 2tx - t = 0$ έχει πολλαπλασιαστή Euler $E(t,x) = e^{-t^2}$ και συνεπώς έχουμε:

$$e^{-t^2}\cdot x' - 2te^{-t^2}x = te^{-t^2} \implies \frac{d}{dt}\left(xe^{-t^2}\right) = te^{-t^2} \implies$$

$$xe^{-t^2} = \int te^{-t^2}dt + c \implies e^{-t^2}x = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + c \implies$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} ce^{t^2}, \; t \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι Δ.Ε.

(α) $tx' - x = t^3$ με αρχική συνθήκη $(1,-3)$

(β) $x' - \frac{2}{2-t^2}x = 3$ με αρχική συνθήκη $(-\frac{1}{2}, 1)$

(γ) $x' + \frac{2}{t}x = \frac{\cos t}{t^2}$ με αρχική συνθήκη $(\pi, 0)$

(δ) $tx' + 2x = \sin t$ με αρχική συνθήκη $(\frac{\pi}{2}, 1)$

2. Έστω $T>0$ και $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο T που είναι συνεχείς. Θεωρούμε τη Δ.Ε.

$$x' = f(t)x + g(t)$$

(α) Αποδείξτε, χωρίς να λύσετε τη Δ.Ε, ότι αν η $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι λύση της Δ.Ε τότε και η $\bar{\varphi}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\bar{\varphi}(t)=\varphi(t+T)$ είναι λύση.
(β) Χωρίς να λύσετε τη Δ.Ε δείξτε ότι μία λύση $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο T ακριβώς τότε όταν $\varphi(0)=\varphi(T)$.
(γ) Αν $R=\int_0^T f(t)\,dt \neq 0$, αποδείξτε ότι η Δ.Ε έχει μόνο μία περιοδική λύση με περίοδο T.

3. Στην Δ.Ε. $x'+f(t)x=g(t)$ οι $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς και $M=\inf\{f(t):t\in\mathbb{R}\}>0$, ενώ $\lim_{t\to+\infty} g(t)=0$. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$ για κάθε λύση φ της Δ.Ε.

4. Να βρεθούν όλες οι διαφορίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$\int_0^1 f(ts)\,ds = 2f(t) \quad \text{για κάθε } t\neq 0$$

4. Εισαγωγή νέων μεταβλητών

Μέσω της εισαγωγής νέων μεταβλητών μπορούμε σε ειδικές περιπτώσεις να μετασχηματίσουμε μία Δ.Ε σε μία ισοδύναμή της που ενδεχομένως έχει απλούστερη μορφή και λύνεται. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τρείς τέτοιες ειδικές περιπτώσεις.

4.1. Ομογενείς Δ.Ε. Η Δ.Ε

$$P(t,x)\,x' + Q(t,x) = 0 \tag{1}$$

όπου οι $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς, λέγεται ομογενής βαθμού k αν

$$P(\lambda t,\lambda x) = \lambda^k P(t,x), \quad Q(\lambda t,\lambda x)=\lambda^k Q(t,x)$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, $(t,x)\in\mathbb{R}^2$.

Αν η (1) είναι ομογενής τότε για $t \neq 0$ κάνουμε τον μετασχηματισμό $t=t$ και $x=ty$, οπότε $x' = y + ty'$ και η (1) γίνεται

$$t^k P(1,y)(y+ty') + t^k Q(1,y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{tP(1,y)} \left(Q(1,y) - y P(1,y) \right) \quad \text{για } t \neq 0$$

που είναι μία Δ.Ε χωριζομένων μεταβλητών.

<u>4.2. Παράδειγμα.</u> Η Δ.Ε

$$x' = \frac{2tx}{t^2+x^2} \qquad (2)$$

είναι ομογενής και για $t \neq 0$ γράφεται $x' = \dfrac{2\left(\frac{x}{t}\right)}{1+\left(\frac{x}{t}\right)^2}$. Έτσι κάνοντας τον μετασχηματισμό $x = ty$ έχουμε την Δ.Ε

$$y' = \frac{y(1-y^2)}{t(1+y^2)}, \quad t \neq 0 \qquad (3)$$

Η (3) έχει τις σταθερές λύσεις $y(t) = 0, \pm 1$, $t \neq 0$. Σ' αυτές αντιστοιχούν οι λύσεις $x(t) = 0$ και $x(t) = \pm t$, $t \neq 0$ της (2). Για $y(1-y^2) \neq 0$ έχουμε:

$$y' \frac{1+y^2}{y(1-y^2)} = \frac{1}{t} \Rightarrow \int \frac{1+y^2}{y(1-y^2)}\, dy = \int \frac{1}{t}\, dt \Rightarrow$$

$$\log\left|\frac{y}{1-y^2}\right| = \log|t| + c \Rightarrow \left|\frac{y}{1-y^2}\right| = c|t|, \quad t \neq 0, \quad c > 0.$$

Οι λύσεις της (2) με $x(t) \neq 0, \pm t$ για κάθε $t \neq 0$ δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση $c|t^2 - x^2| = |x|$, $t \neq 0$, $x \neq 0, \pm t$.

<u>4.3. Παράδειγμα</u> Μία Δ.Ε της μορφής

$$x' = f\left(\frac{ax+\beta t+\gamma}{\delta x+\varepsilon t+\zeta}\right) \qquad (4)$$

όπου η $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και το I ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ανάγεται σε μία ομογενή όταν $a\varepsilon - \beta\delta \neq 0$. Πράγματι τότε υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a\mu + \beta\lambda + \gamma = 0$$
$$\delta\mu + \varepsilon\lambda + \zeta = 0$$

Θέτουμε $s = t - \lambda$ και $y = x - \mu$. Η (4) τότε μετασχηματίζεται στην

$$y' = f\left(\frac{\alpha y + \beta s + \gamma + \alpha\mu + \beta\lambda}{\delta y + \varepsilon s + \zeta + \delta\mu + \varepsilon\lambda}\right) \Rightarrow \quad y' = f\left(\frac{\alpha y + \beta s}{\delta y + \varepsilon s}\right)$$

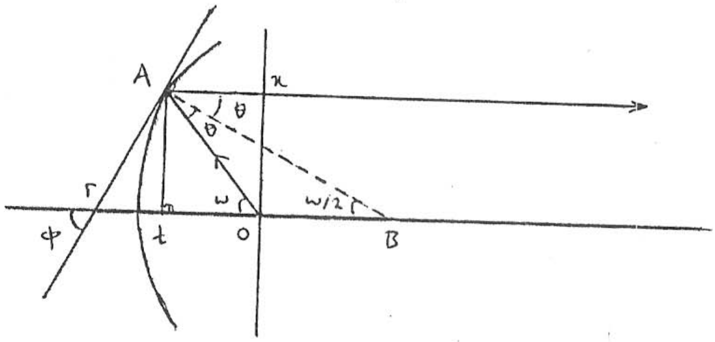
που είναι ομογενής. Κάνοντας λοιπόν τον μετασχηματισμό $y = sz$ για $s \neq 0$ ανάγομαστε στην Δ.Ε

$$z' = \frac{1}{s}\left(f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\delta z + \varepsilon}\right) - z\right)$$

που είναι χωριζομένων μεταβλητών.

4.4. Εφαρμογή. Το φως των φανών των αυτοκινήτων αξιοποιείται καλύτερα όταν η φωτεινή δέσμη που εκπέμπεται είναι κυλινδρική. Οι φωτεινές ακτίνες προέρχονται από μία φωτεινή πηγή (λαμπτήρα) που θεωρείται συγκεντρωμένη σ' ένα σημείο. Το ερώτημα που τίθεται είναι πώς πρέπει να είναι το σχήμα του κοίλου ανακλαστήρα ώστε η ανακλώμενη δέσμη να είναι παράλληλη.

Θεωρούμε μία επίπεδη τομή του κοίλου κατόπτρου και άξονες συντεταγμένων (t, x) με αρχή το σημείο του λαμπτήρα ώστε ο άξονας των t να είναι παράλληλος προς την ανακλώμενη δέσμη. Σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης του φωτός, η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα ΟΑ σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη ΒΑ στην εφαπτομένη στο κάτοπτρο ίση με τη γωνία που σχηματίζει η ανακλώμενη. Λόγω της παραλληλίας έχουμε $\omega = 2\theta$ (βλ. το σχήμα). Άρα $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \omega = \pi - 2\varphi$



$\Rightarrow \tan\omega = -\tan 2\varphi = \dfrac{-2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$, όπου $\tan\varphi = x'$. Προκειμένου οι ανακλώμενες ακτίνες να μην αποκλίνουν είναι αναγκαίο η φ να είναι οξεία. Αυτό σημαίνει ότι $x' = \tan\varphi > 0$. Από την άλλη μεριά $\tan\omega = \dfrac{x}{-t}$, οπότε

$$\frac{x}{-t} = -\frac{2x'}{1-(x')^2} \Rightarrow x(x')^2 + 2tx' - x = 0 \quad , \ t \neq 0 \ , x' \neq 1$$

Λύνοντας ως προς x' βρίσκουμε $x' = \dfrac{-t+\sqrt{t^2+x^2}}{x}$, αφού εξετάζουμε το μέρος του κατόπτρου με $x>0$. Κάνοντας τον μετασχηματισμό $x=ty$ ανάγόμαστε στην

$$y+ty' = \frac{-t+\sqrt{t^2+t^2y^2}}{ty} \Rightarrow \frac{-yy'}{\sqrt{1+y^2}+(1+y^2)} = \frac{1}{t}.$$

Θέτουμε $z=\sqrt{1+y^2}$ οπότε $z^2=1+y^2$ και $zz'=yy'$ και η Δ.Ε. γίνεται

$$-\frac{zz'}{z+z^2} = \frac{1}{t} \Rightarrow -\int \frac{z}{z+z^2}\,dz = \int \frac{1}{t}\,dt \Rightarrow$$

$$-\log|z+1| = \log|t| + c \Rightarrow z+1 = \frac{1}{ct} \Rightarrow z = \frac{ct-1}{ct}.$$

Άρα $1+\left(\frac{x}{t}\right)^2 = \dfrac{(ct-1)^2}{c^2t^2} \Rightarrow c^2x^2 = 1-2ct \Rightarrow x^2 = \dfrac{2}{c}t+\dfrac{1}{c^2}$.

Η εξίσωση αυτή παριστά μια παραβολή και επομένως αν το κάτοπτρο είναι συμμετρικό θα είναι παραβολοειδές εκ περιστροφής.

<u>§.5. Η Δ.Ε. του Bernulli</u> έχει τη μορφή

$$x' + f(t)x + g(t)x^k = 0 \qquad (5)$$

όπου $k\in \mathbb{R}-\{0,1\}$, οι $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και το I κάποιο ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$. Για την (5) ισχύει προφανώς το μονοσήμαντο των λύσεων ως προς τις αρχικές συνθήκες. Προκειμένου το x^k να είναι πραγματική συνάρτηση για κάθε $k\neq 0,1$, περιοριζόμαστε κατ' αρχήν σε $x>0$.

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $y=x^{1-k}>0$, οπότε $y'=(1-k)x^{-k}\cdot x'$. Έτσι η (5) μετασχηματίζεται στην

$$\frac{y'}{1-k}\,y^{\frac{k}{1-k}} + f(t)\,y^{\frac{1}{1-k}} + g(t)\,y^{\frac{k}{1-k}} = 0 \Rightarrow$$

$$y' + (1-k)f(t)y + (1-k)g(t) = 0 \qquad (6)$$

που είναι μια γραμμική Δ.Ε. 1ης τάξης με άγνωστη συνάρτηση y και λύνεται κατά τα γνωστά.

Όταν ο k είναι ακέραιος, τότε η (5) έχει έννοια για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή ορίζεται στο $I\times\mathbb{R}$. Μία λύση τότε είναι η σταθερή συνάρτηση $\varphi: I\to\mathbb{R}$ με $\varphi(t)=0$. Λόγω του μονοσημάντου των λύσεων οι υπόλοιπες λύσεις δεν μηδενίζονται πουθενά. Θεωρώντας $x\neq 0$ και επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη διαδικασία φτάνουμε πάλι στην (6).

