ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
1ο Φύλλο

1. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μία κανονική C^1 παραμετρισμένη καμπύλη ώστε $\gamma(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$. Αν υπάρχει $t_0 \in I$, εσωτερικό σημείου του διαστήματος I, τέτοιο ώστε

$$\|\gamma(t_0)\| = \inf\{\|\gamma(t)\| : t \in I\},$$

να αποδειχθεί οτι τα διανύσματα $\gamma(t_0)$ και $\dot{\gamma}(t_0)$ είναι κάθετα.

2. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μία κανονική C^1 παραμετρισμένη καμπύλη ώστε $\|\gamma(s)\| = 1$ για κάθε $s \in I$. Να αποδειχθεί οτι τα διανύσματα $\gamma(s)$ και $\dot{\gamma}(s)$ είναι κάθετα για κάθε $s \in I$.

3. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μία C^1 παραμετρισμένη καμπύλη και $v \in \mathbb{R}^n$ μη-μηδενικό. Αν τα διανύσματα $\dot{\gamma}(t)$ και v είναι κάθετα για κάθε t στο διάστημα I και υπάρχει $t_0 \in I$ ώστε τα $\gamma(t_0)$ και v να είναι κάθετα, να αποδειχθεί οτι τα $\gamma(t)$ και v είναι κάθετα για κάθε $t \in I$.

4. Να αποδειχθεί οτι το μήκος της παραβολής $x^2 = 2py$, όπου $p > 0$, από το σημείο $(0,0)$ μέχρι το σημείο $(a, \dfrac{a^2}{2p})$, όπου $a > 0$, είναι ίσο με

$$\frac{1}{2p}\left(a\sqrt{a^2+p^2} + p^2 \log \frac{a + \sqrt{a^2+p^2}}{p}\right).$$

5. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ μία C^1 παραμετρισμένη καμπύλη και $(r(t), \phi(t))$, $t \in I$, η μορφή της σε πολικές συντεταγμένες. Αν a, $b \in I$, $a < b$, να αποδειχθεί οτι

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2(\phi'(t))^2}dt.$$

6. Να αποδειχθεί οτι το μήκος του λιμνίσκου του Bernoulli, δηλαδή της C^1 παραμετρισμένης καμπύλης, της οποίας οι πολικές συντεταγμένες ικανοποιούν την εξίσωση $r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$, όπου $|\phi| \leq \dfrac{\pi}{4}$, και ο $a > 0$ είναι σταθερά, ισούται με

$$2a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}} d\phi.$$

7. Εστω $b < 0 < a$ και $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ η C^1 παραμετρισμένη καμπύλη με

$$\gamma(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t),$$

που λέγεται λογαριθμική σπείρα.
(α) Να αποδειχθεί οτι $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = (0,0)$ και $\lim_{t\to+\infty} \dot{\gamma}(t) = (0,0)$.
(β) Αν $T \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι το $\lim_{t\to+\infty} L(\gamma|_{[T,t]})$ υπάρχει. Ποιά είναι η τιμή του;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
2ο Φύλλο

1. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ μία κανονική C^2 παραμετρισμένη καμπύλη με συνάρτηση μήκους $s : I \to \mathbb{R}$. Εστω $\beta = \gamma \circ s^{-1} : s(I) \to \mathbb{R}^2$ η αναπαραμέτριση της γ με το μήκος της. Ορίζουμε ως (επίπεδη) καμπυλότητα $k(t)$ της γ στο σημείο $\gamma(t)$ την (επίπεδη) καμπυλότητα της β στο $\beta(s(t))$. Αν $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, να αποδειχθεί οτι

$$k(t) = \left| \frac{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}} \right|.$$

2. Να υπολογιστεί το πλαίσιο Frenét της παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ με

$$\gamma(s) = \Big(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\Big).$$

3. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της με καμπυλότητα $k > 0$ και στρέψη τ. Αν $A = \tau T + kB$, όπου $[T, N, B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ, να αποδειχθεί οτι οι τύποι του Frenét είναι ισοδύναμοι με τους

$$T' = A \times T, \quad N' = A \times N, \quad B' = A \times B.$$

4. Να αποδειχθεί οτι το ίχνος της παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$\gamma(s) = \Big(\frac{4}{5}\cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5}\cos s\Big)$$

είναι ένας επίπεδος κύκλος.

5. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της με πλαίσιο Frenét $[T, N, B]$, καμπυλότητα $k > 0$ και στρέψη $\tau \neq 0$.
(α) Αν το ίχνος της γ βρίσκεται επάνω σε μία σφαίρα κέντρου $a \in \mathbb{R}^3$, να αποδειχθεί οτι

$$\gamma(s) - a = -\frac{1}{k(s)}N(s) + \frac{k'(s)}{(k(s))^2\tau(s)}B(s).$$

(β) Έστω οτι η γ είναι C^4. Αν $k' \neq 0$ και η συνάρτηση

$$\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)^2$$

είναι σταθερή, να αποδειχθεί οτι το ίχνος της γ βρίσκεται επάνω σε μία σφαίρα.

6. Να αποδειχθεί οτι η παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$\gamma(s) = \Big(\frac{s}{2\sqrt{2}} + \sqrt{3}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}}, 2\cos\frac{s}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}s}{2\sqrt{2}} - \sin\frac{s}{2\sqrt{2}}\Big)$$

είναι έλικα. Να ευρεθούν επίσης μία τυπική έλικα $\gamma_{R,b}$ με παραμέτρους $R > 0$, $b > 0$ και μία ευκλείδεια ισομετρία $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $\gamma = f \circ \gamma_{R,b}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
3ο Φύλλο

1. Να αποδειχθεί οτι ο κύλινδρος $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ είναι λεία επιφάνεια ολικά παραμετρισμένη από την $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to C$ που δίνεται από τον τύπο (σε πολικές συντεταγμένες)

$$\phi(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \log r).$$

2. Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(x,y,z) = z^2$. Να αποδειχθεί οτι το $0 \in \mathbb{R}$ είναι κρίσιμη τιμή της f, αλλά το $f^{-1}(0)$ είναι λεία επιφάνεια.

3. Να ευρεθούν όλες οι κρίσιμες τιμές της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y,z) = (x+y+z-1)^2$$

και όλα τα $c \in \mathbb{R}$ για τα οποία το $f^{-1}(c)$ είναι λεία επιφάνεια.

4. Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι μία C^∞ αμφιδιαφόριση, να αποδειχθεί οτι για κάθε λεία επιφάνεια $M \subset \mathbb{R}^3$ το σύνολο $f(M)$ είναι επίσης λεία επιφάνεια.

5. Να αποδειχθεί οτι ο κώνος (άνω χωνί) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}\}$ δεν είναι λεία επιφάνεια.

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $R > 0$ η C^∞ απεικόνιση $\phi : (0,\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ με

$$\phi(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u)$$

είναι τοπική παραμέτριση της σφαίρας $S^2_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$. Ποιό είναι το $S^2_R \setminus \phi((0,\pi)\times(0,2\pi))$;

7. Εστω $R > 0$ και $\pi_+ : S^2_R \setminus \{(0,0,R)\} \to \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση με

$$\pi_+(x,y,z) = \frac{R}{R-z}(x,y),$$

και $\pi_- : S^2_R \setminus \{(0,0,-R)\} \to \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση με

$$\pi_-(x,y,z) = \frac{R}{R+z}(x,y).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι οι απεικονίσεις π_+, π_- είναι ένα προς ένα και επί.
(β) Να αποδειχθεί οτι οι π_+^{-1}, π_-^{-1} είναι τοπικές παραμετρήσεις της σφαίρας S^2_R με $S^2_R = \pi_+^{-1}(\mathbb{R}^2) \cup \pi_-^{-1}(\mathbb{R}^2)$.

Οι π_+, π_- είναι οι στερεογραφικές προβολές ως προς τον βόρειο και τον νότιο πόλο, αντίστοιχα.

8. Να ευρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ στο σημείο $(1, 0, 0)$.

9. Να ευρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

σε κάθε σημείο της.

10. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση.
(α) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x \cdot f(\frac{y}{x}), \quad x \neq 0\right\}$$

είναι λεία επιφάνεια.
(β) Να αποδειχθεί οτι το εφαπτόμενο επίπεδο της M σε οποιοδήποτε σημείο της διέρχεται από το $(0, 0, 0)$.

