ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
1ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = x^{10} + x - 1.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο ανοιχτό διάστημα $(-\infty, -10^{-1/9})$, ενώ είναι γνήσια αύξουσα στο ανοιχτό διάστημα $(-10^{-1/9}, +\infty)$.
(β) Να αποδειχθεί οτι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$. Η μία βρίσκεται στο ανοιχτό διάστημα $(-2, -1)$ και η άλλη στο διάστημα $(0, 1)$.

Έστω $g : \mathbb{R} \setminus \{-10^{-1/9}\} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(γ) Έστω $0 < \xi < 1$ με $f(\xi) = 0$. Να αποδειχθεί οτι $g([\xi, x]) \subset [\xi, x)$ για κάθε $x > \xi$.
(δ) Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(x) = \xi$ για κάθε $x > \xi$ και ειδικά $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(1) = \xi$.

2. Εστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση

$$f(x) = 2x - \log x - 4.$$

(α) Να ευρεθούν τα σημεία στα οποία η f έχει τοπικό (ή ολικό) ακρότατο και τα διαστήματα μονοτονίας της, όπως και το είδος της μονοτονίας.
(β) Να αποδειχθεί οτι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $(0, +\infty)$. Η μία βρίσκεται στο ανοιχτό διάστημα $(\frac{1}{e^4}, \frac{1}{2})$ και η άλλη στο ανοιχτό διάστημα $(2, 3)$.

Έστω $g : (0, +\infty) \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(γ) Έστω $2 < \xi < 3$ με $f(\xi) = 0$. Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(x) = \xi$ για κάθε $x > \xi$ και ειδικά $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(x) = \xi$ για κάθε $x \geq 3$.

3. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + 2 - e^x.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η f είναι γνήσια φθίνουσα και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Συνεπώς η εξίσωση $x^2 + 2 - e^x = 0$ έχει ακριβώς μία λύση $\xi \in \mathbb{R}$. Μάλιστα, $1 < \xi < 2$.

Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(β) Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(x) = \xi$ για κάθε $x > \xi$ και ειδικά $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(2) = \xi$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(1) = \xi$.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
2ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω $a > 0$ και $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ η συνεχής απεικόνιση με

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Να αποδειχθεί οτι ο $\sqrt{a}$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f και $W(\sqrt{a}) = (0, +\infty)$, δηλαδή $\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = \sqrt{a}$ για κάθε $x > 0$.

2. Εστω $a > \frac{1}{4}$ και $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ η συνεχής απεικόνιση με $f(x) = \sqrt{x + a}$. Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

για κάθε $x \geq 0$.

3. Εστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ η συνεχής απεικόνιση με $f(x) = x + e^{-x}$. Να αποδειχθεί οτι $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, όταν $x \neq y$, αλλά η f δεν έχει κανένα σταθερό σημείο, παρότι ο $[0, +\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

4. Εστω $f : [0, 1] \to [0, 1]$ μία συνεχής απεικόνιση με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, όταν $x \neq y$. Να αποδειχθεί οτι η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\xi \in [0, 1]$ και $W(\xi) = [0, 1]$, δηλαδή $\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = \xi$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

4*. (Προαιρετική) Εστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μία συνεχής απεικόνιση. Αν $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ για κάθε x, $y \in X$ με $x \neq y$, να αποδειχθεί οτι η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\xi \in X$ και $W(\xi) = X$, δηλαδή $\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = \xi$ για κάθε $x \in X$.

5. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία αύξουσα C^2 απεικόνιση και $\xi \in \mathbb{R}$ ένα σταθερό σημείο της f τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$ και $f''(\xi) \neq 0$.
(α) Αν $f''(\xi) > 0$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(\xi, \xi + \delta) \subset \mathbb{R} \setminus W(\xi)$.
(β) Αν $f''(\xi) < 0$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(\xi - \delta, \xi) \subset \mathbb{R} \setminus W(\xi)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
3ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Να αποδειχθεί οτι το μοναδικό σταθερό σημείο της C^∞ απεικόνισης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

είναι υπερβολικό και ελκυστικό με πεδίο έλξης ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

2. Έστω $a > 0$ και $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ η C^∞ απεικόνιση

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Να αποδειχθεί οτι το μοναδικό σταθερό σημείο της f είναι υπερβολικό και εκλυστικό. Υπάρχουν άλλα περιοδικά σημεία της f;

3. Για κάθε $c > 0$ να ευρεθούν τα σταθερά σημεία της C^∞ απεικόνισης $f_c : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ με

$$f_c(x) = x^2 + c$$

και να εξετασθεί αν είναι υπερβολικά.