4.6. Παράδειγμα Η Δ.Ε.

$$x' + 2tx - 2t^3x^3 = 0 \qquad (7)$$

είναι του τύπου του Bernulli και ορίζεται στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Μία προφανής λύση είναι η $x(t)=0$, $t\in\mathbb{R}$, που ικανοποιεί κάθε αρχική συνθήκη $(t_0,0)$, $t_0\in\mathbb{R}$. Για την εύρεση των υπόλοιπων λύσεων $x\neq 0$ κάνουμε τον μετασχηματισμό $y=x^{-2}$ και η (7) γίνεται

$$y' - 4ty + 4t^3 = 0 \qquad (8)$$

της οποίας η γενική λύση βρίσκεται ότι είναι η

$$y(t) = ce^{2t^2} + t^2 + \frac{1}{2} \quad , t\in\mathbb{R}$$

οπότε $\quad x(t) = \pm\left(ce^{2t^2}+t^2+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ για $t\in\mathbb{R}$ με $ce^{2t^2}+t^2+\frac{1}{2}>0$.

Το ερώτημα που τίθεται είναι ποιο πρόσημο θα διαλέξουμε. Αυτό εξαρτάται από την αρχική συνθήκη που θέλουμε η λύση να ικανοποιεί. Έτσι για την αρχική συνθήκη $(0,1)$ πρέπει $x(0)=1>0$, που σημαίνει ότι η αντίστοιχη λύση είναι η $x(t)=\left(\frac{1}{2}e^{2t^2}+t^2+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $t\in\mathbb{R}$ ενώ η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $(0,-1)$ είναι η $x(t)=-\left(\frac{1}{2}e^{2t^2}+t^2+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}$, $t\in\mathbb{R}$.

4.7. Η ΔΕ. του Ricatti έχει τη μορφή

$$x' = f(t)x^2 + g(t)x + h(t) \qquad (9)$$

όπου η $f,g,h: I\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και το I ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Για την (9) ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων. Για την εύρεση όλων των λύσεων της (9) είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε μια τουλάχιστο ειδική λύση της.

Έστω $\varphi: I\to\mathbb{R}$ μια ειδική λύση της (9) και αναζητούμε τις υπόλοιπες λύσεις $x \neq \varphi$. Θέτουμε $x = \varphi + \frac{1}{y}$, όπου η y είναι η προσδιοριστέα συνάρτηση με $y(t) \neq 0$ για $t \in A$, όπου το A είναι κάποιο υποδιάστημα του I. Τότε έχουμε $x' = \varphi' - \frac{y'}{y^2}$ και η (9) γίνεται

$$\varphi' - \frac{y'}{y^2} = f\left(\varphi + \frac{1}{y}\right)^2 + g\left(\varphi + \frac{1}{y}\right) + h \Rightarrow$$

$$y' + (2f(t)\varphi(t) + g(t))y + f(t) = 0 \tag{10}$$

που είναι μία γραμμική Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης.

<u>4.8. Παράδειγμα.</u> Η Δ.Ε.

$$x' = x^2 - (2t+1)x + (1+t+t^2) \tag{11}$$

ορίζεται στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ και είναι της μορφής του Ricatti. Μία ειδική λύση της (11) είναι η $\varphi(t) = t$, $t\in\mathbb{R}$. Θέτουμε $x = \varphi + \frac{1}{y}$ και καταλήγουμε στη γραμμική Δ.Ε

$$y' - y + 1 = 0 \tag{12}$$

που έχει γενική λύση $y(t) = 1 + ce^t$, $t\in\mathbb{R}$. Αν $c \geq 0$, τότε $y(t) > 0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$ και η αντίστοιχη λύση της (11) είναι η $x(t) = \frac{1}{1+ce^t} + t$, $t\in\mathbb{R}$. Αν $c<0$ τότε η y ορίζει δύο λύσεις $x_1 : (-\infty, \log(-\frac{1}{c})) \to \mathbb{R}$ και $x_2 : (\log(-\frac{1}{c}), +\infty) \to \mathbb{R}$ της (11) με τον ίδιο τύπο $x_i(t) = \frac{1}{1+ce^t} + t$, $i = 1, 2$.

<u>4.9. Παρατήρηση.</u> Όπως είναι γνωστό η γενική λύση της (10) είναι της μορφής $y(t) = \alpha(t) + c\beta(t)$, $t\in I$, όπου $\beta(t) \neq 0$ για κάθε $t\in I$. Έστω τώρα $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,4$ και $y_i(t) = \alpha(t) + c_i\beta(t) \neq 0$ για κάθε $t\in A$, όπου το A είναι υποδιάστημα του I, $i = 1,2,3,4$. Τότε έχουμε τις αντίστοιχες λύσεις της (9)

$$x_i(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\alpha_i(t) + c_i\beta(t)} = \frac{(\alpha(t)\varphi(t) + 1) + c_i\beta(t)\varphi(t)}{\alpha(t) + c_i\beta(t)}$$

από όπου προκύπτει ότι $\frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{c_4 - c_1}{c_4 - c_2} : \frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2} = c$, σταθερό.

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι αν γνωρίζουμε τρεις λύσεις $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ της εξίσωσης του Riccati τότε κάθε άλλη λύση x με κοινό πεδίο ορισμού με τις προηγούμενες τρεις βρίσκεται χωρίς ολοκλήρωση από την εξίσωση

$$\frac{x-\varphi_1}{x-\varphi_2} : \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varphi_3-\varphi_2} = c$$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι Δ.Ε.

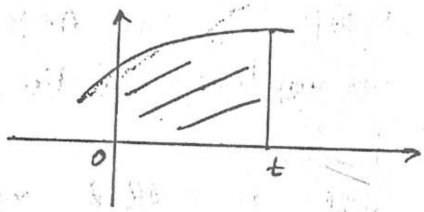
(α) $x' = \dfrac{4x-3t}{2t-x}$ (β) $\left(t - x\cos\frac{x}{t}\right) + x'\left(t\cos\frac{x}{t}\right) = 0$

(γ) $(2\sqrt{xt} - t)x' + x = 0$ (δ) $x' = \log x - \log t + \dfrac{x+t}{x-t}$

(ε) $x' = \dfrac{x+t-4}{x+t-6}$ (ζ) $x' = \dfrac{2x+t-4}{x-t}$

(η) $(2t-x+4)x' = 2x-t-5$ (θ) $(x+t+1) + (2x+3t+3)x' = 0$

2. Να βρεθούν όλες οι διαφορίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Το εμβαδόν του πεδίου που περικλείεται από τους άξονες, το γράφημα της f και την παράλληλη στον κάθετο άξονα στο σημείο $(t,0)$ ισούται με τον λόγο $\dfrac{t^3}{f(t)}$.



3. Να λυθούν οι Δ.Ε.

(α) $tx' - x = x^2 \log t$ (β) $x' + x = tx^3$

(γ) $x' + (\tan t)x - x^2 = 0$ (δ) $tx' + 1 = e^x$

4. Να λυθούν οι παρακάτω Δ.Ε. γνωστού όντος ότι δέχονται μία ειδική λύση φ της μορφής $\varphi(t) = \dfrac{a}{t}$, $t \neq 0$, όπου το a είναι σε κάθε περίπτωση προσδιοριστέος πραγματικός αριθμός.

(α) $t^2x' = t^2x^2 + tx + 1$ (β) $4x' + x^2 + \dfrac{4}{t^2} = 0$ (γ) $x' + x^2 = \dfrac{2}{t^2}$

5. Να αποδειχθεί ότι αν μιας εξίσωσης του Riccatti

$$x' = f(t)x^2 + g(t)x + h(t) \quad , \quad t \in I$$

είναι γνωστές δύο λύσεις $\varphi_1, \varphi_2 : A \to \mathbb{R}$, όπου A είναι κάποιο υποδιάστημα του I, τότε κάθε άλλη λύση $\varphi : A \to \mathbb{R}$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\varphi(t) - \varphi_1(t)}{\varphi(t) - \varphi_2(t)} = c\, e^{\int_{t_0}^{t} f(s)(\varphi_1(s) - \varphi_2(s))\,ds} \quad , \quad c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά}$$

όπου $t_0 \in A$.

6. Να λυθεί η Δ.Ε. $x' + x^2 = \frac{1}{t^4}$, $t \neq 0$. (Υπόδειξη: Αναζητείστε ειδικές λύσεις της μορφής $\varphi(t) = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2}$).

ΙΙΙ. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Ορισμοί και ύπαρξη λύσεων

Μία n-διάστατη διανυσματική Δ.Ε. $1^{ης}$-τάξης λέγεται γραμμική (ή σύστημα n γραμμικών Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης) άν έχει τη μορφή

$$x' = A(t)x + B(t) \qquad (1)$$

με ζητούμενη συνάρτηση $x = (x_1, \dots, x_n)$, όπου οι συναρτήσεις $A: I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$, $B: I \longrightarrow \mathbb{R}^{1\times n} \cong \mathbb{R}^n$ είναι συνεχείς και το I ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$.

Για $n=1$ η (1) είναι μια μονοδιάστατη γραμμική Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης την οποία έχουμε ήδη λύσει πλήρως στην παράγραφο ΙΙ.3.

Μία n-τάξης (μονοδιάστατη) γραμμική Δ.Ε έχει τη μορφή

$$x^{(n)} = a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x + \beta(t) \qquad (2)$$

όπου οι $a_i, \beta: I \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, είναι συνεχείς. Σύμφωνα με την διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο Ι.1, η (2) είναι ισοδύναμη με την n-διάστατη Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & \dots & a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

όπου $x_1 = x$.

Η γραμμική Δ.Ε.

$$x' = A(t)x \qquad (4)$$

λέγεται ομογενής. Η (4) είναι η αντίστοιχη ομογενής της (1).

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του κεφαλαίου Ι, η (1) είναι Δ.Ε λυμένης μορφής $x' = f(t,x)$, όπου η $f: I\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ έχει τύπο $f(t,x) = A(t)x + B(t)$. Επειδή υποθέτουμε ότι οι A, B είναι συνεχείς στο I, η f είναι συνεχής και ικανοποιεί τοπικά μια συνθήκη Lipschitz (ως προς τη δεύτερη μεταβλητή) στο $I\times\mathbb{R}^n$. Έτσι από το Θεώρημα Picard-Lindelöf, για κάθε αρχική συνθήκη $(t_0, x_0) \in I\times\mathbb{R}^n$ υπάρχει $r>0$ και μια μονοσήμαντα ορισμένη λύση $\varphi: [t_0-r, t_0+r] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ που την ικανοποιεί. Η φ επεκτείνεται μονοσήμαντα σ' ένα μέγιστο ανοιχτό υποδιάστημα $J\subset I$, σύμφωνα με την Πρόταση I.2.6. Αποδεικνύεται ότι $J=I$. (Για την απόδειξη, που δεν θα δοθεί εδώ, παραπέμπουμε στο βιβλίο T. Apostol, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Τόμος 2, παράγραφοι 9.7 και 9.10). Συνοψίζοντας,

<u>1.1. Πρόταση.</u> Για κάθε $(t_0, x_0)\in I\times\mathbb{R}^n$ υπάρχει μία και μοναδική λύση $\varphi: I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ με αρχική συνθήκη (t_0, x_0)

Παρατηρούμε ότι αν $\lambda\in\mathbb{R}$ και ψ_1, ψ_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε (4) τότε και οι $\lambda\psi_1$, $\psi_1+\psi_2$ είναι λύσεις της (4). Επομένως, το σύνολο Λ όλων των λύσεων της (4) είναι διανυσματικός υπόχωρος του χώρου $C^1(I,\mathbb{R}^n)$ όλων των C^1 διαφορίσιμων συναρτήσεων του I στο $\mathbb{R}^n$, με μηδενικό στοιχείο τη σταθερή λύση $\psi_0(t)=0\in\mathbb{R}^n$, $t\in I$.