11. Εστω $b > 0$ και $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu).$$

Να αποδειχθεί οτι το $M = \phi(\mathbb{R}^2)$ είναι λεία επιφάνεια και να ευρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της. Η M λέγεται ελικοειδής επιφάνεια.

12. Εστω $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με

$$\phi(u, v) = (u, v^3, u - v)$$

και $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με

$$\gamma(t) = (3t, t^6, 3t - t^2).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι το $M = \phi(\mathbb{R}^2)$ είναι λεία επιφάνεια.
(β) Να αποδειχθεί οτι $\gamma(\mathbb{R}) \subset M$. Ποιά είναι η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\phi^{-1} \circ \gamma$;
(γ) Να εκφραστεί η ταχύτητα $\dot{\gamma}(0)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\left\{\frac{\partial \phi}{\partial u}(0, 0), \frac{\partial \phi}{\partial v}(0, 0)\right\}$ του εφαπτόμενου επιπέδου $T_0 M$ στο $\gamma(0) = (0, 0, 0)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
4ο Φύλλο

1. Εστω $U = (0, 2\pi) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ και ϕ, $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ οι C^∞ απεικονίσεις με

$$\phi(u, v) = ((2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin u, (2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos u, v \cos \frac{u}{2}),$$

$$\psi(u, v) = ((2 - v \sin(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})) \sin u, (2 - v \sin(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})) \cos u, v \cos(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι $\phi(U) \cap \psi(U) = \phi(W_1) \cup \phi(W_2)$, όπου

$$W_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi\},$$

$$W_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < \frac{\pi}{2}\}.$$

(β) Να αποδειχθεί οτι

$$(\psi^{-1} \circ \phi)(u, v) = \begin{cases} (u - \frac{\pi}{2}, v), & \text{όταν } (u, v) \in W_1, \\ (u + \frac{3\pi}{2}, -v), & \text{όταν } (u, v) \in W_2. \end{cases}$$

Κατά συνέπεια το σύνολο $M = \phi(U) \cup \psi(U)$ είναι λεία επιφάνεια. Το M λέγεται (ανοιχτή) ταινία του Möbius.
(γ) Να αποδειχθεί οτι η M δεν είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια.

2. Εστω M_1 και M_2 δύο λείες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ για τις οποίες υπάρχει μία αμφιδιαφόριση επιφανειών $F : M_1 \to M_2$. Αν η M_1 είναι προσανατολίσιμη, να αποδειχθεί οτι και η M_2 είναι προσανατολίσιμη.

3. Να ευρεθούν όλες οι C^∞ παραμετρισμένες καμπύλες $\gamma : I \to S^2$, όπου $I \subset \mathbb{R}$ είναι κάποιο ανοιχτό διάστημα, με την ιδιότητα οτι για κάθε $t \in I$ η γ και ο μεσημβρινός που διέρχεται από το $\gamma(t)$ τέμνονται σχηματίζοντας μία σταθερή γωνία ω. Αυτές οι καμπύλες τις σφαίρας λέγονται λοξοδρομικές.

4. Εστω M η λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ που παραμετρίζεται ολικά από την $\phi : \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to M$ με

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log(\cos v) + u).$$

Εστω a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ και γ_1, $\gamma_2 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to M$ οι C^∞ παραμετρισμένες καμπύλες με $\gamma_i(t) = \phi(a_i, t)$, $i = 1, 2$. Να αποδειχθεί οτι οι γ_1, γ_2 αποκόπτουν από κάθε παραμετρισμένη καμπύλη $\sigma_b : \mathbb{R} \to M$ με $\sigma_b(t) = \phi(t, b)$, όπου $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ένα κομμάτι σταθερού πάντα μήκους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
5ο Φύλλο

1. Εστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $p \in M$. Να αποδειχθεί οτι

$$L_p(v) \times L_p(w) = K(p)(v \times w)$$

για κάθε $v,\, w \in T_pM$, όπου L_p είναι ο τελεστής σχήματος και $K(p)$ είναι η καμπυλότητα Gauss της M στο p.

