ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} y + x\sin\dfrac{1}{y}, & \text{για } y \neq 0, \\ 0, & \text{για } y = 0. \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
(β) Να αποδειχθεί οτι το $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ δεν υπάρχει.

2. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Για κάθε $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ με $(u,v) \neq (0,0)$ να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{t\to 0} f(tu,tv)$.
(β) Είναι η f συνεχής στο σημείο $(0,0)$;

3. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x,y) = x^2 + xy + 2$. Αν $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ και $x = (1,1)$, να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(x;v)$.

4. Να υπολογιστεί σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της η παράγωγος της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(y) = \int_0^{y^2} e^{-x^2y^2}\,dx.$$

5. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Είναι η f συνεχής στο σημείο $(0,0)$;
(β) Είναι η f διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$;

6. Να υπολογιστεί ο ιακωβιανός πίνακας της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x,y) = (xy, x+y)$$

στο σημείο $(1,2)$.

7. Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$h(r,\phi,\theta) = f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta).$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial \phi}, \frac{\partial h}{\partial \theta}$ της h (σε κάθε σημείο) συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f.

8. Να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο $(1, \frac{\pi}{2}, 1)$ του γραφήματος $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin(xy)\}$.

9. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} (x-y)^2 \sin \dfrac{1}{x-y}, & \text{όταν } x \neq y, \\ 0, & \text{όταν } x = y. \end{cases}$$

(α) Είναι η f C^1, δηλαδή συνεχώς διαφορίσιμη;
(β) Ποιά είναι η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο $(0, 0, 0)$ του γραφήματος της f;

10. Να αποδειχθεί οτι αν $c \in \mathbb{R}$, τότε οποιαδήποτε C^2 συνάρτηση $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ της μορφής $u(x, t) = g(x + ct)$, όπου $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κάποια C^2 συνάρτηση, ικανοποιεί την κυματική διαφορική εξίσωση

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

11. Εστω $a \neq 0$ και $b \neq 0$. Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι η C^∞ συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = e^{ax^2 + by^2},$$

να ευρεθούν τα κρίσιμα σημεία της f και τα σημεία στα οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

12. Να ευρεθούν τα κρίσιμα σημεία, τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σαμάρια της C^∞ συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ όταν
(α) $f(x, y) = 2y^2 - x(x-1)^2$,
(β) $f(x, y) = x(y+1) - x^2 y$.

13. Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση με τύπο $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Να αποδειχθεί οτι το $(0, 0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f, αλλά η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε αυτό.

14. Να αποδειχθεί οτι σε κάθε τρίγωνο με γωνίες A, B και Γ ισχύει οτι

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{\Gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Για ποιά τρίγωνα ισχύει η ισότητα;

15. Να ευρεθούν τα κρίσιμα σημεία, τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σαμάρια της C^∞ συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

και να αποδειχθεί οτι $|f(x,y)| \leq \dfrac{1}{e}$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

16. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$$

στο κλειστό και φραγμένο σύνολο $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 4 \quad \text{και} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$.

17. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y,z) = x - y + 2z$$

πάνω στο ελλειψοειδές $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$.

18. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η τετραγωνική μορφή

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz$$

πάνω στη σφαίρα $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

19. Εστω $n \geq 2$ και $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ υπό τη συνθήκη $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

20. Να ευρεθεί το προς το σημείο $(2,4) \in \mathbb{R}^2$ εγγύτερο σημείο του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 320$, καθώς και το πιό απομακρυσμένο.

21. Να ευρεθούν τα σημεία της έλλειψης με εξίσωση $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ που έχουν τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(0,0)$ του $\mathbb{R}^2$.

22. Να ευρεθεί η ελάχιστη απόσταση των σημείων του μοναδιαίου κύκλου

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

από τα σημεία της υπερβολής $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1,\ x > 0\}$.

23. Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $F(x,y,z) = \log x + \log y + 3\log z$, πάνω στο σφαιρικό χωρίο $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2, x > 0, y > 0, z > 0\}$, όπου $R > 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του υπολογισμού αυτού, να αποδειχθεί οτι για κάθε $a > 0$, $b > 0$ και $c > 0$ ισχύει

$$abc^3 \leq \sqrt{27\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}\right)^5}.$$

24. Αν $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1 \text{ και } -1 \leq x \leq 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K (x^2 + y)\,dxdy.$$

25. Να υπολογιστεί ο όγκος του συνόλου

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le 4 - x^2 - z^2,\ x \ge 0 \text{ και } z \ge 0\}.$$

26. Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le |x|\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B (x+y)dxdy.$$

27. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 \le y \le 9 - x^2,\ \ -2 \le x \le 2\}.$$

28. Να υπολογιστεί ο όγκος του συνόλου

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0\ y \ge 0 \text{ και } 0 \le z \le 4 - 4x^2 - 4y^2\}.$$

29. Να υπολογιστεί ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_B xydxdy$, όπου B είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ και $(-1,1)$.

30. Να υπολογιστεί ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_B xdxdy$, όπου B είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(1/2,0)$, $(1,1/2)$, $(1/2,1)$ και $(0,1/2)$.

31. Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B e^{x+y}dxdy.$$

32. Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B e^{-(x-1)^2}dxdy.$$

33. Να υπολογιστεί ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_B yzdxdy$, όπου

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \le x \le \sqrt{z},\ 0 \le y \le z \text{ και } 0 \le z \le 1\}.$$

34. Αν $a > 0$, $b > 0$ και $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x^2 + y^2 \le b,\ y \ge 0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B e^{(x^2+y^2)^2}(x^2+y^2)dxdy.$$

35. Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \le 36, x > 0, y > 0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B (3x+y)dxdy.$$

36. Εστω οτι $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + 2y^2 \le 1\}$.
(α) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του K.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_K xydxdy$.

37. Αν $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2 \text{ και } x^2+y^2 \leq z\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B zdxdydz.$$

38. Αν $a > b > 0$, να υπολογιστεί ο όγκος του συνόλου

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \text{ και } x^2+y^2 \leq b^2\}.$$

39. Αν $R > 0$ και $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, 0 \leq x \leq y \text{ και } z \geq 0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K 4zdxdydz.$$

40. Εστω $a > 0$, $b > 0$ και $c > 0$. Αν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\},$$

να αποδειχθεί οτι

$$\int_K f\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\right)dxdydz = 4\pi abc \int_0^1 t^2 f(t)dt.$$

Ειδικά, ο όγκος του στερεού ελλειψοειδούς K είναι $\frac{4}{3}\pi abc$.

41. Αν $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4 \text{ και } x^2+y^2 \geq 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz.$$

42. Αν $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y \text{ και } 0 \leq z \leq 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B (x^2+y^2)dxdydz.$$

43. Να υπολογιστεί ο όγκος του συνόλου

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{6-x^2-y^2}\}.$$

44. Αν $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση και $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1\}$, να αποδειχθεί οτι

$$\int_B f(x+y)dxdy = \int_{-1}^1 f(t)dt.$$

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τον μετασχηματισμό $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $g(x,y) = (x+y, y-x)$ και βρείτε το χωρίο $g(B)$.)