Απ' την άλλη μεριά, αν φ είναι μία λύση της μη-ομογενούς Δ.Ε (1) και ψ μία λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4), τότε η $\varphi+\psi$ είναι λύση της (1); αφού

$$(\varphi+\psi)'(t) = A(t)\varphi(t)+B(t) + A(t)\psi(t) = A(t)(\varphi+\psi)(t) + B(t) \quad , t\in I,$$

ενώ αν φ_1, φ_2 είναι δυο λύσεις της (1) τότε η $\varphi_1-\varphi_2$ είναι λύση της (4). Δηλαδή, το σύνολο των λύσεων της (1) είναι το σύμπλοκο $\varphi+\Lambda$ του Λ στο $C^1(I,\mathbb{R}^n)$, όπου φ είναι <u>κάποια</u> λύση της (1). Με άλλα λόγια, η γενική λύση της (1) είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε (4) και μιας ειδικής λύσης της (1).

Η επίλυση της μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε (1) ανάγεται σύμφωνα με τα παραπάνω στην επίλυση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε (4) και στην εύρεση μιας ειδικής λύσης της (1). Προκειμένου να λύσουμε την (4) αρκεί να βρούμε μία βάση S του χώρου των λύσεων Λ. Τότε κάθε λύση ψ της (4) θα έχει την μορφή $\psi=\sum_{i=1}^{k} c_i\psi_i$, όπου $\psi_1,\dots,\psi_k\in S$, $c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}$. Αν με κάποια μέθοδο κατασκευάσουμε <u>κάποια</u> λύση φ_0 της (1), τότε κάθε λύση της (1) θα έχει τη μορφή $\varphi=\varphi_0+\sum_{i=1}^{k} c_i\psi_i$.

2. Ομογενείς Γραμμικές Δ.Ε.

Θεωρούμε την (διανυσματική) ομογενή γραμμική Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης

$$x' = A(t)x \qquad (1)$$

με ζητούμενη συνάρτηση $x = (x_1, \dots, x_n)$, όπου η $A : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συνεχής και το I ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Όπως διαπιστώθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, το σύνολο Λ όλων των λύσεων της (1) είναι διανυσματικός υπόχωρος του $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

2.1. Πρόταση Ο χώρος Λ έχει διάσταση n, δηλαδή $\dim\Lambda = n$

Απόδειξη. Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και $t_0 \in I$. Για κάθε $1 \le i \le n$, υπάρχει ακριβώς μια λύση $\varphi_i : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ της (1) με αρχική συνθήκη (t_0, e_i), σύμφωνα με την πρόταση 1.1. Θα δείξουμε ότι το $S = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ είναι βάση του Λ. Κατ' αρχήν το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο γιατί αν $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\mu_1\varphi_1(t) + \dots + \mu_n\varphi_n(t) = 0$ για κάθε $t \in I$, τότε για $t = t_0$ παίρνουμε $\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n = 0$ και συνεπώς $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$. Από την άλλη μεριά, το S παράγει τον Λ. Αν φ είναι μια οποιαδήποτε λύση της (1), υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\varphi(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $\psi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι λύση της (1) με αρχική συνθήκη $(t_0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = (t_0, \varphi(t_0))$. Από το μονοσήμαντο των λύσεων έχουμε $\varphi = \psi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$.

2.2. Πρόταση. Οι λύσεις $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ αποτελούν βάση στο χώρο των λύσεων Λ τότε και μόνον τότε αν για κάποιο $t_0 \in I$ τα $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω ότι για κάποιο $t_0 \in I$ τα $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν ώστε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(t_0) = 0$. Η συνάρτηση $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι λύση της (1) με αρχική συνθήκη $(t_0, 0)$. Από το μονοσήμαντο των λύσεων προκύπτει ότι $\sum \lambda_i \varphi_i = 0$, που σημαίνει ότι οι $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Αυτό αποδεικνύει το ευθύ ενώ το αντίστροφο είναι προφανές.

Όπως είναι γνωστό τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (και επομένως αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$) τότε και μόνον τότε όταν η ορίζουσα με στήλες τις συντεταγμένες τους δεν είναι μηδέν. Έτσι έχουμε:

<u>2.3. Πόρισμα</u> Οι λύσεις $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ της (1) αποτελούν βάση του χώρου των λύσεων τότε και μόνον τότε όταν η ορίζουσα

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{21}(t) & \dots & \varphi_{n1}(t) \\ \varphi_{12}(t) & \varphi_{22}(t) & \dots & \varphi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1n}(t) & \varphi_{2n}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

δεν μηδενίζεται για <u>κάποιο</u> (και συνεπώς για κάθε) $t \in I$, όπου $\varphi_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in})$, $1 \leq i \leq n$.

Η ορίζουσα $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ λέγεται ορίζουσα του Wronski των $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Σύμφωνα λοιπόν με τα προηγούμενα, είτε $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) = 0$ για κάθε $t \in I$ οπότε οι λύσεις $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ θα είναι γραμμικά εξαρτημένες είτε $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$ οπότε οι $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ θ' αποτελούν βάση του χώρου των λύσεων.

Η ορίζουσα του Wronski είναι δυνατόν να υπολογιστεί ακόμα και όταν δεν είναι από πριν γνωστές όλες οι λύσεις. Αυτό μας επιτρέπει, όπως θα δούμε παρακάτω, να λύσουμε πλήρως μια δισδιάστατη ομογενή γραμμική Δ.Ε αν είναι γνωστή μόνο μια μη-μηδενική λύση της. Θα χρειαστούμε το επόμενο:

<u>2.4 Λήμμα.</u> Έστω I ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $\varphi_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ C^1 διαφορίσιμες συναρτήσεις. Η συνάρτηση $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ με $g(t) = \det(\varphi_{ij}(t))$ είναι C^1 διαφορίσιμη και $g'(t) = g_1(t) + \dots + g_n(t)$, όπου $g_i(t)$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την $g(t)$ αν τα στοιχεία της i-γραμμής αντικατασταθούν από τις παραγώγους τους.

<u>Απόδειξη</u> Κάνουμε επαγωγή στο n. Για $n=1$ το συμπέρασμα είναι τετριμμένο. Έστω ότι το συμπέρασμα ισχύει για $n = k-1$. Για $n = k$ έχουμε

$$g = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \dots & \varphi_{k1} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \dots & \varphi_{kk} \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$g=\varphi_{11}\begin{vmatrix}\varphi_{22} & \varphi_{32} & \cdots & \varphi_{k2}\\ \varphi_{23} & \varphi_{33} & \cdots & \varphi_{k3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{2k} & \varphi_{3k} & \cdots & \varphi_{kk}\end{vmatrix}-\varphi_{21}\begin{vmatrix}\varphi_{12} & \varphi_{32} & \cdots & \varphi_{k2}\\ \varphi_{13} & \varphi_{33} & \cdots & \varphi_{k3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1k} & \varphi_{3k} & \cdots & \varphi_{kk}\end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{k+1}\varphi_{k1}\begin{vmatrix}\varphi_{12} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{k-1,2}\\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \cdots & \varphi_{k-1,3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \cdots & \varphi_{k-1,k}\end{vmatrix}$$

Από τον κανόνα παραγώγισης του Leibniz και την υπόθεση της επαγωγής

$$g'=\varphi_{11}'\begin{vmatrix}\varphi_{22} & \varphi_{32} & \cdots & \varphi_{k2}\\ \varphi_{23} & \varphi_{33} & \cdots & \varphi_{k3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{2k} & \varphi_{3k} & \cdots & \varphi_{kk}\end{vmatrix}-\varphi_{21}'\begin{vmatrix}\varphi_{12} & \varphi_{32} & \cdots & \varphi_{k2}\\ \varphi_{13} & \varphi_{33} & \cdots & \varphi_{k3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1k} & \varphi_{3k} & \cdots & \varphi_{kk}\end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{k+1}\varphi_{k1}'\begin{vmatrix}\varphi_{12} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{k-1,2}\\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \cdots & \varphi_{k-1,3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \cdots & \varphi_{k-1,k}\end{vmatrix}+$$

$$+\varphi_{11}\left(\sum_{i=2}^{k}\begin{vmatrix}\varphi_{22} & \varphi_{32} & \cdots & \varphi_{k2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{2i}' & \varphi_{3i}' & \cdots & \varphi_{ki}'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{2k} & \varphi_{3k} & \cdots & \varphi_{kk}\end{vmatrix}\right)-\varphi_{21}\left(\sum_{i=2}^{k}\begin{vmatrix}\varphi_{12} & \varphi_{32} & \cdots & \varphi_{k2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1i}' & \varphi_{3i}' & \cdots & \varphi_{ki}'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1k} & \varphi_{3k} & \cdots & \varphi_{kk}\end{vmatrix}\right)+\cdots+(-1)^{k+1}\varphi_{k1}\left(\sum_{i=2}^{k}\begin{vmatrix}\varphi_{12} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{k-1,2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1i}' & \varphi_{2i}' & \cdots & \varphi_{k-1,i}'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \cdots & \varphi_{k-1,k}\end{vmatrix}\right)=$$

$$=g_1+\sum_{i=2}^{k}\left(\varphi_{11}\begin{vmatrix}\varphi_{22} & \varphi_{32} & \cdots & \varphi_{k2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{2i}' & \varphi_{3i}' & \cdots & \varphi_{ki}'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{2k} & \varphi_{3k} & \cdots & \varphi_{kk}\end{vmatrix}-\varphi_{21}\begin{vmatrix}\varphi_{12} & \varphi_{32} & \cdots & \varphi_{k2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1i}' & \varphi_{3i}' & \cdots & \varphi_{ki}'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1k} & \varphi_{3k} & \cdots & \varphi_{kk}\end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{k+1}\varphi_{k1}\begin{vmatrix}\varphi_{12} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{k-1,2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1i}' & \varphi_{2i}' & \cdots & \varphi_{k-1,i}'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \cdots & \varphi_{k-1,k}\end{vmatrix}\right)$$

$$=g_1+\sum_{i=2}^{k}g_i \quad \text{ο.ε.δ.}$$

2.5 Θεώρημα (Τύπος του Liouville) Αν W είναι η ορίζουσα του Wronski των λύσεων $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. (1) και $t_0\in I$ τότε

$$W(t)=W(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}A(s)\,ds \quad \text{για κάθε } t\in I.$$

Απόδειξη Επειδή οι λύσεις $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ είναι C^1 διαφορίσιμες συναρτήσεις, η συνάρτηση $W: I\to\mathbb{R}$ είναι C^1 διαφορίσιμη και έχει παράγωγο $W'=W_1+\dots+W_n$, όπου W_i είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την W αν τα στοιχεία της i-γραμμής αντικατασταθούν από τις παραγώγους τους, σύμφωνα με το Λήμμα 2.4. Αν $\varphi_i=(\varphi_{i1},\dots,\varphi_{in})$, $1\le i\le n$ τότε

$$W=\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{n1}\\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1n} & \varphi_{2n} & \cdots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}, \quad W_i=\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1i}' & \varphi_{2i}' & \cdots & \varphi_{ni}'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1n} & \varphi_{2n} & \cdots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}, \quad 1\le i\le n$$

Επειδή κάθε φ_i είναι λύση της (1) έχουμε $\varphi_{ij}'=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\varphi_{ik}$ όπου $A=(a_{ij})$. Αντικαθιστώντας λοιπόν έχουμε:

$$W_i=\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\varphi_{1k} & \cdots & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\varphi_{nk}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1n} & \varphi_{2n} & \cdots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \cdots & \varphi_{nk}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1n} & \varphi_{2n} & \cdots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}=a_{ii}W$$