2. Να αποδειχθεί οτι ένα σημείο μίας λείας επιφάνειας είναι ελλειπτικό τότε και μόνο τότε όταν ο τελεστής σχήματος στο σημείο αυτό είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος.

3. Να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss της ελικοειδούς επιφάνειας $M = \phi(\mathbb{R}^2)$, όπου $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι η

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad a > 0.$$

4. Εστω $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με

$$\phi(u, v) = \Big(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\Big).$$

(α) Να αποδειχτεί οτι το σύνολο $M = \phi(\mathbb{R}^2) \setminus C$, όπου $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \quad \text{ή} \quad y = 0\}$ είναι λεία επιφάνεια, ολικά παραμετρισμένη, με συντελεστές της πρώτης θελιώδους μορφής $E(u, v) = G(u, v) = (1 + u^2 + v^2)^2$ και $F(u, v) = 0$.
(β) Να αποδειχτεί οτι οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής είναι $e(u, v) = 2$, $g(u, v) = -2$ και $f(u, v) = 0$.
(γ) Να αποδειχτεί οτι οι κύριες καμπυλότητες στο σημείο $\phi(u, v)$ δίνονται από τους τύπους

$$\kappa_1(u, v) = \frac{-2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad \kappa_2(u, v) = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

5. Εστω $h : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση με $h' > 0$ και $\phi : (0, 1) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v)).$$

(α) Να αποδειχτεί οτι το $M = \phi((0, 1) \times (0, \pi))$ είναι λεία επιφάνεια.
(β) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss σε κάθε σημείο της M.
(γ) Να ευρεθούν τα ομφαλικά σημεία της M, αν υπάρχουν.

6. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία λεία επιφάνεια, I ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to M$ μία κανονική C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη. Αν υπάρχει ένα επίπεδο το οποίο εφάπτεται της M σε κάθε σημείο του $\gamma(I)$, να αποδειχθεί οτι κάθε σημείο του $\gamma(I)$ είναι παραβολικό ή επίπεδο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
6ο Φύλλο

1. Να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα με γενέτειρα την $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (e^{-t^2/2}, 0, t)$.

2. Εστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(\sqrt{x^2 + y^2})\}$$

είναι επιφάνεια εκ περιστροφής με καμπυλότητα Gauss

$$K(x, y, z) = \frac{f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot f''(\sqrt{x^2 + y^2})}{(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot [1 + (f'(\sqrt{x^2 + y^2}))^2]^2}$$

για κάθε $(x, y, z) \in M$.

3. Εστω (M, N) μία προσανατολισμένη λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Μία κανονική C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : I \to M$, όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα, λέγεται κύρια αν το $\dot{\gamma}(t)$ ορίζει κύρια διεύθυνση για κάθε $t \in I$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η γ είναι κύρια τότε και μόνο τότε όταν τα εφαπτόμενα διανύσματα $(N \circ \gamma)'(t)$ και $\dot{\gamma}(t)$ είναι συγραμμικά για κάθε $t \in I$.
(β) Να αποδειχθεί οτι

$$\kappa_{\gamma(t)}\Big(\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\Big) = \frac{\langle \gamma''(t), N(\gamma(t))\rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}.$$

(γ) Αν η M είναι επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα με γενέτειρα $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ και $\phi : \mathbb{R} \times I \to M$ είναι η κανονική παραμέτριση της M, να αποδειχθεί οτι για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R} \times I$ οι παραμετρισμένες καμπύλες $\gamma_1(t) = \phi(t, v)$, $t \in \mathbb{R}$ και $\gamma_2(t) = \phi(u, t)$, $t \in I$, είναι κύριες.

4. Να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει συμπαγής λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ σε κάθε σημείο της οποίας η μέση καμπυλότητα είναι μηδενική.

5. Να αποδειχθεί οτι κάθε λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ που έχει θετική καμπυλότητα Gauss σε κάθε σημείο της, είναι προσανατολίσιμη.

6. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία συνεκτική, συμπαγής, λεία επιφάνεια που έχει παντού θετική καμπυλότητα Gauss $K > 0$.
(α) Αν η μέση καμπυλότητα H της M είναι κατ΄ απόλυτη τιμή σταθερή, δηλαδή η $|H|$ είναι σταθερή, να αποδειχθεί οτι η M είναι σφαίρα.
(β) Αν ο λόγος H/K σταθερός στην M, να αποδειχθεί οτι η M είναι σφαίρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
7ο Φύλλο

1. Να υπολογιστούν τα σύμβολα Christoffel της ελικοειδούς επιφάνειας $M = \phi(\mathbb{R}^2)$, όπου $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι η ολική παραμέτριση

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad a > 0.$$

2. Εστω ϕ, $\psi : (0, 2\pi) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ οι C^∞ απεκονίσεις με

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \log v),$$

$$\psi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u).$$

Το $M_1 = \phi((0, 2\pi) \times (0, +\infty))$ είναι η επιφάνεια εκ περιστροφής (περί τον κάθετο άξονα) με γενέτειρα την C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma(t) = (t, 0, \log t)$, $t > 0$, χωρίς τη γενέτειρα, και το $M_2 = \psi((0, 2\pi) \times (0, +\infty))$ είναι μέρος μίας ελικοειδούς επιφάνειας.
(α) Να αποδειχθεί οτι για τις καμπυλότητες Gauss ισχύει $K(\phi(u, v)) = K(\psi(u, v))$ για κάθε $0 < u < 2\pi$, $v > 0$.
(β) Να αποδειχθεί οτι η $\phi \circ \psi^{-1} : M_2 \to M_1$ δεν είναι ισομετρία επιφανειών.

3. Εστω M μία λεία επιφάνεια και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της, τέτοια ώστε $F(u, v) = 0$ και $E(u, v) = G(u, v) = \lambda(u, v)$ για κάθε $(u, v) \in U$, όπου $\lambda : U \to (0, +\infty)$ είναι κάποια C^∞ συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι η καμπυλότητα Gauss στο $\phi(U)$ δίνεται από τον τύπο

$$K(\phi(u, v)) = -\frac{1}{2\lambda(u, v)} \left[\frac{\partial^2 (\log \lambda)}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 (\log \lambda)}{\partial v^2}(u, v) \right]$$

για κάθε $(u, v) \in U$. Ειδικά, όταν $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$ και $\lambda(u, v) = \dfrac{1}{v^2}$, τότε $K = -1$.

4. Εστω M μία λεία επιφάνεια και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της, τέτοια ώστε $F(u, v) = 0$ και για κάθε $(u, v) \in U$. Να αποδειχθεί οτι η καμπυλότητα Gauss στο $\phi(U)$ δίνεται από τον τύπο

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial E}{\partial v} \right) \right].$$

5. Εστω M μία λεία επιφάνεια και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της, τέτοια ώστε $E(u, v) = G(u, v) = 1$ και $F(u, v) = \cos \theta(u, v)$ για κάθε $(u, v) \in U$, όπου $\theta : U \to (0, \pi)$ είναι κάποια C^∞ συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι η καμπυλότητα Gauss στο $\phi(U)$ δίνεται από τον τύπο

$$K(\phi(u, v)) = -\frac{1}{\sin \theta(u, v)} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}(u, v).$$

6. Εστω M μία λεία επιφάνεια και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της, τέτοια ώστε $E(u,v) = 1$, $F(u,v) = 0$ και $G(u,v) = (h(u,v))^2$ για κάθε $(u,v) \in U$, όπου $h : U \to (0, +\infty)$ είναι κάποια C^∞ συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι η καμπυλότητα Gauss στο $\phi(U)$ δίνεται από τον τύπο

$$K(\phi(u,v)) = -\frac{1}{h(u,v)} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,v).$$

7. Αν M είναι μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$, να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει καμία τοπική παραμέτριση $\phi : U \to M$ τέτοια ώστε $E(u,v) = G(u,v) = 1$, $F(u,v) = 0$, ενώ $e(u,v) = 1$, $g(u,v) = -1$ και $f(u,v) = 0$ για κάθε $(u,v) \in U$.

8. Εστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ για την οποία υπάρχει μία ισομετρία επιφανειών $T : S^2_R \to M$, για κάποιο $R > 0$. Να αποδειχθεί οτι οτι η M είναι ευκλείδεια σφαίρα ακτίνας R.