4. Να ευρεθούν όλα τα περιοδικά σημεία της C^∞ απεικόνισης $f : (-1, 1) \to (-1, 1)$ με

$$f(x) = \sin x$$

και να εξεταστεί αν είναι υπερβολικά. Ποιά είναι τα πεδία έλξης τους;

5. Θεωρούμε την παραμετρισμένη οικογένεια C^∞ απεικονίσεων $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_a(x) = x^3 - ax$ για $a \leq 1$.
(α) Αν $a \leq -1$, να αποδειχθεί οτι η f_a έχει μοναδικό σταθερό σημείο το 0, που δεν είναι υπερβολικό για $a = -1$ και είναι υπερβολικό-απωθητικό για $a < -1$. Επιπλέον, $\lim_{n \to +\infty} |f_a^n(x)| = +\infty$ για κάθε $x \neq 0$. Μάλιστα, η f_a είναι αντιστρέψιμη και το πεδίο έλξης του 0 ως προς την f_a^{-1} είναι όλο το $\mathbb{R}$.
(β) Εστω οτι $-1 < a \leq 1$. Να αποδειχθεί οτι η f_a έχει ακριβώς τρία σταθερά σημεία $\xi_- < 0 < \xi_+$, όπου $\xi_- = -\xi_+$, από τα οποία τα ξ_-, ξ_+ είναι υπερβολικά-απωθητικά και το 0 είναι υπερβολικό-ελκυστικό για $|a| < 1$, ενώ δεν είναι υπερβολικό για $a = 1$. Να αποδειχθεί επίσης οτι $\lim_{n \to +\infty} |f_a^n(x)| = +\infty$ για $|x| > \xi_+$ και $W(0) = (\xi_-, \xi_+)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
4ο Φύλλο Ασκήσεων

Στις δύο πρώτες ασκήσεις υποθέτουμε οτι $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ και $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η λογιστική απεικόνιση $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$.

1. Να αποδειχθεί οτι όλα τα περιοδικά σημεία της f_λ είναι υπερβολικά και απωθητικά.

2. Αν $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_\lambda^{-n}([0,1])$, να αποδειχθεί οτι για κάθε $x \in A$ και $\epsilon > 0$ υπάρχουν $y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|x-y| < \epsilon$ και

$$|f_\lambda^n(x) - f_\lambda^n(y)| > \frac{1}{2}.$$

3. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνεχής απεικόνιση

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{όταν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x, & \text{όταν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $C = \{0 \leq x \leq 1 : 0 \leq f^n(x) \leq 1 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}$ είναι το συνηθισμένο σύνολο του Cantor. Να αποδειχθεί επιπλέον οτι η f απεικονίζει το $C \cap [0, \frac{1}{2}]$ ομοιομορφικά επί του C.

4. Έστω οτι $a > 4$ και $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η C^∞ απεικόνιση

$$f_a(x) = x^3 - ax.$$

Έστω A το f_a-αναλλοίωτο σύνολο που αποτελείται από όλα τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ των οποίων η τροχιά $(f_a^n(x))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ δεν αποκλίνει προς το $+\infty$ ή το $-\infty$. Να αποδειχθεί οτι το A είναι συμπαγές, ολικά-μη-συνεκτικό και τέλειο, δηλαδή τοπολογικά είναι ένα σύνολο του Cantor.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
5ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Να αποδειχθεί οτι αν $\lambda > 4$, τότε η λογιστική απεικόνιση $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ έχει για κάθε πρώτο ακέραιο αριθμό $p \geq 2$ τουλάχιστον 2^p περιοδικά σημεία περιόδου p.