Έτσι $W' = W_1 + \cdots + W_n = a_{11}W + a_{22}W + \cdots + a_{nn}W = (\mathrm{Tr}A)\cdot W$. Επομένως η συνάρτηση W είναι λύση της Δ.Ε. $x' = (\mathrm{Tr}A(t))x$ που είναι χωριζομένων μεταβλητών και έχει ως γνωστό λύση

$$W(t) = W(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}A(s)\,ds$$

<u>2.6. Παράδειγμα</u> Η 2-διάστατη γραμμική Δ.Ε.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad t>0 \qquad (2)$$

είναι ομογενής με μία προφανή λύση την $\varphi_1(t) = (t, -t)$, $t>0$.
Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Liouville θα κατασκευάσουμε μία βάση $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ του χώρου των λύσεων, ένα στοιχείο της οποίας είναι η φ_1. Αναζητούμε λοιπόν μία λύση $\varphi_2(t) = (x(t), y(t))$, $t>0$ ώστε

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & x(t) \\ -t & y(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{για κάποιο } t>0.$$

Επειδή $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ απαιτούμε η φ_2 να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $(1, (1,1))$, δηλαδή $x(1)=1$, $y(1)=1$. Από τον τύπο του Liouville υπολογίζουμε:

$$W(t) = W(1)\exp\int_1^t 0\,ds = W(1) = 2 \quad \text{για κάθε } t>0$$

Άρα $ty + tx = 2$ για κάθε $t>0$. Επειδή η $\varphi_2 = (x,y)$ είναι λύση της (2), έχουμε $y = -tx'$. Αντικαθιστώντας φτάνουμε στην

$$x' - \frac{1}{t}x + \frac{2}{t^2} = 0 \qquad (3)$$

που είναι γραμμική Δ.Ε 1ης τάξης. Η λύση της (3) με αρχική συνθήκη $x(1)=1$ είναι η $x(t) = \frac{1}{t}$. Όμοια βρίσκουμε $y(t) = \frac{1}{t}$. Επομένως η $\varphi_2(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right)$, $t>0$ είναι λύση της (2) και το $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ είναι βάση του χώρου των λύσεων. Κάθε άλλη λύση φ δίνεται από το τύπο

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 t + \frac{c_2}{t} \\ -c_1 t + \frac{c_2}{t} \end{pmatrix}, \quad t>0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ σταθερές}.$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιώντας τον τύπο του Liouville και μία γνωστή λύση καταφέραμε να ανάγουμε την 2-διάστατη Δ.Ε (2) στην μονοδιάστατη Δ.Ε. 1ης τάξης (μ' έναν άγνωστο) (3). Ο υποβιβασμός της τάξης μιας ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. είναι μιά γενικότερη διαδικασία.

<u>2.7. Πρόταση.</u> Εστω ότι γνωρίζουμε τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ της n-διάστατης ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. (1). Τότε η (1) ανάγεται σε μία (n-m)-διάστατη ομογενή γραμμική Δ.Ε.

<u>Απόδειξη</u> Εστω $t_0 \in I$. Επειδή οι $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τα διανύσματα $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_m(t_0)$ συμπληρώνονται σε μία βάση

$$\{\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_m(t_0), v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την C^1 διαφορίσιμη συνάρτηση $\delta: I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\delta(t) = \det(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_m(t_0), v_{m+1}, \dots, v_n)$$

Δηλαδή το $\delta(t)$ είναι η ορίζουσα του πίνακα $M(t)$ με στήλες τις συντεταγμένες των $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_m(t_0), v_{m+1}, \dots, v_n$. Τότε έχουμε $\delta(t_0) \neq 0$ και επειδή η δ είναι συνεχής, υπάρχει ενα υποδιάστημα J του I που περιέχει το t_0 ώστε $\delta(t) \neq 0$ γιά κάθε $t \in J$. Αυτό σημαίνει ότι ο $M(t)$ είναι αναστρέψιμος γιά κάθε $t \in J$. Κάνουμε τώρα τον μετασχηματισμό $y(t) = M(t)^{-1} x(t)$, οπότε $x'(t) = M'(t) y(t) + M(t) y'(t)$ και αντικαθιστώντας στην (1)

$$M'y + My' = AMy \quad \Rightarrow$$

$$y' = M^{-1}(AM - M')y \qquad (4)$$

Οι σταθερές συναρτήσεις $\psi_i : J \to \mathbb{R}^n$ με $\psi_i(t) = e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$ είναι λύσεις της (4), γιατί οι $\varphi_i(t) = M(t) e_i$ είναι λύσεις της (1). Αυτό σημαίνει ότι άν $M^{-1}(AM - M') = (\mu_{ij})$ τότε

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_i'(t) = (\mu_{ij}(t)) e_i = \begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \vdots \\ \mu_{in} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq m$$

Δηλαδή οι m-πρώτες στήλες του $M^{-1}(AM - M')$ είναι μηδενικές. Η (4) λοιπόν είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \\ y_{m+1}' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{m+1,1}(t) y_{m+1} + \dots + \mu_{n,1}(t) y_n \\ \dots \\ \mu_{m+1,m}(t) y_{m+1} + \dots + \mu_{n,m}(t) y_n \\ \mu_{m+1,m+1}(t) y_{m+1} + \dots + \mu_{n,m+1}(t) y_n \\ \dots \\ \mu_{m+1,n}(t) y_{m+1} + \dots + \mu_{n,n}(t) y_n \end{pmatrix}$$

δηλαδή οι m πρώτες Δ.Ε δεν περιέχουν στο δεύτερο μέλος τις άγνωστες συναρτήσεις y_i, $1 \le i \le m$ και συνεπώς λύνονται με απλή ολοκλήρωση, αν μπορέσουμε να λύσουμε προηγουμένως την $(n-m)$-διάστατη ομογενή γραμμική Δ.Ε που ορίζεται από τις $(n-m)$ τελευταίες εξισώσεις.

<u>Ασκήσεις</u>

1. Να λυθεί η Δ.Ε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \frac{2}{t} \\ -\frac{1}{t} & -\frac{5}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad t>0$$

γνωστού όντος ότι η $\varphi(t) = \left(\frac{2}{t^3}, -\frac{1}{t^3}\right)$, $t>0$ είναι λύση της.

2. Να λυθεί η Δ.Ε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t(t^2+1)} & \frac{1}{t^2(t^2+1)} \\ -\frac{t^2}{t^2+1} & \frac{2t^2+1}{t(t^2+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad t>0$$

γνωστού όντος ότι η συνάρτηση $\varphi(t) = (1, t)$, $t>0$ είναι μία λύση της.

3. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ -g(t) & f(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

όπου οι $f, g : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και το I ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ (Υπόδειξη: Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $u = x \exp\left(-\int f(t)dt\right)$, $v = y \exp\left(-\int f(t)dt\right)$ οπότε η δοσμένη Δ.Ε μετασχηματίζεται στην

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g(t) \\ -g(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

που έχει την προφανή λύση $\varphi(t) = \left(\sin \int g(t)dt, \cos \int g(t)dt\right)$, $t \in I$)

<u>3. Μη-ομογενείς γραμμικές Δ.Ε και η μέθοδος Lagrange.</u>

Ασχολούμαστε τώρα στην επίλυση της μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε.

$$x' = A(t)x + B(t) \tag{1}$$

όπου οι $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $B : I \to \mathbb{R}^{1 \times n}$ είναι συνεχείς και το I ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$, όταν γνωρίζουμε μία βάση $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ του χώρου των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε

$$x' = A(t)x \qquad (2)$$

Όπως διαπιστώσαμε στην παράγραφο 1 του παρόντος κεφαλαίου αρκεί να βρούμε μία ειδική λύση φ_0 της μη-ομογενούς Δ.Ε. (1). Τότε η γενική λύση της (1) έχει τη μορφή $\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$..

Η μέθοδος Lagrange που θα περιγράψουμε παρακάτω συνίσταται στο να αναζητήσουμε λύση της (1) με τύπο $\varphi_0(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\varphi_i(t)$, $t \in I$, όπου οι C^1 διαφορίσιμες συναρτήσεις $u_i : I \to \mathbb{R}$ πρέπει να προσδιοριστούν κατάλληλα. Γι αυτό το λόγο η μέθοδος λέγεται και μέθοδος της μεταβολής των σταθερών. και επιτρέπει πάντα όπως θα δούμε να βρεθεί η γενική λύση της (1) όταν είναι γνωστή μια βάση του χώρου των λύσεων της (2).

Αναζητούμε λοιπόν C^1 διαφορίσιμες συναρτήσεις $u_i : I \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$ ώστε η $\varphi_0 = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i$ να είναι λύση της (1), δηλαδή

$$\varphi_0' = \sum_{i=1}^{n} u_i' \varphi_i + \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i' = A(t)\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i\right) + B(t)$$

Αλλά $\varphi_i' = A(t)\varphi_i$, οπότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} u_i' \varphi_i + \sum_{i=1}^{n} u_i A(t)\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} u_i A(t)\varphi_i + B(t) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i' \varphi_i = B(t)$$

Έτσι αν $\varphi_i = (\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{in})$ και $B = (B_1, \dots, B_n)$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{n1} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{1n} & \varphi_{2n} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Επειδή $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \det(\varphi_{ij}) \neq 0$ το γραμμικό σύστημα (3) με αγνώστους $u_1', \dots, u_n'$ έχει μία και μοναδική λύση, την

$$u_i'(t) = \frac{B_i(t)}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t)}, \quad t \in I, \quad 1 \le i \le n$$

όπου $B_i(t)$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την ορίζουσα του Wronski $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ αν τα στοιχεία της i-στήλης αντικατασταθούν από την στήλη $B(t)$.

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$u_i(t) = \int \frac{B_i(t)}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t)}\, dt, \quad 1 \le i \le n$$

Συνεπώς μια ειδική λύση της μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. (1) είναι

$$\varphi_0(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\int \frac{B_i(t)}{W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t)}\,dt\right)\varphi_i(t) \quad , t\in I$$

και η γενική λύση της (1) δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\int \frac{B_i(t)}{W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t)}\,dt + c_i\right)\varphi_i(t) \quad , t\in I$$

όπου $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ σταθερές.

<u>3.1 Παράδειγμα</u> Η 2-διάστατη μη-ομογενής γραμμική Δ.Ε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad , t\in\mathbb{R} \qquad (6)$$

έχει αντίστοιχη ομογενή την

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , t\in\mathbb{R} \qquad (7)$$

της οποίας δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{pmatrix} \quad , t\in\mathbb{R}$$

με ορίζουσα του Wronski $W(\varphi_1,\varphi_2)(t) = 4e^{2t}$.

Αναζητούμε λοιπόν μια ειδική λύση φ_0 της (6) της μορφής $\varphi_0(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + u_2(t)\varphi_2(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$\begin{pmatrix} 2e^{7t} & -2e^{-5t} \\ e^{7t} & e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

που λύνεται ως προς u_1', u_2' με λύσεις

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \sin t & 2e^{-5t} \\ \cos t & e^{-5t} \end{vmatrix}}{4e^{2t}} = \frac{1}{4}e^{-7t}(\sin t + 2\cos t)$$

$$u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 2e^{7t} & \sin t \\ e^{7t} & \cos t \end{vmatrix}}{4e^{2t}} = \frac{1}{4}e^{5t}(2\cos t - \sin t) \quad , \text{ οπότε}$$

$$u_1(t) = \int \frac{1}{4}e^{-7t}(\sin t + 2\cos t)\,dt = -\frac{e^{-7t}}{40}(\sin t + 3\cos t)$$

$$u_2(t) = \int \frac{1}{4}e^{5t}(2\cos t - \sin t)\,dt = \frac{e^{5t}}{104}(11\cos t - 3\sin t)$$

Επομένως η γενική λύση της (6) είναι $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \varphi_0 = (u_1+c_1)\varphi_1 + (u_2+c_2)\varphi_2$ όπου τα u_1, u_2 δίνονται από τους παραπάνω τύπους και οι $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές.

Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι Δ.Ε.

(α) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \frac{2}{t} \\ -\frac{1}{t} & -\frac{5}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad t>0$$

(β) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t(t^2+1)} & \frac{1}{t^2(t^2+1)} \\ -\frac{t^2}{t^2+1} & \frac{2t^2+1}{t(t^2+1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t>0$$

(γ) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ -2t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

4. Γραμμικές Δ.Ε. ανώτερης τάξης

Οι μέθοδοι των προηγουμένων παραγράφων εφαρμόζονται αμέσως στην μελέτη της μονοδιάστατης γραμμικής Δ.Ε. n-τάξης

$$x^{(n)} = a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x + \beta(t) \qquad (1)$$

όπου οι $a_i, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς, $1\le i\le n$, και το I ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$.

Η αντίστοιχη ομογενής της (2) είναι η

$$x^{(n)} = a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x \qquad (2)$$

Όπως ξέρουμε η (1) ισοδυναμεί με την n-διάστατη Δ.Ε. 1ης τάξης

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B(t) \qquad (3)$$

όπου $x_1 = x$ και

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & \cdots & a_1(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

με αντίστοιχη ομογενή την

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

που ισοδυναμεί στην (2). Έτσι το σύνολο των λύσεων της (2) είναι ένας διανυσματικός χώρος Λ με διάσταση n. Ένα σύνολο λύσεων $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ της (2) είναι βάση του Λ τότε και μόνον τότε όταν το αντίστοιχο σύνολο λύσεων

$$\left\{ \Phi_i = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \varphi_i' \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad : \quad 1 \leq i \leq n \right\}$$

της (4) είναι βάση του χώρου των λύσεων. Τότε κάθε λύση της (2) γράφεται $\varphi = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Αν οι $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ είναι λύσεις της (2) τότε η ορίζουσα του Wronski $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ είναι (εξ ορισμού) η ορίζουσα του Wronski των αντίστοιχων λύσεων $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ της (4), δηλαδή

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Το σύνολο λύσεων $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο τότε και μόνον τότε όταν $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$ για κάποιο (και συνεπώς για κάθε) $t \in I$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $\operatorname{Tr} A(t) = a_1(t)$, οπότε ο τύπος του Liouville γράφεται:

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds \quad , \quad t_0, t \in I.$$

Η επίλυση της μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε (1) αν είναι γνωστές οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε (2) γίνεται πάλι με την μέθοδο Lagrange.

Θα εφαρμόσουμε τώρα τα προηγούμενα για να λύσουμε πλήρως τη γραμμική Δ.Ε $2^{ης}$ τάξης

$$x'' = a_1(t)x' + a_2(t)x + \beta(t) \qquad (5)$$

αν είναι γνωστή μία λύση $\psi \neq 0$ της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε

$$x'' = a_1(t)x' + a_2(t)x \qquad (6)$$

Κατ' αρχήν συμπληρώνουμε την ψ σε μία βάση $\{\psi, w\}$ του χώρου των λύσεων της (6), όπου η w είναι προς αναζήτηση. Διαλέγουμε $t_0 \in I$ με $\psi(t_0) \neq 0$

και $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\begin{pmatrix}\psi(t_0)\\ \psi'(t_0)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}$ να αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$ και αναζητούμε την w με αρχικές συνθήκες $w(t_0)=w_1$, $w'(t_0)=w_2$. Τότε

$$W(t_0)=W(\psi,w)(t_0)=\begin{vmatrix}\psi(t_0) & w_1\\ \psi'(t_0) & w_2\end{vmatrix}\neq 0$$

Έχουμε τώρα $W(t)=\psi(t)w'-\psi'(t)w$ που είναι μια γραμμική Δ.Ε 1ης τάξης ως προς w. Για $t\in J$, όπου το J είναι κατάλληλο υποδιάστημα του I που περιέχει το t_0, έχουμε:

$$\frac{\psi(t)w'-\psi'(t)w}{(\psi(t))^2}=\frac{W(t)}{(\psi(t))^2} \Rightarrow \left(\frac{w}{\psi(t)}\right)'=\frac{W(t)}{(\psi(t))^2} \Rightarrow$$

$$\frac{w(t)}{\psi(t)}-\frac{w(t_0)}{\psi(t_0)}=\int_{t_0}^{t}\frac{W(s)}{(\psi(s))^2}\,ds \Rightarrow$$

$$w(t)=\psi(t)\left(\frac{w_1}{\psi(t_0)}+\int_{t_0}^{t}\frac{W(s)}{(\psi(s))^2}\,ds\right), \quad t\in J$$

όπου η ορίζουσα του Wronski μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο του Liouville

$$W(s)=W(t_0)\exp\int_{t_0}^{s}a_1(z)\,dz$$

Μια ειδική λύση της (5) είναι σύμφωνα με την μέθοδο Lagrange η $\varphi_0(t)=u(t)\psi(t)+v(t)w(t)$, $t\in I$ όπου

$$u(t)=\int\frac{-B(t)w(t)}{W(t)}\,dt, \quad v(t)=\int\frac{B(t)\psi(t)}{W(t)}\,dt$$

και η γενική λύση της (5) είναι η $\varphi(t)=\varphi_0(t)+c_1\psi(t)+c_2w(t)$.

<u>4.1. Παράδειγμα</u> Η Δ.Ε 2ης τάξης

$$x''=\frac{2t}{t^2+1}x'-\frac{2}{t^2+1}x+6(1+t^2), \quad t\in\mathbb{R} \qquad (7)$$

έχει αντίστοιχη ομογενή την

$$x''=\frac{2t}{t^2+1}x'-\frac{2}{t^2+1}x, \quad t\in\mathbb{R} \qquad (8)$$

Μια προφανής λύση της (8) είναι η $\psi_1(t)=t$, $t\in\mathbb{R}$, που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\psi_1(1)=1$, $\psi_1'(1)=1$. Επειδή τα διανύσματα $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$ αναζητούμε μία λύση ψ_2 της (8) με αρχικές συνθήκες $\psi_2(0)=0$, $\psi_2'(1)=1$. Έτσι η ορίζουσα του Wronski είναι

$$W(t) = W(1)\exp\int_1^t \frac{2s}{s^2+1}\,ds = \frac{t^2+1}{2}$$

και $\psi_2(t) = \psi_1(t)\left(\int_1^t \frac{W(s)}{(\psi_1(s))^2}\,ds\right) = t\int_1^t \frac{\frac{s^2+1}{2}}{s^2}\,ds = \frac{1}{2}(t^2-1)$

Η $\psi_2(t) = \frac{1}{2}(t^2-1)$, $t\in\mathbb{R}$ είναι μία δεύτερη λύση της (8) που μαζί με την ψ_1 συναποτελούν βάση του χώρου των λύσεων της (8). Δηλαδή, η γενική λύση της (8) δίνεται από τον τύπο $\psi(t) = c_1 t + c_2(t^2-1)$, $t\in\mathbb{R}$ και $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ σταθερές.

Μία ειδική λύση της (7) είναι η $\varphi_0(t) = u_1(t)\psi_1(t) + u_2(t)\psi_2(t)$ όπου

$$u_1(t) = -\int \frac{6(1+t^2)\frac{1}{2}(t^2-1)}{\frac{t^2+1}{2}}\,dt = 6t - 2t^3$$

$$u_2(t) = \int \frac{6(1+t^2)\cdot t}{\frac{t^2+1}{2}}\,dt = 6t^2$$, δηλαδή $\varphi_0(t) = 3t^2 + t^4$, $t\in\mathbb{R}$.

Άρα η γενική λύση της (7) δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(t) = c_1 t + c_2(t^2-1) + 3t^2 + t^4, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι Δ.Ε.

(α) $x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0$, $t>0$ (ειδική λύση η $\psi(t) = \frac{\sin t}{t}$, $t>0$)

(β) $x'' - \frac{2}{\sin^2 t}x = 0$, $t\in(0,\pi)$ (ειδική λύση η $\psi(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$, $t>0$)

2. Να λυθούν οι Δ.Ε.

(α) $x'' - 2x' + \frac{2}{t}x = 2t^2$, $t>0$ (Μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $\psi(t) = t$, $t>0$)

(β) $x'' + \frac{t}{1-t}x' - \frac{1}{1-t}x = t-1$, $t<1$ (Μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι $\psi(t) = e^t$, $t<1$)

3. Η ομογενής γραμμική Δ.Ε.

$$x'' = a_1(t)x' + a_2(t)x \quad , t \in I ,$$

όπου οι $a_1, a_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και το I είναι ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$, έχει μία λύση $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$. Να αποδειχθεί ότι η φ μαζί με την συνάρτηση $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\psi(t) = \varphi(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{\exp \int_{t_0}^{s} a_1(z)dz}{(\varphi(s))^2} \, ds , \quad t_0, t \in I$$

αποτελούν βάση στον χώρο των λύσεων.

4. Να λυθεί η Δ.Ε. $x'' - t\gamma(t)x' + \gamma(t)x = 0$, όπου η $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση.

IV. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

1. Γραμμικές Δ.Ε με πραγματικές διακεκριμένες ιδιοτιμές

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η επίλυση μιας n-διάστατης γραμμικης Δ.Ε. 1ης τάξης ανάγεται στην εύρεση μιας βάσης του χώρου των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. και βρήκαμε ένα κριτήριο για την γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων (τον μή μηδενισμό της ορίζουσας του Wronski). Όμως δεν δώσαμε γενική μέθοδο για την επίλυση μιας ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. γιατί τέτοια μέθοδος δεν υπάρχει. Τέτοια μέθοδος υπάρχει στην ειδική (αλλά στην εξαιρετικά σπουδαία) περίπτωση που η γραμμική Δ.Ε έχει σταθερούς συντελεστές.

Μια n-διάστατη ομογενης γραμμική Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές είναι μιά Δ.Ε της μορφής

$$x' = Ax \qquad (1)$$

όπου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ένας σταθερός πίνακας και η ζητούμενη συνάρτηση $x = (x_1, \dots, x_n)$. Με τους συμβολισμούς της παραγράφου III.1 έχουμε $I = \mathbb{R}$ και συνεπώς η (1) ορίζεται στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Η απλούστερη περίπτωση κατά την οποία η (1) λύνεται αμέσως είναι όταν ο A είναι διαγώνιος, δηλαδή $a_{ij} = 0$, όταν $i \neq j$. Τότε η (1) διασπάται σε n το πλήθος ανεξάρτητες μεταξύ τους γραμμικες Δ.Ε 1ης τάξης

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 \\ x_2' &= a_{22} x_2 \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{nn} x_n \end{aligned}$$

Η γενική λυση της καθεμιάς είναι $x_i(t) = c_i e^{a_{ii}t}$, $t \in \mathbb{R}$ και $c_i \in \mathbb{R}$ σταθερά. Συνεπώς η γενική λυση στην περίπτωση αυτή είναι $\varphi(t) = (c_1 e^{a_{11}t}, \dots, c_n e^{a_{nn}t})$, $t \in \mathbb{R}$.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι κάτω από ποιές προυποθέσεις μπορεί η (1) ν' αναχθεί σε μια ισοδύναμή της με διαγώνιο πίνακα. Σχετικά μ' αυτό το ερώτημα ισχύει η επόμενη πρόταση.