2. Έστω $s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2$ το στοιχείο με $s_{2k} = 1$ και $s_{2k+1} = 0$ για κάθε ακέραιο $k \geq 0$. Να αποδειχθεί οτι το s είναι περιοδικό σημείο περιόδου 2 της μετατόπισης και να ευρεθεί το πεδίο έλξης του.

3. Έστω $X = \{s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2 : s_{n+1} = 1 \text{ αν } s_n = 0\}$.
(α) Να αποδειχθεί οτι $\sigma(X) = X$, όπου $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ είναι η μετατόπιση.
(β) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο των περιοδικών σημείων της $\sigma|_X : X \to X$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.
(γ) Να ευρεθεί ένα σημείο του X του οποίου η τροχιά ως προς τη μετατόπιση σ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

4. Έστω $A = (a_{ij})_{0\leq i,j\leq 1}$ ένας 2×2 πίνακας τέτοιος ώστε $a_{ij} = 0$ ή 1 για κάθε $0 \leq i, j \leq 1$ (ένας τέτοιος πίνακας λέγεται $0-1$ πίνακας) και $A^m \neq 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}^+$. Αν

$$X = \{s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2 : a_{s_n s_{n+1}} = 1 \quad \text{για κάθε } n \geq 0\},$$

προφανώς $\sigma(X) \subset X$ και το X είναι κλειστό, άρα συμπαγές, υποσύνολο του Σ_2. Το ζεύγος $(X, \sigma|_X)$ λέγεται τοπολογική αλυσίδα Markov (δύο καταστάσεων) με πίνακα μετάβασης A.
(α) Μία λέξη $s_0 \cdots s_m$ μήκους $m+1$ από το αλφάβητο $\{0,1\}$ λέγαται αποδεκτή (ως προς τον πίνακα ματάβασης A) αν $a_{s_n s_{n+1}} = 1$ για κάθε $0 \leq n < m$. Να αποδειχθεί οτι για κάθε i, $j \in \{0,1\}$ το πλήθος των αποδεκτών λέξεων $i \cdots j$ μήκους $m+1$ ισούται με το (i,j) στοιχείο του πίνακα A^m.
(β) Ο $0-1$ πίνακας A λέγεται ανάγωγος, όταν για κάθε $0 \leq i, j \leq 1$ υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ ώστε το (i,j) στοιχείο του πίνακα A^m να είναι θετικός αριθμός. Να αποδειχθεί οτι αν ο A είναι ανάγωγος, τότε το σύνολο των περιοδικών σημείων της $\sigma|_X$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.
(γ) Ο $0-1$ πίνακας A λέγεται απεριοδικός, όταν υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ ώστε όλα τα στοιχεία του πίνακα A^m είναι θετικοι αριθμοί. Τότε για κάθε $k \geq m$ όλα τα στοιχεία του A^k είναι θετικοί αριθμοί και προφανώς ο A είναι ανάγωγος. Να αποδειχθεί οτι αν ο πίνακας μετάβασης είναι απεριοδικός, τότε για κάθε μη-κενό ανοιχτό υποσύνολο U του μετρικού χώρου X υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma^k(U) = X$.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
6ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω a, b, $c \in \mathbb{R}$, με $a \neq 0$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x) = ax^2 + bx + c$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν λ, $\mu \in \mathbb{R}$, με $\lambda \neq 0$ και $d \in \mathbb{R}$, ώστε η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \lambda x + \mu$ να είναι τοπολογική συζυγία της f με την $q_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $q_d(x) = x^2 + d$.

2. Για κάθε $d \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την απεικόνιση $q_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $q_d(x) = x^2 + d$. Αν $d < 1/4$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένα μοναδικό $\lambda > 1$ ώστε η q_d να είναι τοπολογικά συζυγής με τη λογιστική απεικόνιση f_λ μέσω μιας τοπολογικής συζυγίας $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της μορφής $h(x) = \alpha x + \beta$, για κατάλληλα α, $\beta \in \mathbb{R}$.