1.1. Πρόταση. Αν ο πίνακας $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, τότε η ομογενής γραμμική Δ.Ε (1) έχει γενική λύση

$$\varphi(t)=\Big(\sum_{i=1}^{n} c_{1i}e^{\lambda_i t},\dots,\sum_{i=1}^{n} c_{ni}e^{\lambda_i t}\Big)\quad, t\in\mathbb{R} \text{ και } c_{ij}\in\mathbb{R}.$$

Απόδειξη Επειδή ο A έχει n διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ υπάρχει μια βάση $\{v_1,\dots,v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ από ιδιοδιανύσματα του A, ώστε $Av_i=\lambda_i v_i$, $1\le i\le n$. Οι συναρτήσεις $\varphi_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ με $\varphi_i(t)=e^{\lambda_i t}v_i$ είναι λύσεις της (1) αφού

$$\varphi_i'(t)=\lambda_i e^{\lambda_i t}v_i=e^{\lambda_i t}(\lambda_i v_i)=e^{\lambda_i t}Av_i=A(e^{\lambda_i t}v_i)=A\varphi_i(t)$$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον οι $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες γιατί τα $v_1,\dots,v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι η γενική λύση της (1) δίνεται από τον τύπο

$$\varphi_i(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}v_i=\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i v_{1i}e^{\lambda_i t},\dots,\sum_{i=1}^{n} c_i v_{ni}e^{\lambda_i t}\Big)$$

όπου $v_i=(v_{1i},\dots,v_{ni})$ σε συντεταγμένες. Θέτοντας $c_{ki}=c_i v_{ki}$, $1\le k,i\le n$,

$$\varphi(t)=\Big(\sum_{i=1}^{n} c_{1i}e^{\lambda_i t},\dots,\sum_{i=1}^{n} c_{ni}e^{\lambda_i t}\Big)\quad, t\in\mathbb{R}.$$

1.2. Παράδειγμα. Η 3-διάστατη γραμμική Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\tag{2}$$

ορίζεται από πίνακα με ιδιοτιμές $1, 2$ και -1. Άρα η γενική λύση της (2) είναι

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}e^{t}+c_{12}e^{2t}+c_{13}e^{-t}\\c_{21}e^{t}+c_{22}e^{2t}+c_{23}e^{-t}\\c_{31}e^{t}+c_{32}e^{2t}+c_{33}e^{-t}\end{pmatrix}\quad, t\in\mathbb{R}$$

Όμως $x_1'(t)=x_1(t)\Rightarrow c_{11}e^{t}+2c_{12}e^{2t}-c_{13}e^{-t}=c_{11}e^{t}+c_{12}e^{2t}+c_{13}e^{-t}$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$.
Αυτό είναι δυνατόν να συμβαίνει μόνον όταν $c_{12}=c_{13}=0$.

Από την $x_2'=x_1+2x_2$ παίρνουμε

$$c_{21}e^{t}+2c_{22}e^{2t}-c_{23}e^{-t}=(c_{11}+2c_{21})e^{t}+(c_{12}+2c_{22})e^{2t}+(c_{13}+2c_{23})e^{-t}$$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$

που είναι δυνατόν μόνον όταν $c_{21}=c_{11}+2c_{21}$, $2c_{22}=c_{12}+2c_{22}$ και $-c_{23}=c_{13}+2c_{23}$, δηλαδή $c_{21}=-c_{11}$ και $c_{23}=0$.

Από την $x_3' = x_1 - x_3$ παίρνουμε

$$c_{31}e^{t} + 2c_{32}e^{2t} - c_{33}e^{-t} = (c_{11}-c_{31})e^{t} + (c_{12}-c_{32})e^{2t} + (c_{13}-c_{33})e^{-t}$$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$

και κατά συνέπεια $c_{31} = c_{11} - c_{31}$, $2c_{32} = c_{12} - c_{32}$ και $-c_{33} = c_{13} - c_{33}$, δηλαδή $c_{31} = \frac{1}{2}c_{11}$ και $c_{32} = 0$.

Έτσι η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}e^{t} \\ -c_{11}e^{t} + c_{22}e^{2t} \\ \frac{1}{2}c_{11}e^{t} + c_{33}e^{-t} \end{pmatrix}$$, $t\in\mathbb{R}$, όπου $c_{11}, c_{22}, c_{33} \in \mathbb{R}$ σταθερές.

<u>1.3. Παρατήρηση.</u> Για κάθε πραγματική ιδιοτιμή λ του πίνακα A και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $v\in\mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$, $t\in\mathbb{R}$ είναι λύση της (1). Αν κάποια πραγματική ιδιοτιμή λ του A είναι πολλαπλή, οι αντίστοιχες λύσεις που ορίζονται όπως προηγουμένως είναι λιγότερες από n και δεν αποτελούν βάση του χώρου των λύσεων, παρότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Εδώ δεν θα εξετάσουμε τον τρόπο εύρεσης της γενικής λύσης της (1) όταν ο A έχει πολλαπλές πραγματικές ή μιγαδικές ιδιοτιμές. Θα αρκεστούμε να παρατηρήσουμε ότι όταν $n\leq 3$ και ο A έχει μια διπλή πραγματική ιδιοτιμή τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τις ήδη γνωστές μεθόδους για να λύσουμε την (1) (υποβιβασμός της τάξης).

<u>Ασκήσεις</u>

1. Να βρεθούν οι λύσεις των Δ.Ε

(α) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (β) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(γ) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (δ) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2. Ν' αποδειχθεί ότι αν ο πίνακας $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ έχει αρνητικές και διάφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές, τότε $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = 0$ για κάθε λύση φ της Δ.Ε. $x' = Ax$

3. Να λυθεί η Δ.Ε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ \sin t \end{pmatrix}$$, $t\in\mathbb{R}$

2. ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ.

Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε διεξοδικά τη σπουδαιότατη για τις εφαρμογές περίπτωση των 2-διάστατων ομογενών γραμμικών Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Θεωρούμε λοιπόν την Δ.Ε.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

όπου $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. Για την επίλυση της (1) διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

(i) Αν ο A έχει δυο πραγματικές διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1\neq\lambda_2$, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.1 της προηγούμενης παραγράφου η γενική λύση της (1) είναι

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2 \quad , t\in\mathbb{R} \quad , c_1, c_2 \in\mathbb{R} \text{ σταθερές.}$$

όπου το v_i είναι (μη-μηδενικό) ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, $i=1,2$.

(ii) Έστω ότι ο A έχει μία διπλή πραγματική ιδιοτιμή λ. Αν $A=\lambda I_2$, όπου I_2 είναι ο 2×2 ταυτοτικός πίνακας τότε η γενική λύση της (1) είναι $\varphi(t)=(c_1e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t})$, $t\in\mathbb{R}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Έστω ότι $A\neq\lambda I_2$. Τότε ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ έχει διάσταση 1. Διαλέγουμε ένα ιδιοδιάνυσμα $v\neq 0$ και το συμπληρώνουμε σε μια βάση $\{v,u\}$ του $\mathbb{R}^2$. Η συνάρτηση $\varphi_1(t)=e^{\lambda t}v$, $t\in\mathbb{R}$ είναι μία λύση της (1) με αρχική συνθήκη $\varphi_1(0)=v$. Επειδή η λ είναι διπλή ιδιοτιμή του A υπάρχει $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε

$$Au = \mu v + \lambda u$$

Η συνάρτηση $\varphi_2(t) = \mu t e^{\lambda t}v + e^{\lambda t}u$ είναι λύση της (1), όπως εύκολα διαπιστώνεται, με αρχική συνθήκη $\varphi_2(0)=u$, και επιπλέον γραμμικώς ανεξάρτητη της φ_1. Έτσι η γενική λύση της (1) δίνεται από τον τύπο

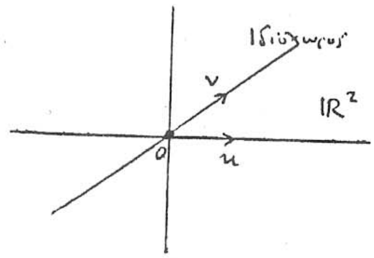
$$\varphi(t) = \left((c_1 + c_2\mu t)v + c_2 u \right) e^{\lambda t} \quad , t\in\mathbb{R} \quad , c_1, c_2 \in\mathbb{R}.$$

2.1. Παράδειγμα. Ο πίνακας της Δ.Ε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2)$$

έχει την διπλή ιδιοτιμή 1 με ιδιόχωρο την διαγώνιο, δηλαδή τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v=\binom{1}{1}$. Μία λύση της (2) είναι λύση η συνάρτηση $\varphi_1(t) = e^t v = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$, με αρχική συνθήκη $\varphi_1(0)=v$. Θεωρούμε $u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, οπότε το $\{v,u\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^2$. Τότε έχουμε:

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \left(-\tfrac12\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$



Αν λύση $\varphi_2(t) = -\frac12 t e^t \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

δηλαδή $\varphi_2(t)=\begin{pmatrix} e^t - \frac12 te^t \\ -\frac12 te^t\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

Τότε η γενική λύση της (2) δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix}(c_1+c_2)e^t - \frac{c_2}{2}te^t \\ c_1e^t - \frac{c_2}{2}te^t\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(iii) Για την περίπτωση που ο A έχει μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda=a+ib$, $\bar\lambda=a-ib$, $b\neq0$ θα χρειαστούμε το επόμενο.

2.2. Λήμμα Έστω $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ ένας πίνακας με μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda=a+ib$ και $\bar\lambda=a-ib$, $b\neq0$. Τότε ο A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τον A σαν μιγαδικό πίνακα, δηλαδή $A\in\mathbb{R}^{2\times2}\subset\mathbb{C}^{2\times2}$. Τότε ο A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda,\bar\lambda$ ως προς το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Έστω $z\in\mathbb{C}^2$ ένα μη-μηδενικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Υπάρχουν $u,v\in\mathbb{R}^2$ ώστε $z=u+iv$. Έτσι έχουμε:

$$Az=\lambda z \Rightarrow A(u+iv)=(a+ib)(u+iv) \Rightarrow$$
$$Au+iAv=(au-bv)+i(av+bu)$$

Άρα $Au=au-bv$ και $Av=av+bu$. Αυτό σημαίνει ότι $A\bar z=\bar\lambda\bar z$, δηλαδή το $\bar z$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\bar\lambda$. Τα πραγματικά διανύσματα u,v είναι γραμμικά ανεξάρτητα (υπεράνω του $\mathbb{R}$) επειδή τα $z,\bar z$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (υπεράνω του $\mathbb{C}$). Άρα το $\{v,u\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ και όπως υπολογίσαμε παραπάνω

$$Av=av+bu$$
$$Au=-bv+au$$

Αυτό σημαίνει ότι ο A είναι όμοιος με τον $\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$.

2.3. Παρατήρηση. Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ έχει την μιγαδική ιδιοτιμή $a+ib$, $b\neq 0$ μ' ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $z = u+iv \in \mathbb{C}^2$, τότε ως προς τη βάση $\{v, u\}$ του $\mathbb{R}^2$ γράφεται $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Έτσι κάνοντας έναν γραμμικό μετασχηματισμό συντεταγμένων (δηλαδή μεταβλητών) η (1) ανάγεται στην Δ.Ε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Οι συναρτήσεις $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix}$, $\varphi_2(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin bt \\ -\cos bt \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$ είναι λύσεις της (3) και μάλιστα γραμμικά ανεξάρτητες αφού $W(\varphi_1,\varphi_2)(t) = -e^{2\alpha t} \neq 0$. Άρα η γενική λύση της (3) δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t}\cos bt + c_2 e^{\alpha t}\sin bt \\ c_1 e^{\alpha t}\sin bt - c_2 e^{\alpha t}\cos bt \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.4. Σημείωση. Στις λύσεις φ_1, φ_2 φτάνουμε ως εξής: Θεωρούμε τις ζητούμενες συναρτήσεις x, y μιγαδικές, δηλαδή από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$. Τότε μία μιγαδική λύση της (3) είναι η $z(t) = e^{(\alpha+ib)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, γιατί το $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $a+ib$. Αναλυτικά η $z(t)$ γράφεται

$$z(t) = e^{\alpha t}(\cos bt + i\sin bt)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos bt + i\sin bt \\ -i\cos bt + \sin bt \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$z(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} + i e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin bt \\ -\cos bt \end{pmatrix} = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$$

2.5. Παράδειγμα. Ο πίνακας της Δ.Ε

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

έχει τις μιγαδικές ιδιοτιμές $1+i$, $1-i$. Θα μετασχηματίσουμε την (4) στην μορφή (3). Γι αυτό ακολουθούμε τη διαδικασία της απόδειξης του Λήμματος 2.2. Πρέπει πρώτα να βρούμε ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $1+i$. Ένα τέτοιο ιδιοδιάνυσμα $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ είναι μία από τις λύσεις του (μιγαδικού) γραμμικού συστήματος

$$\begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 2-(1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Μία λύση είναι η $z = \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Κάνουμε τώρα ένα γραμμικό μετασχηματισμό συντεταγμένων του $\mathbb{R}^2$ με κανονική βάση την $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι ο

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ που έχει αντίστροφο τον $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Θεωρούμε λοιπόν τον μετασχηματισμό $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$ οπότε η (4) μετασχηματίζεται στην

$$P\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Η (5) έχει γενική λύση

$$y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t \\ c_1 e^t \sin t - c_2 e^t \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές } \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$x(t) = P\,y(t) = \begin{pmatrix} (c_1-c_2)e^t \cos t + (c_1+c_2)e^t \sin t \\ -c_2 e^t \sin t - c_1 e^t \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι Δ.Ε.

(α) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (β) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2. Να λυθούν οι Δ.Ε.

(α) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (β) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3. Να λυθούν οι Δ.Ε.

(α) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$ (β) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$

4. Ν' αποδειχθεί ότι αν ο $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ έχει μία αρνητική διπλή ιδιοτιμή τότε $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0 \in \mathbb{R}^2$ για κάθε λύση φ της Δ.Ε $x' = Ax$.

5. Έστω $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ένας πίνακας με μιγαδικές ιδιοτιμές $a+ib$, $a-ib$. Ν' αποδειχθεί ότι για κάθε λύση φ της Δ.Ε. $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ισχύουν τα επόμενα

(α) Αν $a<0$, τότε $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$

(β) Αν $a>0$, τότε $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t)=0$

(γ) Αν $a=0$, τότε η φ είναι περιοδική και μάλιστα το $\varphi(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^2$ είναι περιφέρεια κύκλου με κέντρο το $0\in\mathbb{R}^2$.

3. Ταλαντώσεις

Οι μονοδιάστατες γραμμικές Δ.Ε 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές αποτελούν το μαθηματικό πρότυπο για τη μελέτη πολλών φυσικών προβλημάτων, ιδιαίτερα της Μηχανικής. Ένα τέτοιο φαινόμενο είναι οι ταλαντώσεις.

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας m που σύρεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με την δύναμη ενός ελατηρίου. Έστω $x(t)$ η απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας. Πάνω στο σώμα επενεργούν δυο δυνάμεις: Η τριβή T που αντιτίθεται στην κίνηση και είναι ανάλογη της ταχύτητας, δηλαδή $T=-\lambda x'(t)$, $\lambda\geq 0$, και η δύναμη του ελατηρίου που είναι ίση με $-kx(t)$, όπου η σταθερά $k>0$ εξαρτάται απ' το ελατήριο. Από τον νόμο του Newton έχουμε:

$$m x''(t) = -\lambda x'(t) - k x(t) \quad \Rightarrow$$

$$x'' + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

που είναι μια ομογενής γραμμική Δ.Ε 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \qquad (1)$$

που είναι ισοδύναμη με τη 2-διάστατη Δ.Ε 1ης τάξης

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \qquad (2)$$

όπου $x_1=x$. Ο πίνακας της (2) έχει ιδιοτιμές τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\lambda^2+a_1\lambda+a_2$, που είναι οι

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2-4a_2}}{2}$$

Έχουμε τώρα τρεις περιπτώσεις:

(i) $a_1^2-4a_2>0$, οπότε έχουμε δυο πραγματικές, διαφορετικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2. Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής λ_i παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}1\\ \lambda_i\end{pmatrix}$, $i=1,2$. Η γενική λύση της (2) δίνεται λοιπόν από τον τύπο

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=c_1e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\end{pmatrix}+c_2e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}\\ c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Άρα η γενική λύση της (1) είναι $x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$. Αν $a_1,a_2>0$ τότε έχουμε $\lim_{t\to+\infty}x(t)=0$, γιατί $\lambda_1,\lambda_2<0$.

(ii) $a_1^2-4a_2=0$, οπότε έχουμε την πραγματική διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{a_1}{2}$. Στην περίπτωση αυτή μία λύση της (2) είναι βέβαια η $\varphi_1(t)=e^{-(a_1/2)t}\begin{pmatrix}1\\ -a_1/2\end{pmatrix}$. Το $\left\{\begin{pmatrix}1\\ -a_1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1/2\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ και

$$\begin{pmatrix}0&1\\ -a_2&-a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1/2\\ 0\end{pmatrix}=a_2\begin{pmatrix}1\\ -a_1/2\end{pmatrix}+\left(-\frac{a_1}{2}\right)\begin{pmatrix}a_1/2\\ 0\end{pmatrix}$$

Μία γραμμικά ανεξάρτητη από την φ_1 λύση της (2) είναι λοιπόν η

$$\varphi_2(t)=a_2te^{-(a_1/2)t}\begin{pmatrix}1\\ -a_1/2\end{pmatrix}+e^{-(a_1/2)t}\begin{pmatrix}a_1/2\\ 0\end{pmatrix}=e^{-(a_1/2)t}\begin{pmatrix}a_2t+(a_1/2)\\ -\frac{a_1a_2}{2}t\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}$$

Επομένως η γενική λύση της (2) δίνεται από τον τύπο

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=c_1e^{-(a_1/2)t}\begin{pmatrix}1\\ -a_1/2\end{pmatrix}+c_2e^{-(a_1/2)t}\begin{pmatrix}a_2t+(a_1/2)\\ -\frac{a_1a_2}{2}t\end{pmatrix}=$$

$$e^{-(a_1/2)t}\begin{pmatrix}c_1+c_2\frac{a_1}{2}+c_2a_2t\\ -\frac{c_1a_1}{2}-c_2\frac{a_1a_2}{2}t\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}$$

Άρα $x(t)=(c_1+c_2t)e^{-(a_1/2)t}$, $t\in\mathbb{R}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ σταθερές.

Αν $a_1>0$, τότε πάλι $\lim_{t\to+\infty}x(t)=0$.

(iii) $a_1^2-4a_2<0$, οπότε έχουμε δυο μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda_1=-\frac{a_1}{2}+i\omega$ και $\lambda_2=-\frac{a_1}{2}-i\omega$, όπου $\omega=\frac{1}{2}\sqrt{4a_2-a_1^2}$. Το μιγαδικό διάνυσμα $\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 και

$$\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -\frac{a_1}{2}+i\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -\frac{a_1}{2}\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\ \omega\end{pmatrix}.$$

Κατά συνέπεια η γενική λύση της (2) δίνεται από τον τύπο

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{-(a_1/2)t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & -\frac{a_1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \\ c_1 \sin\omega t - c_2 \cos\omega t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Άρα η γενική λύση της (1) είναι της μορφής

$$x(t) = e^{(-a_1/2)t}\,(c_1 \cos\omega t - c_2 \sin\omega t), \quad t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Αν $a_1 > 0$ τότε πάλι έχουμε $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$, για κάθε λύση $x(t)$ της (2). Αν $a_1 = 0$, δηλαδή όταν δεν υπάρχει τριβής, τότε η $x(t) = c_1 \cos\omega t - c_2 \sin\omega t$ είναι περιοδική. Στην περίπτωση αυτή $\omega = \sqrt{a_2}$ $\left(= \sqrt{\frac{k}{m}}\right.$ για τις ταλαντώσεις$\left.\right)$. Όταν $c_2 = 0$, $x(t) = c_1 \cos\omega t$, ενώ όταν $c_1 = 0$, $x(t) = c_2 \sin\omega t = c_2 \cos\omega\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)$. Αν $c_1 c_2 \neq 0$, διαλέγουμε $\varphi \in \mathbb{R}$, ώστε $\tan\omega\varphi = \frac{c_2}{c_1}$, οπότε $\frac{c_1}{\cos\omega\varphi} = \frac{c_2}{\sin\omega\varphi} = c \in \mathbb{R}$ και $x(t) = c\cos\omega t \cos\omega\varphi - c \sin\omega t \sin\omega\varphi = c\cos\omega(t - \varphi)$. Αν λοιπόν $a_1 = 0$ τότε η λύση της (1) γράφεται $x(t) = c\cos\omega(t - \varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, όπου οι $c, \varphi \in \mathbb{R}$ είναι σταθερές.

Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι Δ.Ε.

(α) $x'' - x' - 6x = 0$ (β) $x'' + 2x' + x = 0$ (γ) $x'' + 8x = 0$

2. Να βρεθεί μία πραγματική συνάρτηση $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $x'' + 4x = \cos 2t$ και $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

3. Να λυθεί η Δ.Ε. $x'' - 3x' + 2x = t^2$

4. Έστω φ η λύση της Δ.Ε. $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ με αρχικές συνθήκες $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία ειδική λύση της Δ.Ε $x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$, όπου η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, που δίνεται από τον τύπο

$$\varphi_0(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(t-s) f(s)\, ds, \quad t_0, t \in \mathbb{R}$$

ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΤΩΝ ΠΛΑΝΗΤΩΝ

Η κίνηση ενός υλικού σημείου μάζας m στον $\mathbb{R}^3$ υπό την επίδραση μιας δύναμης F περιγράφεται από την εξίσωση της κίνησης του Newton

$$F = m \cdot x'' \tag{1}$$

Ένα πεδίο δυνάμεων $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ λέγεται <u>κεντρικό</u> αν υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $\lambda : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε

$$F(x) = \lambda(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \tag{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Ένα παράδειγμα κεντρικού πεδίου δυνάμεων είναι το πεδίο βαρύτητας ενός πολύ μεγάλου σώματος όπως ο ήλιος, που θεωρείται ακίνητο και τοποθετημένο στο 0. Σύμφωνα με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης του Newton το πεδίο δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = -G \frac{mM}{\|x\|^3} x \tag{3}$$

όπου $G = 6{,}685 \cdot 10^{-11}\ m/sec^2 kg$ είναι η σταθερά της βαρύτητας, M η μάζα του ήλιου και m η μάζα ενός πλανήτη που σε σχέση με τον ήλιο είναι πολύ μικρός και μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Η εξίσωση της κίνησης του πλανήτη είναι τότε

$$x'' = -G \frac{M}{\|x\|^3} \cdot x \tag{4}$$

<u>1. Πρόταση</u> Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ η καμπύλη που περιγράφει την κίνηση ενός υλικού σημείου υπό την επίδραση του κεντρικού πεδίου δυνάμεων (2), δηλαδή $m \cdot \gamma''(t) = F(\gamma(t))$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός. Αν $\varphi = T \circ \gamma$, τότε $m\varphi''(t) = F(\varphi(t))$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$

<u>Απόδειξη</u> Απ' τον κανόνα της αλυσίδας και το γεγονός ότι η T είναι γραμμική απεικόνιση έχουμε $\varphi''(t) = T(\gamma''(t))$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επίσης, αφού η T είναι ισομετρία, $\|\varphi(t)\| = \|\gamma(t)\|$. Άρα

$$m\varphi''(t) = m\, T(\gamma''(t)) = \ldots [illegible] \ldots (t)) = T(F(\gamma(t))) = T\left(\lambda(\|\gamma(t)\|) \cdot \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\right)$$
$$= \lambda(\|\gamma(t)\|) \cdot T\left(\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\right) = \lambda(\|\gamma(t)\|) \frac{\varphi(t)}{\|\varphi(t)\|} = F(\varphi(t))$$

Με άλλα λόγια η εξίσωση της κίνησης υπό την επίδραση ενός κεντρικού πεδ[illegible].

δυνάμεων παραμένει αναλλοίωτη από τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

2. Πρόταση Έστω F το κεντρικό πεδίο δυνάμεων (2). Η κίνηση κάθε υλικού σημείου υπό την επίδραση του F γίνεται σ' ένα επίπεδο που περνάει από το 0.