3. Να αποδειχθεί οτι η τετραγωνική απεικόνιση $q : [-2, 2] \to [-2, 2]$ με $q(x) = x^2 - 2$ είναι τοπολογικά συζυγής με τη λογιστική απεικόνιση $f_4 : [0, 1] \to [0, 1]$ με $f_4(x) = 4x(1 - x)$.

4. Εστω $T : [0, 1] \to [0, 1]$ η απεικόνιση «τέντα» με τύπο

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{όταν } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{όταν } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι

$$T^n([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]) = [0, 1]$$

μονότονα «γραμμικά» με κλίση $\pm 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε ακέραιο $0 \leq k < 2^n$.
(β) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $\{0 \leq x \leq 1 : T^N(x) = x\}$ έχει 2^N στοιχεία για κάθε $N \in \mathbb{N}$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο των περιοδικών σημείων της T είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$.

5. Να αποδειχθεί οτι για την λογιστική απεικόνιση f_4 το σύνολο $\{0 \leq x \leq 1 : f_4^N(x) = x\}$ έχει 2^N στοιχεία για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί επίσης οτι το σύνολο των περιοδικών σημείων της f_4 είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
7ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση «τέντα» $T : [0,1] \to [0,1]$ με

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{όταν } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{όταν } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

είναι χαοτική, χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος 2.6.8.

2. Να αποδειχθεί οτι η λογιστική απεικόνιση $f_4 : [0,1] \to [0,1]$ με $f_4(x) = 4x(1-x)$ και η τετραγωνική απεικόνιση $q : [-2,2] \to [-2,2]$ με $q(x) = x^2 - 2$ είναι χαοτικές.

3. Αν $X = \{s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2 : s_{n+1} = 1, \quad \text{όταν } s_n = 0\}$, να αποδειχθεί οτι ο περιορισμός της μετατόπισης $\sigma|_X$ στο X είναι χαοτική απεικόνιση.

4. Εστω $X \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν για οποιαδήποτε δύο κλειστά διαστήματα (όχι μονοσύνολα) $I,\ J \subset X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $J \subset f^n(I)$, να αποδειχθεί οτι η f είναι χαοτική.

5. Έστω $A = (a_{ij})_{0\leq i,j\leq 1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ένας $0-1$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^m \neq 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}^+$ και

$$X = \{s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2 : a_{s_n s_{n+1}} = 1 \quad \text{για κάθε } n \geq 0\}.$$

Να αποδειχθεί οτι αν ο A είναι απεριοδικός, τότε η τοπολογική αλυσίδα Markov $(X, \sigma|_X)$ είναι χαοτικό σύστημα.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
8ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω $f : [0,1] \to [0,1]$ η απεικόνιση με

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}, & \text{όταν } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{όταν } \dfrac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου n.

2. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση και ένας ακέραιος $n > 3$. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο $x \in \mathbb{R}$ περιόδου n ώστε

$$x < f(x) < f^2(x) < \cdots < f^{n-1}(x),$$

να αποδειχθεί οτι η f έχει περιοδικά σημεία για κάθε περίοδο.

3. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 176, να αποδειχθεί οτι έχει τουλάχιστον ένα περιοδικό σημείο περιόδου 96.

4. Να αποδειχθεί οτι η λογιστική απεικόνιση $f_4 : [0,1] \to [0,1]$ με $f_4(x) = 4x(1-x)$ έχει περιοδικά σημεία περιόδου N για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

5. Εστω $f : [0,1] \to [0,1]$ η μη-συνεχής απεικόνιση με

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{3}, & \text{όταν } 0 \le x < \dfrac{2}{3} \\ x - \dfrac{2}{3}, & \text{όταν } \dfrac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$

Η f παρουσιάζει ασυνέχεια μόνο στο σημείο $2/3$. Να αποδειχθεί οτι κάθε σημείο $0 \le x < 1$ είναι περιοδικό με περίοδο 3, ενώ το 1 είναι τελικά περιοδικό περιόδου 3.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
9ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω X ένας μετρικός χώρος και $f : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός. Να αποδειχθεί οτι ο f είναι ελαχιστικός τότε και μόνον τότε όταν δεν υπάρχει κανένα μη-κενό, κλειστό και f-αναλλοίωτο γνήσιο υποσύνολο του X.

2. Εστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Να αποδειχθεί οτι κάθε συστολή $f : X \to X$ είναι μονοσήμαντα εργοδική.

3. Εστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μια τοπολογικά μεταβατική συνεχής απεικόνιση. Αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k, \quad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει ομοιόμορφα, να αποδειχθεί οτι η f είναι μονοσήμαντα εργοδική.

4. Να αποδειχθεί οτι η ιδιότητα της μονοσήμαντης εργοδικότητας διατηρείται από τοπολογικές συζυγίες συνεχών απεικονίσεων συμπαγών μετρικών χώρων.

5. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x + 2\pi k a) = 0$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Εστω $f : [0, 1] \to [0, 1]$ η λεία απεικόνιση με τύπο

$$f(x) = x + \frac{1}{4}\sin^2(\pi x).$$

Είναι η f μονοσήμαντα εργοδική;

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
10ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση με $F(x) = x + \dfrac{1}{4\pi}\sin 2\pi x$. Να αποδειχθεί οτι $F \in \mathcal{D}$ και να υπολογιστεί ο $\rho(F)$.

2. Εστω $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ και $h \in \mathcal{H}_+$ ώστε $h \circ R_a = R_a \circ h$. Να αποδειχθεί οτι η h είναι στροφή κατά γωνία $2\pi H(0)$, όπου H είναι μια ανύψωση της h.

3. Εστω $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής $\rho(f) = e^{2\pi i a}$, δηλαδή $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Εστω επιπλέον οτι η f είναι τοπολογικά μεταβατική. Αν οι h, $g \in \mathcal{H}_+$ είναι δύο τοπολογικές συζυγίες της f με τη στροφή R_a, να αποδειχθεί οτι η $h \circ g^{-1}$ είναι στροφή.

4. Εστω $F \in \mathcal{D}$ και $\phi = F - id$.
(α) Να αποδειχθεί οτι $|\phi(x) - \phi(0)| < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Να αποδειχθεί οτι $|F^n(0) - nF(0)| \leq n - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. Αν F, $G \in \mathcal{D}$, να αποδειχθεί οτι $|(G \circ F)^n(0) - G^n(0) - F^n(0)| \leq 4n - 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατά συνέπεια $|\rho(G \circ F) - \rho(G) - \rho(F)| \leq 4$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη άσκηση 4.)

6. Εστω $a \in \mathbb{R}$, $0 < |\lambda| < \dfrac{1}{2\pi}$ και $F_{\lambda,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση με

$$F_{\lambda,a}(x) = x + a + \lambda \sin 2\pi x.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η $F_{\lambda,a}$ είναι γνήσια αύξουσα αναλυτική αμφιδιαφόριση του $\mathbb{R}$ και $F_{\lambda,a} \in \mathcal{D}$.
(β) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$ υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε

$$F^n_{\lambda,a}(x) = x + na + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \sin 2\pi(g_k(x) + ka)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.
(γ) Να υπολογιστεί ο αριθμός στροφής $\rho(F_{\lambda,a})$.
(δ) Αν $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, να αποδειχθεί οτι η επαγόμενη αναλυτική αμφιδιαφόριση $f_{\lambda,a} \in \mathcal{H}_+$ από την $F_{\lambda,a}$ είναι τοπολογικά συζυγής με την άρρητη στροφή R_a.

7. Εστω $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής που έχει ένα αναλλοίωτο σύνολο Cantor K. Το $S^1 \setminus K$ είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων μεταξύ τους ανοιχτών τόξων.
(α) Αν I_n, $n \in \mathbb{Z}$, είναι μια οποιαδήποτε αρίθμηση αυτών των τόξων, να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \ell(I_n) = 0$.
(β) Να αποδειχθεί οτι αν $I \subset S^1 \setminus K$ είναι ένα οποιοδήποτε τόξο, τότε για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subset S^1$ με $K \subset V$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f^n(I) \subset V$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ με $|n| \geq n_0$.