Απόδειξη Έστω $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ η τροχιά του υλικού σημείου με $\gamma(0)=x_0$ και $\gamma'(0)=v_0$. Τότε, αν $\times$ είναι το εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$, έχουμε:

$$(\gamma\times\gamma')'(t) = \gamma'(t)\times\gamma'(t) + \gamma(t)\times\gamma''(t) = \gamma(t)\times\gamma''(t) = \gamma(t)\times\left(\frac{1}{m}\lambda(\|\gamma(t)\|)\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\right)$$
$$= \frac{\lambda(\|\gamma(t)\|)}{m\|\gamma(t)\|}\cdot(\gamma(t)\times\gamma(t)) = 0$$

Άρα $\gamma(t)\times\gamma'(t) = x_0\times v_0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Αν $x_0\times v_0 \neq 0$, τότε τα $\gamma(t), \gamma'(t)$ είναι πάντα κάθετα στο $x_0\times v_0$, δηλαδή βρίσκονται πάντα στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $x_0\times v_0$. Αν $x_0\times v_0 = 0$, τότε υπάρχει μία C^∞ συνάρτηση $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\gamma'(t) = g(t)\gamma(t)$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Συνεπώς $\gamma(t) = x_0\cdot\exp\left(\int_0^t g(s)ds\right)$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$, πράγμα που σημαίνει ότι η κίνηση γίνεται πάνω στην ευθεία που παράγει το x_0. ο.ε.δ.

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα, αν ένα υλικό σημείο κινείται υπό την επίδραση του πεδίου κεντρικών δυνάμεων (2) και την χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην θέση x_0 με ταχύτητα v_0, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κίνηση γίνεται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Αν τα x_0, v_0 είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε όπως δείξαμε στην απόδειξη της πρότασης 2 η κίνηση γίνεται πάνω στην ευθεία που ορίζει το x_0. Στα επόμενα θα υποθέτουμε ότι τα x_0, v_0 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Λόγω της πρότασης 1 μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $x_0 = r_0 e_1 = \begin{pmatrix}r_0\\0\\0\end{pmatrix}$ ... Αφού η κίνηση γίνεται στο $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ το οποίο ταυτίζουμε με το $\mathbb{R}^2$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες (r,φ). Τότε $x(t) = r(t)\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix}$, όπου $r: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ και $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, και $\|x(t)\| = r(t)$. Άρα $F(x(t)) = \lambda(r(t))\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix}$.

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$x'(t) = r'(t)\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix} + r(t)\varphi'(t)\begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix} \quad \text{και}$$

$$x''(t) = \left[r''(t) - r(t)(\varphi'(t))^2\right]\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix} + \left[2r'(t)\varphi'(t) + r(t)\varphi''(t)\right]\begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix}$$

Έτσι η εξίσωση της κίνησης γράφεται:

$$\left[r''(t)-r(t)(\varphi'(t))^2-\frac{\lambda(r(t))}{m}\right]\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix}+\left[2r'(t)\varphi'(t)+r(t)\varphi''(t)\right]\begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix}=0$$

Επειδή τα διανύσματα $\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα για κάθε $t\in\mathbb{R}$, η κίνηση περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες από τις εξισώσεις.

$$r''-r(\varphi')^2=\frac{\lambda}{m} \qquad (5\alpha)$$

$$2r'\varphi'+r\varphi''=0 \qquad (5\beta)$$

<u>3. Θεώρημα (διατήρησης της στροφορμής)</u> Στη διάρκεια της κίνησης ενός υλικού σημείου μάζας m υπό την επίδραση ενός κεντρικού πεδίου δυνάμεων, η στροφορμή $h=mr^2\varphi'$ παραμένει σταθερή.

<u>Απόδειξη</u> Έχουμε $\frac{1}{m}h'=2rr'\varphi'+r^2\varphi''=r(2r'\varphi'+r\varphi'')=r.0=0$, από την εξίσωση (5β). Άρα η h είναι σταθερή.

Έστω ότι $v_0=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι τα $x_0 v_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $x_0=\begin{pmatrix}r_0\\ 0\end{pmatrix}$, κατ' ανάγκη $v_2\neq 0$. Έχουμε τώρα $r(0)=r_0$, $\varphi(0)=0$, $r'(0)=v_1$ και $\varphi'(0)=\frac{v_2}{r_0}$. Συνεπώς για κάθε $t\in\mathbb{R}$, $h(t)=r_0v_2\neq 0$. Προκύπτει ότι η συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνήσια μονότονη και το πρόσημο της φ' παραμένει σταθερό στη διάρκεια της κίνησης. Άρα η φ είναι αντιστρέψιμη και συνεπώς $r(t)=r(t(\varphi))$.

Υποθέτουμε στην συνέχεια ότι το κεντρικό πεδίο F είναι το πεδίο βαρύτητας του ήλιου (3). Στην περίπτωση αυτή $\lambda(x)=-G\frac{mM}{\|x\|^2}$ και οι εξισώσεις της κίνησης γίνονται

$$r''-r(\varphi')^2+G\frac{M}{r^2}=0 \qquad (6\alpha)$$

$$2r'\varphi'+r\varphi''=0 \qquad (6\beta)$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο βαρύτητας (3) είναι συντηρητικό με δυναμικό $V(x)=-G\frac{mM}{\|x\|}$, $x\neq 0$ και σε πολικές συντεταγμένες $V=-G\frac{mM}{r}$.
Η κινητική ενέργεια δίνεται από τον τύπο

$$T(x')=\frac{1}{2}m\|x'\|^2=\frac{1}{2}m\left[(r')^2+(r\varphi')^2\right]$$

Στην διάρκεια της κίνησης η V μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση του φ, αφού η r είναι συνάρτηση του φ. Παραγωγίζοντας την V ως προς τον χρόνο έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{dV}{d\varphi}\cdot\varphi'=G\frac{mM}{r^2}r', \text{ συνεπώς } r'=\frac{1}{GmM}r^2\frac{dV}{d\varphi}\varphi'=\frac{h}{Gm^2M}\frac{dV}{d\varphi}$$

και $r\varphi' = \frac{h}{mr} = -\frac{hV}{Gm^2M}$. Αντικαθιστώντας τώρα βρίσκουμε:

$$T=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{h}{Gm^2M}\right)^2\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{h}{Gm^2M}\right)^2V^2\right]=\frac{1}{2}\frac{h^2}{m}\left(\frac{1}{GmM}\right)^2\left[\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2+V^2\right]$$

Η ολική μηχανική ενέργεια είναι λοιπόν

$$E=T+V=\frac{1}{2}\frac{h^2}{m}\left(\frac{1}{GmM}\right)^2\left[\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2+V^2\right]+V$$

, και συνεπώς

$$\frac{2km}{h^2}(E-V)=\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2+V^2$$

, όπου $k=(GmM)^2$ (7)

Επειδή το πεδίο είναι συντηρητικό, $\frac{dE}{d\varphi}=0$, δηλαδή

$$\frac{1}{2}\frac{h^2}{mk}\left[2\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)\cdot\left(\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right)+2V\frac{dV}{d\varphi}\right]+\frac{dV}{d\varphi}=0$$

και διαιρώντας με $2\frac{dV}{d\varphi}$,

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2}+V=-\frac{km}{h^2} \qquad (8)$$

Η (8) είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές της οποίας η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$V=-\frac{km}{h^2}+c\cos(\varphi+\varphi_0) \qquad (9)$$

όπου οι c,φ_0 είναι σταθερές. Παραγωγίζοντας έχουμε $\frac{dV}{d\varphi}=-c\sin(\varphi+\varphi_0)$ και αντικαθιστώντας στην (7)

$$\frac{2km}{h^2}\left[E+\frac{km}{h^2}-c\cos(\varphi+\varphi_0)\right]=c^2+\left(\frac{km}{h^2}\right)^2-\frac{2km}{h^2}c\cos(\varphi+\varphi_0)$$

, οπότε

$$c=\pm\frac{k}{h^2}\left[\frac{2mh^2}{k}E+m^2\right]^{1/2}$$

και αντικαθιστώντας στην (9) βρίσκουμε:

$$V=-\frac{km}{h^2}\left[1\mp\left(\frac{2h^2E}{km}+1\right)^{1/2}\cos(\varphi+\varphi_0)\right]$$

Αφού όμως $V=-\frac{\sqrt{k}}{r}$ έχουμε τελικά

$$r=\frac{L}{1\mp\varepsilon\cos(\varphi+\varphi_0)}$$

, όπου $L=\frac{h^2}{m\sqrt{k}}$, $\varepsilon=\left(1+\frac{2h^2E}{km}\right)^{1/2}$

Επειδή $\cos(\varphi+\varphi_0+\pi)=-\cos(\varphi+\varphi_0)$, αλλάζοντας εν ανάγκη την σταθερά φ_0 έχουμε πάντα

$$r=\frac{L}{1+\varepsilon\cos(\varphi+\varphi_0)} \qquad (10)$$

Η (10) παριστάνει έλλειψη όταν $\varepsilon<1$, παραβολή όταν $\varepsilon=1$ και υπερβολή όταν $\varepsilon>1$. Και στις τρεις περιπτώσεις το O είναι εστία της καμπύλης.

Επειδή $r>0$, κατ' ανάγκη $1+\varepsilon\cos(\varphi+\varphi_0)>0$. Αν $\varphi=\pi-\varphi_0$, τότε $\cos(\varphi+\varphi_0)=-1$ και συνεπώς $\varepsilon<1$, δηλαδή η τροχιά είναι έλλειψη.

<u>4. Θεώρημα (Νόμοι του Kepler)</u> Έστω ότι ένα υλικό σημείο μάζας m κινείται υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας ενός σταθερού υλικού σημείου μάζας M. Τότε

(α) Η κίνηση γίνεται είτε πάνω σε μία ευθεία που διέρχεται από το M είτε η τροχιά του m είναι μία κωνική τομή της οποίας η μία εστία είναι το M.

(β) Το εμβαδόν που διαγράφει η ακτίνα από το M στο m κατά την κίνηση είναι ανάλογο του χρόνου

(γ) Τα τετράγωνα των περιόδων των ελλειπτικών τροχιών είναι ανάλογα των κύβων των μεγάλων ημιαξόνων τους

<u>Απόδειξη</u> Το (α) είναι άμεσο από τα προηγούμενα. Το (β) προκύπτει από το Θεώρημα 3 ως εξής. Το εμβαδόν του χωρίου που διαγράφει η ακτίνα από το O στο $x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$ για $t\in[t_1,t_2]$ είναι (όπως προκύπτει π.χ. από το Θεώρημα του Green)

$$A=\frac{1}{2}\left|\int_{t_1}^{t_2}[x_1'(t)x_2(t)-x_2'(t)x_1(t)]\,dt\right|$$ και σε πολικές συντεταγμένες

$$A=\frac{1}{2}\left|\int_{t_1}^{t_2} r^2\varphi'\,dt\right|=\frac{1}{2}\left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{h}{m}\,dt\right|=\frac{|h|}{2m}(t_2-t_1)$$ ο.ε.δ.

(γ) Έστω a,b ο μεγάλος και μικρός ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς. Το εμβαδόν του ελλειπτικού χωρίου είναι ως γνωστόν $A=\pi ab$ και διαγράφεται σε χρόνο μιας περιόδου T. Όμως από το (β) έχουμε $A=\frac{|h|}{2m}T$. Συνεπώς $4\pi^2a^2b^2=\left(\frac{h}{m}\right)^2T^2$. Θεωρώντας συντεταγμένες έτσι ώστε $\varphi_0=0$, η εξίσωση (10) σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται

$$\frac{(x_1+a\varepsilon)^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$$

όπου $a=\frac{L}{1-\varepsilon^2}$ και $b^2=La$. Συνεπώς, αφού $L=\frac{h^2}{m\sqrt{k}}$ έχουμε

$$4\pi^2a^3\frac{h^2}{m\sqrt{k}}=\frac{h^2}{m^2}T^2$$, δηλαδή $$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2m}{\sqrt{k}}$$ που είναι σταθερό ο.ε.δ.

αφού $\frac{4\pi^2m}{\sqrt{k}}=\frac{4\pi^2}{GM}$.